Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОБ ИСКРИВЛЕННОМ СЛОЕ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ВОЛНИСТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

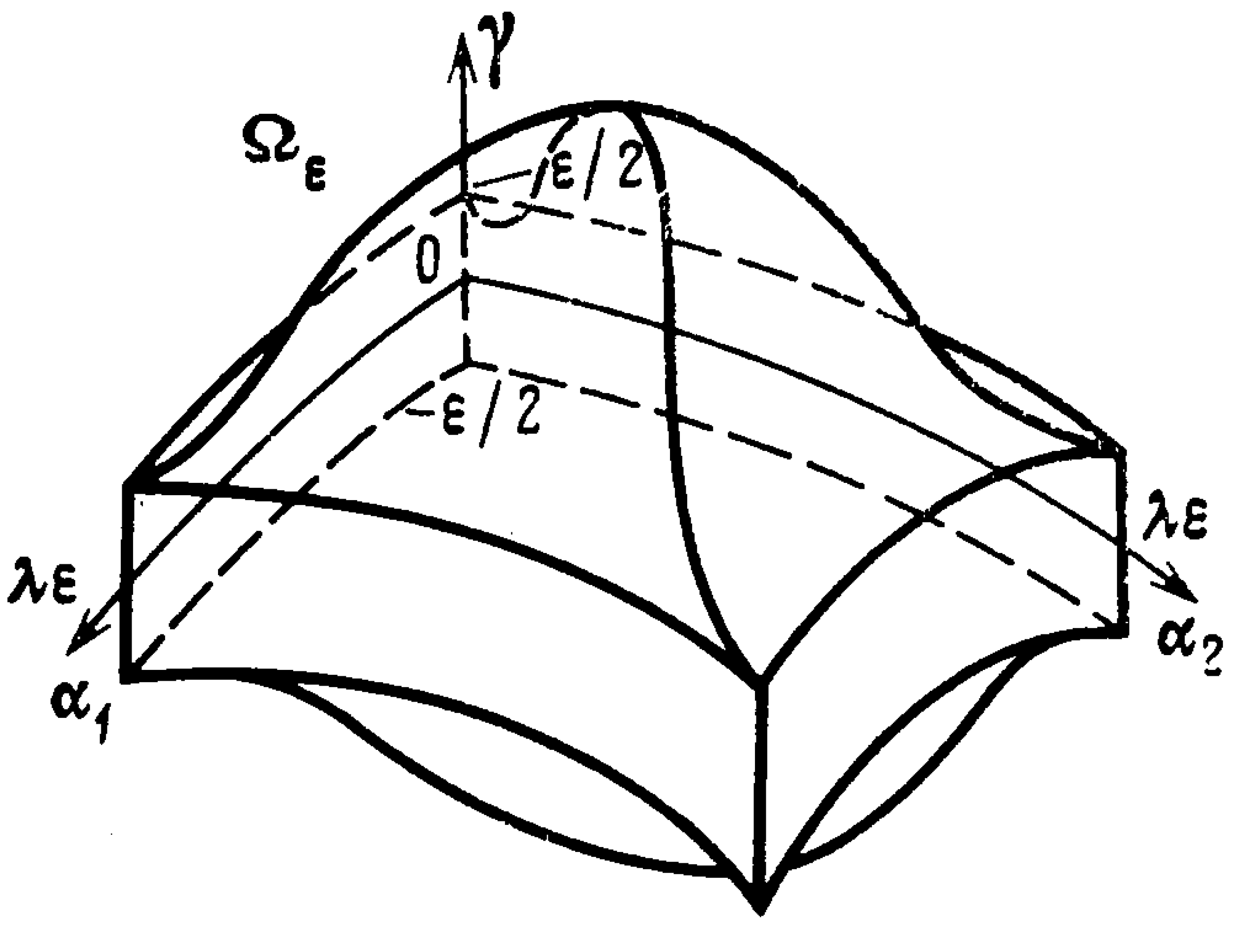
Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.

Исследуется напряженно-деформированное состояние искривленного анизотропного неоднородного тонкого слоя периодической структуры переменной толщины, определяемой волнистыми поверхностями. Период структуры и размеры волн на поверхностях считаются сравнимыми по величине с толщиной слоя. Используется общая схема усреднения [1, 2] и метод двухмасштабного разложения [3], позволивший выполнить переход от трехмерных уравнений теории упругости к двумерным. При этом эффективные модули жесткости полученной усредненной оболочки определяются из решения вспомогательных локальных задач на ячейке периодичности.

