Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 539.3 : 534.1

УСРЕДНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА И КОЛЕБАНИЙ НАПРЯЖЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК

Колпаков А. Г.

Излагается метод усредненного описания изгиба и колебаний высоконеоднородных пластинок, нагруженных в их плоскости. Задача, возникающая в различных областях техники [1], отличается от рассмотренных в [2—4] отсутствием априорной знакоопределенности операторов.

1. Изгиб неоднородной напряженной пластинки. Рассмотрим пластинку, имеющую неоднородные толщину или упругие постоянные (оребренную или композиционную). Пусть к пластинке приложены усилия, создающие в ее плоскости напряженное состояние $\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathrm{x})$ (параметр ε будет характеризовать размер неоднородностей). Уравнение равновесия в рамках гипотез Кирхгофа—Лява записывается в виде ($w^\varepsilon(\mathrm{x})$ — нормальный прогиб пластинки) [1, 5]

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad -L_\varepsilon w^\varepsilon + M_\varepsilon w^\varepsilon \equiv {} & [D^\varepsilon(w^\varepsilon_{,11} + \nu^\varepsilon w^\varepsilon_{,22})]_{,11} + 2\,[D^\varepsilon(1-\nu^\varepsilon)\, w^\varepsilon_{,12}]_{,12} + \\
& + [D^\varepsilon(w^\varepsilon_{,22} + \nu^\varepsilon w^\varepsilon_{,11})]_{,22} - [\sigma_{11}^\varepsilon w^\varepsilon_{,1}]_{,1} - [\sigma_{12}^\varepsilon w^\varepsilon]_{,2} - [\sigma_{21}^\varepsilon w^\varepsilon_{,2}]_{,1} - \\
& - [\sigma_{22}^\varepsilon w^\varepsilon_{,2}]_{,2} = f(\mathrm{x})
\end{aligned}
$$

Изгибная жесткость $D^\varepsilon(\mathrm{x})$ и коэффициент Пуассона $\nu^\varepsilon(\mathrm{x})$ (рассматриваются локально-изотропные пластинки) зависят от пространственной переменной $\mathrm{x} \in Q$; $Q \subset R^2$ — ограниченная область, занятая пластинкой. Выберем зависимость D^ε, ν^ε от x в виде [2, 6, 7] $D^\varepsilon(\mathrm{x}) = D(\mathrm{x}/\varepsilon)$, $\nu^\varepsilon(\mathrm{x}) = \nu(\mathrm{x}/\varepsilon)$, где функции $D(\mathrm{y})$, $\nu(\mathrm{y})$ имеют характерный размер осцилляции, равный единице. Напряжения $\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathrm{x})$ в плоскости пластинки также являются зависящими от x функциями с характерным размером осцилляции, равным характерному размеру неоднородностей ε. При $\varepsilon \ll 1$, т. е. в случае высоконеоднородных пластинок, для описания изгиба и потери устойчивости пластинок применяется [2—4, 8] асимптотический метод гомогенизации [6, 7].

Проведем асимптотическое, при $\varepsilon \to 0$, исследование задачи (1.1) при условии жесткого защемления краев пластинки (последнее, как известно [1, 2], равносильно рассмотрению (1.1) на функциональном пространстве $H_0^2(Q)$ [9, 10]). Рассмотрим задачу в абстрактной постановке. Пусть заданы последовательности линейных, самосопряженных, равномерно по $\varepsilon \to 0$ ограниченных операторов

$$
(1.2)\qquad L_\varepsilon, L : H_0^2(Q) \to H^{-2}(Q); \quad M_\varepsilon, M : H_0^k(Q) \to H^{-k}(Q), \quad 0 \leqslant k < 2
$$

(определение пространств вида $H^\alpha(Q)$ см., например, в [9, 10]). Операторы $-L_\varepsilon$ есть сумма первых трех слагаемых в левой части (1.1), операторы $-M_\varepsilon$ — сумма остальных слагаемых в левой части (1.1), описывающих влияние напряжений в плоскости пластинки на ее нормальный прогиб. Пусть операторы L_ε и L положительно определены: существует $c > 0$, не зависящее от $\varepsilon \to 0$, такое, что $\langle L_\varepsilon u, u\rangle_2 \geqslant c\,\|u\|_2^2$ для любого $u \in H_0^2(Q)$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle_k$, $\|\cdot\|_k$ — операция спаривания и норма в $H_0^k(Q)$ [9]).