Построенная модель позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние оболочек из композиционных материалов с произвольным видом подкреплений периодической структуры (бугристыми, вафельными, ребристыми или гофрированными). В частности, можно рассмотреть оболочки из материала с жестким каркасом периодической структуры или жесткими нитями, подкрепления из материала со свойствами, отличными от свойств материала основного слоя, периодически перфорированные оболочки. В предельном случае «гладких» поверхностей и однородного материала получается известная модель анизотропной оболочки.

Предлагаемый метод усреднения не требует замены подкреплений на некоторые специального вида контактные усилия [4]. Это позволяет более строго учесть влияние различных подкреплений, а также вычислить напряжения непосредственно в точках ячейки периодичности.

1. Введем триортогональную систему безразмерных координат α_1, α_2, γ так, чтобы координатные линии α_1 и α_2 совпадали с линиями главных кривизн срединной поверхности (при $\gamma = 0$), а ось γ была направлена вдоль нормали к ней. В такой системе координат коэффициенты Ламе: $H_1 = A_1(1 + k_1\gamma)$, $H_2 = A_2(1 + k_2\gamma)$, $H_3 = 1$; $A_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$ — коэффициенты первой квадратичной формы, $k_1(\alpha)$, $k_2(\alpha)$ — главные кривизны срединной поверхности, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.



Рассматриваемый упругий слой имеет периодическую структуру с ячейкой периодичности Ω_ε (фигура)

$$\{0 < \alpha_1 < \lambda\varepsilon,\ 0 < \alpha_2 < \lambda\varepsilon,\ \gamma^- < \gamma < \gamma^+\}$$

$$\gamma^\pm = \pm\frac{\varepsilon}{2} \pm \lambda\varepsilon F^\pm\left(\frac{\alpha_1}{\lambda\varepsilon}, \frac{\alpha_2}{\lambda\varepsilon}\right)$$

Безразмерный малый параметр ε определяет толщину слоя, λ характеризует отношение размеров ячейки периодичности к толщине слоя и принимается постоянной порядка единицы; F^+ и F^- — в общем случае различные функции, задающие верхнюю и нижнюю поверхности слоя.

Физические компоненты тензора деформаций и вектора перемещений связаны соотношениями [5]

$$(1.1)\qquad e_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2+\frac{A_1k_1}{H_1}u_3\,(1\leftrightarrow2),\quad e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial\gamma}$$

$$2e_{12}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_2A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_2+\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_1$$

$$2e_{31}=\frac{\partial u_1}{\partial\gamma}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_1}-\frac{A_1k_1}{H_1}u_1\quad(1\leftrightarrow2)$$

Уравнения равновесия [6] можно записать в виде (P_i — компоненты объемной силы)

$$(1.2)\qquad \frac{\partial(H_2\sigma_{11})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(H_1\sigma_{12})}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial(H_1H_2\sigma_{13})}{\partial\gamma}-\frac{H_1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}+$$

$$+\frac{H_2}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{21}+H_2A_1k_1\sigma_{31}+H_1H_2P_1=0\quad(1\leftrightarrow2)$$

$$\frac{\partial(H_2\sigma_{31})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(H_1\sigma_{32})}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial(H_1H_2\sigma_{33})}{\partial\gamma}-H_2A_1k_1\sigma_{11}-$$

$$-H_1A_2k_2\sigma_{22}+H_1H_2P_3=0$$

Напряжения и деформации связаны законом Гука

$$(1.3)\qquad \sigma_{ij}=a_{ijln}(y_1,y_2,z)e_{ln},\quad y_\mu=\alpha_\mu/\lambda\varepsilon,\quad z=\gamma/\varepsilon$$

Здесь и далее $i,\ j,\ l,n=1,2,3$; $\mu,\nu,\beta,\delta=1,2$; по одинаковым индексам производится суммирование, $y=(y_1,y_2)$.

Считаем, что исследуемый упругий слой изготовлен из композиционного материала, обладающего ячейкой периодичности Ω_ε, и, следовательно, коэффициенты упругости $a_{ijln}(y,z)$ представляют собой однопериодические функции по переменным y_1 и y_2.

На верхней и нижней поверхностях слоя, т. е. при $\gamma=\gamma^\pm$, выполняются условия

$$(1.4)\qquad H_2\sigma_{i1}n_1^\pm+H_1\sigma_{i2}n_2^\pm+H_1H_2\sigma_{i3}n_3^\pm=H_1H_2p_i^\pm\ (\gamma=\gamma^\pm)$$

$$n_i^\pm=\left\{\mp\frac{\partial F^\pm}{\partial y_1},\mp\frac{\partial F^\pm}{\partial y_2},1\right\}\left[1+\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial F^\pm}{\partial y_1}\right)^2+\frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial F^\pm}{\partial y_2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

где $n_i^\pm$ — единичные нормали, $p_i^\pm$ — компоненты внешних нагрузок на поверхностях $\gamma=\gamma^\pm$.

2. Решение задачи (1.1)—(1.4) определим в форме асимптотических разложений [, 2]

$$(2.1)\qquad u_l=u_l^{(0)}(\alpha)+\varepsilon u_l^{(1)}(\alpha,y,z)+\varepsilon^2u_l^{(2)}(\alpha,y,z)+\ldots$$

Здесь $u_l^{(m)}(\alpha,y,z)$ $(m=1,2,\ldots)$ — однопериодические функции по y_μ.

Учитывая, что толщина слоя мала по сравнению с радиусами кривизны срединной поверхности, введем обозначения

$$(2.2)\qquad k_1=\varepsilon K_2(\alpha),\quad k_2=\varepsilon K_1(\alpha),\quad k_1+k_2=\varepsilon K_3(\alpha)$$

Для внешних сил полагаем

$$(2.3)\qquad p_\nu^\pm=\pm\,\varepsilon^2r_\nu^\pm(\alpha,y),\ p_3^\pm=\pm\,\varepsilon^3q_3^\pm(\alpha,y)$$

$$(2.4)\qquad P_\nu=\varepsilon f_\nu(\alpha,y,z),\quad P_3=\varepsilon^2g_3(\alpha,y,z)$$

Все функции, определенные в (2.3), (2.4), периодичны по y_1 и y_2 с ячейкой периодичности $\Omega:\{0<y_1<1,\ \ 0<y_2<1,\ \ z^-<z<z^+\}$, $z^\pm=\pm\,{}^1/_2\pm\lambda F^\pm(y)$. В соотношениях (2.3) внешние тангенциальные нагрузки, работающие на растяжение или сдвиг, имеют порядок ε^2, а нагрузки, изгибающие слой,— порядок ε^3. Порядок объемных сил в (2.4) на

единицу ниже соответствующих им поверхностных нагрузок, так как при интегрировании по толщине слоя он возрастает на единицу.

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим $\xi_1 = A_1 y_1$, $\xi_2 = A_2 y_2$ и определим дифференциальные операторы, действующие на произвольные компоненты $t_{l\mu}$ по формулам

$$\text{(2.5)}\qquad \mathbf{B}_1(t_{l\mu}) = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2t_{11})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1t_{21})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}t_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}t_{22}\right]$$

$$\mathbf{K}_1(t_{l\mu}) = K_2t_{31}\quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\mathbf{B}_3(t_{l\mu}) = \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2t_{31})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1t_{32})}{\partial\alpha_2}\right],\quad \mathbf{K}_3(t_{l\mu}) = -K_2t_{11} - K_1t_{22}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z},\qquad \frac{d}{d\alpha_\nu} = \frac{\partial}{\partial\alpha_\nu} + \frac{1}{\lambda\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_\nu}$$

из (1.1), (2.1), (2.2) получим

$$\text{(2.6)}\qquad e_{ij} = e_{ij}^{(0)} + \varepsilon e_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 e_{ij}^{(2)} + \ldots$$

Из (1.3) и (2.6) следует

$$\text{(2.7)}\qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{ij}^{(2)} + \ldots$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijln}(y, z)\, e_{ln}^{(m)}\quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Уравнения (1.2) при учете (2.2), (2.4) разлагаются по степеням ε^m $(m = -1, 0, 1, 2)$ следующим образом:

$$\text{(2.8)}\qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{i\nu}^{(0)}}{\partial\xi_\nu} + \frac{\partial\sigma_{i3}^{(0)}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{i\nu}^{(1)}}{\partial\xi_\nu} + \frac{\partial\sigma_{i3}^{(1)}}{\partial z} + \mathbf{B}_i(\sigma_{l\mu}^{(0)}) = 0$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}(\sigma_{i\nu}^{(2)} + zK_\nu\sigma_{i\nu}^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{i3}^{(2)} + zK_3\sigma_{i3}^{(0)}) +$$

$$+ \mathbf{B}_i(\sigma_{l\mu}^{(1)}) + \mathbf{K}_i(\sigma_{l\mu}^{(0)}) + f_i = 0$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}(\sigma_{i\nu}^{(3)} + zK_\nu\sigma_{i\nu}^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{i3}^{(3)} + zK_3\sigma_{i3}^{(1)}) +$$

$$+ \mathbf{B}_i(\sigma_{l\mu}^{(2)} + zK_l\sigma_{l\mu}^{(0)}) + \mathbf{K}_i(\sigma_{l\mu}^{(1)}) + g_i = 0$$

Условия (1.4) при учете (2.2), (2.3) разлагаются по степеням ε^m $(m = 0, 1, 2, 3)$ по формулам

$$\text{(2.9)}\qquad \sigma_{ij}^{(m)}N_j^{\pm} = 0\quad (z = z^{\pm};\ m = 0, 1)$$

$$\text{(2.10)}\qquad (\sigma_{ij}^{(2)} + zK_j\sigma_{ij}^{(0)})N_j^{\pm} = \pm\omega^{\pm}r_i^{\pm}\quad (z = z^{\pm})$$

$$\text{(2.11)}\qquad (\sigma_{ij}^{(3)} + zK_j\sigma_{ij}^{(1)})N_j^{\pm} = \pm\omega^{\pm}q_i^{\pm}\quad (z = z^{\pm})$$

Здесь

$$\text{(2.12)}\qquad N_j^{\pm} = \left\{\mp\frac{\partial F^{\pm}}{\partial\xi_1}, \mp\frac{\partial F^{\pm}}{\partial\xi_2}, 1\right\},\quad \omega^{\pm} = \left[1 + \left(\frac{\partial F^{\pm}}{\partial\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F^{\pm}}{\partial\xi_2}\right)^2\right]^{1/2}$$

В соответствии с (2.3), (2.4) имеем

$$f_3 = 0,\quad g_\nu = 0,\quad r_3^{\pm} = 0,\quad q_\nu^{\pm} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi_\nu} = \frac{1}{A_\nu}\frac{\partial}{\partial y_\nu},\quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

Отметим, что при выводе соотношений (2.6)—(2.12) учитывалось, что во введенной системе координат коэффициенты Ламе и компоненты единичных нормалей разлагаются по ε.

3. Из соотношений (1.1), (2.1), (2.7) получим

$$\sigma_{ij}^{(0)} = a_{ijl\nu}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial \xi_\nu} + a_{ijl3}\frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial z} + a_{ijl\nu}\omega_{l\nu}^{(0)} \tag{3.1}$$

$$\omega_{11}^{(0)} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2^{(0)}, \quad \omega_{31}^{(0)} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{3.2}$$

$$\omega_{12}^{(0)} = \omega_{21}^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1^{(0)}}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2^{(0)}}{A_2}\right)\right]$$

Обозначим

$$\mathbf{L}_{ijl} = a_{ijl\nu}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu} + a_{ijl3}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{D}_{il} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi_\beta}\mathbf{L}_{i\beta l} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{L}_{i3l} \tag{3.3}$$

$$A_{in\nu} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial a_{i\beta n\nu}}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial a_{i3n\nu}}{\partial z} \tag{3.4}$$

Подставив (3.1) в первые уравнения (2.8), получим

$$\mathbf{D}_{il}u_l^{(1)} = -A_{in\nu}\omega_{n\nu}^{(0)} \tag{3.5}$$

Периодичные по ξ_1, ξ_2 решения уравнения (3.5) должны удовлетворять условиям (2.9) при $m = 0$, которые при помощи (3.1)—(3.3) можно записать так:

$$(\mathbf{L}_{ijl}u_l^{(1)} + a_{ijn\nu}\omega_{n\nu}^{(0)})N_j^\pm = 0 \quad (z = z^\pm) \tag{3.6}$$

Решение уравнений (3.5), (3.6) представим в виде

$$u_l^{(1)} = U_l^{n\nu}(\xi, z)\,\omega_{n\nu}^{(0)}(\alpha) + v_l(\alpha) \tag{3.7}$$

где $U_l^{n\nu}(\xi, z)$ — периодические по ξ_1, ξ_2 (с периодами A_1, A_2 соответственно) решения задачи

$$\mathbf{D}_{il}\mathbf{U}_l^{n\nu} = -A_{in\nu} \tag{3.8}$$

$$b_{ij}^{n\nu}N_j^\pm = 0 \quad (z = z^\pm); \quad b_{ij}^{n\nu} = \mathbf{L}_{ijl}U_l^{n\nu} + a_{ijn\nu}$$

При $n, \nu = 3{,}1$ и $3{,}2$ эта задача решается точно:

$$U_1^{31} = -z,\ U_2^{31} = U_3^{31} = 0, \quad U_2^{32} = -z,\ U_1^{32} = U_3^{32} = 0 \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует

$$b_{ij}^{3\nu} = 0 \tag{3.10}$$

Подставляя (3.7) в (3.1) и учитывая (3.10), получим

$$\sigma_{ij}^{(0)} = b_{ij}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}^{(0)} \tag{3.11}$$

При помощи интегрирования по ячейке периодичности Ω введем операцию усреднения по переменным y_1, y_2, z

$$\langle\varphi(\alpha, y, z)\rangle = \frac{1}{V}\int_\Omega \varphi(\alpha, y, z)\,dy_1\,dy_2\,dz \tag{3.12}$$

Отметим, что дифференцирование по переменным α_1 и α_2 перестановочно с операцией усреднения (3.12); V — объем ячейки Ω.

Усредним вторые уравнения (2.8), пользуясь условиями (2.9) при $m = 1$ и периодичностью по y_1, y_2

$$\mathbf{B}_i\langle\sigma_{l\mu}^{(0)}\rangle = 0 \tag{3.13}$$

Однородные уравнения (3.13) и условия (2.9) при $m = 0$ при учете (3.11) имеют нулевое решение: $\omega_{11}^{(0)} = \omega_{22}^{(0)} = \omega_{12}^{(0)} = 0$. Из (3.2), (3.7), (3.9) получим

(3.14) $$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = 0, \quad u_3^{(0)} = w\,(\alpha)$$

$$u_\nu^{(1)} = v_\nu(\alpha) - z\,\frac{1}{A_\nu}\,\frac{\partial w}{\partial \alpha_\nu}, \quad u_3^{(1)} = v_3(\alpha)$$

Введенная в (3.14) функция $w\,(\alpha)$, а также функции $v_l\,(\alpha)$ задачей (3.5), (3.6) не определяются. При этом из (3.11) следует

(3.15) $$\sigma_{ij}^{(0)} = 0$$

4. Из соотношений (1.1), (2.1), (2.7), учитывая (3.14), получим

(4.1) $$\sigma_{ij}^{(1)} = \mathbf{L}_{ijl}u_l^{(2)} + a_{ijl\nu}\omega_{l\nu} + z a_{ij\mu\nu}\tau_{\mu\nu}$$

(4.2) $$\omega_{11} = \frac{1}{A_1}\,\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\,\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\,v_2 + K_2 w, \quad \omega_{31} = \frac{1}{A_1}\,\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{1}{2}\left[\frac{A_1}{A_2}\,\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{v_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\,\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{v_2}{A_2}\right)\right]$$

(4.3) $$\tau_{11} = -\frac{1}{A_1}\,\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\,\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right) - \frac{1}{A_1A_2^2}\,\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\,\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = -\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1}\,\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\,\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2}\,\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\,\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}\right)$$

Подставив (3.15), (4.1) во вторые уравнения (2.8) и условия (2.9) при $m = 1$, получим

(4.4) $$\mathbf{D}_{il}u_l^{(2)} = -A_{in\nu}\omega_{n\nu} - (a_{i3\mu\nu} + zA_{i\mu\nu})\,\tau_{\mu\nu}$$

$$(\mathbf{L}_{ijl}u_l^{(2)} + a_{ijn\nu}\omega_{n\nu} + z a_{ij\mu\nu}\tau_{\mu\nu})\,N_j^{\pm} = 0 \quad (z = z^{\pm})$$

Периодическое по ξ_1, ξ_2 решение задачи (4.4) представим в виде

(4.5) $$u_l^{(2)} = U_l^{n\nu}\omega_{n\nu}\,(\alpha) + V_l^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}\,(\alpha)$$

где $U_l^{n\nu}\,(\xi, z)$ — решение локальной задачи (3.8), а $V_l^{\mu\nu}\,(\xi, z)$ — периодические по ξ_1, ξ_2 решения задачи

(4.6) $$\mathbf{D}_{il}V_l^{\mu\nu} = -a_{i3\mu\nu} - zA_{i\mu\nu}$$

$$c_{ij}^{\mu\nu}N_j^{\pm} = 0 \quad (z = z^{\pm}); \quad c_{ij}^{\mu\nu} = \mathbf{L}_{ijl}V_l^{\mu\nu} + z a_{ij\mu\nu}$$

Отметим, что в (3.8), (4.6) входят функции $A_1\,(\alpha)$ и $A_2\,(\alpha)$, и следовательно, входят в качестве параметров переменные α_1 и α_2. Пользуясь соотношениями (4.5), из (4.1) получим

(4.7) $$\sigma_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + c_{ij}^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu}$$

Следуя (3.12), усредним уравнения (3.8) и (4.6), предварительно умноженные на z и z^2. Пользуясь периодичностью по y_1, y_2, получим

(4.8) $$\langle b_{3j}^{\mu\nu}\rangle = \langle z b_{3j}^{\mu\nu}\rangle = \langle c_{3j}^{\mu\nu}\rangle = \langle z c_{3j}^{\mu\nu}\rangle = 0$$

Из (4.7) с учетом (4.8) найдем

(4.9) $$\langle \sigma_{3j}^{(1)}\rangle = 0, \quad \langle z\sigma_{3j}^{(1)}\rangle = 0$$

5. Усредним последние два уравнения (2.8). Пользуясь периодичностью по y_ν, условиями (2.10), (2.11) и соотношениями (2.12), (3.15), (4.9), получим

(5.1) $$\mathbf{B}_\nu\,\langle \sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle + r_\nu + \langle f_\nu\rangle = 0$$

(5.2) $$\mathbf{B}_\nu\,\langle \sigma_{\beta\delta}^{(2)}\rangle = 0$$

(5.3) $$\mathbf{B}_3\,\langle \sigma_{3\mu}^{(2)}\rangle + \mathbf{K}_3\,\langle \sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle + q_3 + \langle g_3\rangle = 0$$

$$r_\nu(\alpha) = \frac{1}{V}\int_0^1\!\!\int_0^1 (\omega^+ r_\nu^+ + \omega^- r_\nu^-)\,dy_1\,dy_2, \quad q_3(\alpha) = \frac{1}{V}\int_0^1\!\!\int_0^1 (\omega^+ q_3^+ + \omega^- q_3^-)\,dy_1\,dy_2$$

Усредним третьи уравнения (2.8) при $i = 1, 2$, предварительно умноженные на z

(5.4) $$\mathbf{B}_\mu \langle z\sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle - \langle \sigma_{3\mu}^{(2)}\rangle + \rho_\mu + \langle z f_\mu\rangle = 0$$

$$\rho_\mu(\alpha) = \frac{1}{V}\int_0^1\int_0^1 (z^+\omega^+ r_\mu^+ + z^-\omega^- r_\mu^-)\, dy_1\, dy_2$$

Пользуясь (5.4), исключим из уравнения (5.3) члены $\langle \sigma_{3\mu}^{(2)}\rangle$

(5.5) $$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}(\mathbf{B}_\mu \langle z\sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle + \rho_\mu + \langle z f_\mu\rangle) - K_2\langle \sigma_{11}^{(1)}\rangle -$$
$$- K_1\langle \sigma_{22}^{(1)}\rangle + q_3 + \langle g_3\rangle = 0$$

В уравнения (5.1), (5.5) входят только $\langle \sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle$ и $\langle z\sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle$, для которых получим усредняя (4.7)

(5.6) $$\langle \sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle = \langle b_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle\, \omega_{\mu\nu} + \langle c_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle\, \tau_{\mu\nu}$$
$$\langle z\sigma_{\beta\delta}^{(1)}\rangle = \langle z b_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle\, \omega_{\mu\nu} + \langle z c_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle \tau_{\mu\nu}$$

Отметим, что в силу (4.2), (4.3) в соотношения (5.6) входят через $\omega_{\mu\nu}$, $\tau_{\mu\nu}$ только три функции: $w(\alpha)$, $v_1(\alpha)$, $v_2(\alpha)$.

Подставляя (5.6) в уравнения (5.1), (5.5), получим систему трех разрешающих уравнений относительно функций $w(\alpha)$, $v_1(\alpha)$, $v_2(\alpha)$, которые определяют по формулам (3.14) и (4.7) главные члены вектора перемещений и тензора напряжений.

Коэффициенты $\langle b_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle$, $\langle z b_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle$, $\langle c_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle$ и $\langle z c_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle$ представляют собой эффективные модули жесткости усредненной оболочки, которые определяются из решения локальных задач (3.8) и (4.6). Отметим, что в эти задачи через координаты ξ_1, ξ_2 входят функции $A_1(\alpha)$ и $A_2(\alpha)$. Следовательно, если эти функции не являются постоянными, то эффективные модули зависят от координат α_1, α_2. Это означает, что даже в случае первоначально однородного материала в результате усреднения может возникнуть «конструктивная» неоднородность.

6. Установим связь построенной модели с теорией тонких оболочек. Пользуясь принятыми в [6, 7] обозначениями для усилий, моментов и перерезывающих сил, учитывая (3.15), (4.9), получим

(6.1) $$T_\beta = \varepsilon^2\langle \sigma_{\beta\beta}^{(1)}\rangle + \ldots,\ S = \varepsilon^2\langle \sigma_{12}^{(1)}\rangle + \ldots,$$
$$M_\beta = \varepsilon^3\langle z\sigma_{\beta\beta}^{(1)}\rangle + \ldots$$
$$H = \varepsilon^3\langle z\sigma_{12}^{(1)}\rangle + \ldots,\ N_\mu = \varepsilon^3\langle \sigma_{3\mu}^{(2)}\rangle + \ldots$$

Для вывода соотношений упругости решим локальные задачи (3.8) и (4.6). При рассмотрении «гладкой» однородной оболочки: $F^\pm \equiv 0$, $a_{ijln} = \mathrm{const}$, зависимость от y_1, y_2 отсутствует и локальные задачи решаются точно. Например, в изотропном случае ненулевые решения (3.8) при $(n = 1{,}2)$ и (4.6) имеют вид

(6.2) $$U_3^{11} = U_3^{22} = -\frac{\nu}{1-\nu}z,\quad V_3^{11} = V_3^{22} = -\frac{\nu}{2(1-\nu)}z^2$$

Пользуясь (6.2), получим

(6.3) $$\langle b_{11}^{11}\rangle = \langle b_{22}^{22}\rangle = \frac{E}{1-\nu^2},\quad \langle b_{11}^{22}\rangle = \langle b_{22}^{11}\rangle = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$$
$$\langle b_{12}^{12}\rangle = \langle b_{12}^{21}\rangle = \frac{E}{2(1+\nu)},\quad \langle z b_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle = 0$$
$$\langle c_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle = 0,\quad \langle z c_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle = \frac{1}{12}\langle b_{\beta\delta}^{\mu\nu}\rangle$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Подставив (6.3) в (5.6), найдем

$$\langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle = \frac{E}{1-\nu^2}(\omega_{11} + \nu\omega_{22}), \tag{6.4}$$

$$\langle z\sigma_{11}^{(1)} \rangle = \frac{E}{12(1-\nu^2)}(\tau_{11} + \nu\tau_{22}) \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\langle \sigma_{12}^{(1)} \rangle = \frac{E}{2(1+\nu)} 2\omega_{12}, \; \langle z\sigma_{12}^{(1)} \rangle = \frac{E}{12(1+\nu)} \tau_{12}$$

Сравнивая соотношения (3.14), (4.2), (4.3) с соответствующими формулами теории оболочек [7], получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon\,\omega_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon\,\omega_{22}, \quad \omega = \varepsilon 2\omega_{12} \tag{6.5}$$

$$\varkappa_1 = \tau_{11}, \; \varkappa_2 = \tau_{22}, \; \tau = \tau_{12}$$

Здесь ε_1, ε_2, ω — относительные удлинения и сдвиг срединной поверхности; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ характеризуют изгиб и кручение срединной поверхности, связанные с перемещениями w, отклоняющими точки срединной поверхности по нормали к ней.

Подставляя (6.4), (6.5) в (6.1), получим формулы, связывающие усилия и моменты с деформациями срединной поверхности. Они совпадают с принятыми в теории оболочек [7]. Подстановка (6.4) в (5.1), (5.5) с учетом (6.5), (4.2), (4.3) приводит к системе уравнений, принятой в теории оболочек в рамках модели Муштари—Донелла—Власова [7].

7. Рассмотрим два практически важных частных случая построенной модели.

Цилиндрический слой произвольной формы. В системе координат α_1, α_2, где α_1 — расстояние, отсчитываемое вдоль образующей, а α_2 — вдоль направляющей цилиндрической срединной поверхности, имеем [6, 7]

$$A_1 = A_2 = 1, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1/r(\alpha_2) \tag{7.1}$$

В случае кругового цилиндра $r(\alpha_2) = \text{const}$.

Обозначим $R(\alpha_2) = \varepsilon r(\alpha_2)$, тогда в силу (2.2)

$$K_1 = 1/R(\alpha_2), \; K_2 = 0$$

Из (4.2), (4.3) получим

$$\omega_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1}, \quad \omega_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R(\alpha_2)} \tag{7.2}$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1}\right), \quad \tau_{\mu\nu} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha_\nu}$$

Уравнения (5.1), (5.5) запишутся в виде

$$\frac{\partial \langle \sigma_{\nu\delta}^{(1)} \rangle}{\partial \alpha_\delta} + r_\nu + \langle f_\nu \rangle = 0 \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial^2 \langle z\sigma_{\mu\delta}^{(1)} \rangle}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha} - \frac{\langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle}{R} + \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu}(\rho_\mu + \langle z f_\mu \rangle) + q_3 + \langle g_3 \rangle = 0$$

Усредненные напряжения и моменты выражаются через деформации срединной поверхности (7.2) при помощи соотношений упругости (5.6). Поскольку в рассматриваемом случае A_1, A_2 постоянны, функции $b_{\beta\delta}^{\mu\nu}$ и $c_{\beta\delta}^{\mu\nu}$ могут зависеть только от координат y_1, y_2, z, поэтому все эффективные модули, входящие в соотношения упругости, постоянны. Конкретные их значения зависят от вида функций $a_{ijln}(y_1, y_2, z)$ и $F^{\pm}(y_1, y_2)$ и определяются из решений локальных задач (3.8), (4.6).

Плоский слой. Пусть α_1, α_2, γ — декартовы координаты; $A_1 = A_2 = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. Основные формулы получатся из (7.2), (7.3) при $R = \infty$. Соотношения упругости (5.6) можно записать в виде

$$\langle \sigma_{\nu\delta}^{(1)} \rangle = \langle b_{\nu\delta}^{\beta\mu} \rangle \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha_\mu} - \langle c_{\nu\delta}^{\beta\mu} \rangle \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_\beta \partial \alpha_\mu} \tag{7.4}$$

$$\langle z\sigma_{\mu\delta}^{(1)}\rangle = \langle zb_{\mu\delta}^{\beta\nu}\rangle \frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha_\nu} - \langle zc_{\mu\delta}^{\beta\nu}\rangle \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_\beta\partial\alpha_\nu}$$

Поскольку, как и в цилиндрическом случае, все эффективные модули постоянны, подставляя (7.4) в уравнения (7.3) (при $R = \infty$), получим

$$\langle b_{\nu\delta}^{\beta\mu}\rangle \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial\alpha_\delta\partial\alpha_\mu} - \langle c_{\nu\delta}^{\beta\mu}\rangle \frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_\delta\partial\alpha_\beta\partial\alpha_\mu} + r_\nu + \langle f_\nu\rangle = 0 \tag{7.5}$$

$$\langle zb_{\mu\delta}^{\beta\nu}\rangle \frac{\partial^3 v_\beta}{\partial\alpha_\mu\partial\alpha_\delta\partial\alpha_\nu} - \langle zc_{\mu\delta}^{\beta\nu}\rangle \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha_\mu\partial\alpha_\delta\partial\alpha_\beta\partial\alpha_\nu} + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}(\rho_\mu + \langle zf_\mu\rangle) + q_3 + \langle g_3\rangle = 0$$

В предельном случае «гладкой» изотропной пластины эффективные модули определяются по формулам (6.3) и из (7.5) получаются известные уравнения теории пластин.

Отметим, что, несмотря на то, что локальные задачи (3.8), (4.6) описываются дифференциальными уравнениями, они могут быть решены и в практически важном случае кусочно-постоянных функций $a_{ijln}(y_1, y_2, z)$, моделирующих волокнистый материал или композит, составленный из периодической системы зерен и материала, заполняющего пространство между ними. В этом случае к локальным задачам необходимо добавить следующие условия непрерывности на поверхности зерен [1, 2]:

$$[U_l^{\mu\nu}] = 0,\ [\lambda^{-1}b_{l\delta}^{\mu\nu}n_\delta + b_{l3}^{\mu\nu}n_3] = 0 \tag{7.6}$$
$$[V_l^{\mu\nu}] = 0,\ [\lambda^{-1}c_{l\delta}^{\mu\nu}n_\delta + c_{l3}^{\mu\nu}n_3] = 0$$

Здесь n_i — компоненты вектора нормали к поверхности контакта, причем в уравнениях (3.8), (4.6) имеем $A_{i\mu\nu} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. *Caillerie D.* Plaques élastiques minces à structure périodique de période et d'épaisseur comparables.— C. r. Acad. sci. Ser. II, 1982, v. 294, No. 3, p. 159—162.
4. *Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
5. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
6. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
7. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.

Москва

Поступила в редакцию 3.III.1986