Указанное условие выполнено, если существует $c_1 > 0$, не зависящее от $\varepsilon \to 0$, такое, что $c_1 \leqslant D^\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1/c_1$, $c_1 \leqslant 1 - \nu^\varepsilon(\mathbf{x})$ (например, если материальные характеристики и толщины пластинки лежат в некотором не зависящем от $\varepsilon \to 0$ интервале). Отметим, что под ε может пониматься как непрерывный, так и дискретный параметр (например, $\varepsilon = 1/n$, $n \in N$).

Определение 1 [11]. Последовательность операторов A_ε: $H_0^m(Q) \to H^{-m}(Q)$ G-сходится к оператору A: $H_0^m(Q) \to H^{-m}(Q)$, если для любого $v^* \in H^{-m}(Q)$ $A_\varepsilon^{-1}v^* \to A^{-1}v^*$ слабо в $H_0^m(Q)$ при $\varepsilon \to 0$.

Определение 2 [12]. Последовательность операторов A_ε: $H_0^m(Q) \to H^{-m}(Q)$ сильно сходится в $H^{-m}(Q)$ к оператору A: $H_0^m(Q) \to H^{-m}(Q)$, если для любого $u \in H_0^m(Q)$ $A_\varepsilon u \to Au$ в $H^{-m}(Q)$ при $\varepsilon \to 0$.

Предложение 1. Пусть последовательность операторов L_ε (1.2) G-сходится к оператору L, а последовательность операторов M_ε (1.2) сильно сходится в $H^{-k}(Q)$ к оператору M. Рассмотрим задачу

$$-Lw + Mw = f \tag{1.3}$$

При условии, что $\lambda = 1$ не является собственным числом задачи $Lw = \lambda Mw$ (*условие* A), последовательность решений задачи (1.1) $w^\varepsilon \to w$ слабо в $H_0^2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$, где w — решение задачи (1.3).

Доказательству предложения предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. Если последовательности операторов L_ε, M_ε сходятся к операторам L, M в смысле , указанном в предложении 1, то при выполнении условия А существует число $c_2 > 0$, не зависящее от $\varepsilon \to 0$, такое, что

$$\operatorname{dist}(\{1\}, \mathrm{Sp}_\varepsilon) \equiv \inf_{x \in \mathrm{Sp}_\varepsilon} |1 - x| \geqslant c_2 \tag{1.4}$$

где Sp_ε — спектр задачи $L_\varepsilon w = \lambda M_\varepsilon w$.

Доказательство. 1°. Покажем, что из G-сходимости последовательности операторов L_ε: $H_0^2(Q) \to H^{-2}(Q)$ к оператору L следует, что

$$\| L_\varepsilon^{-1} - L^{-1} \|_{-l,l} = o(1), \quad 0 \leqslant l < 2 \tag{1.5}$$

(Для операторов $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ означает $\|\cdot\|_{H^\alpha \to H^\beta}$.)

Операторы L_ε^{-1}, L^{-1}: $H^{-2}(Q) \to H_0^2(Q)$ существуют в силу наложенных на L_ε, L условий и, следовательно, они определены как операторы из $H^{-l}(Q) \subset H^{-2}(Q)$ в $H_0^l(Q) \supset H_0^2(Q)$. Если соотношение (1.5) не выполнено, то найдутся $\delta > 0$ и $\{u_\varepsilon^*\} \subset H^{-l}(Q)$, такие, что $\| u_\varepsilon^* \|_{-l} = 1$ и

$$\| L_\varepsilon^{-1} u_\varepsilon^* - L^{-1} u_\varepsilon^* \|_l \geqslant \delta \tag{1.6}$$

Поскольку $\| u_\varepsilon^* \|_{-2} \leqslant \| u_\varepsilon^* \|_{-l} \leqslant 1$ и вложение $H^{-l}(Q)$ в $H^2(Q)$ компактно ([10], с. 123), то найдется подпоследовательность $\{u_\eta^*\} \subset \{u_\varepsilon^*\}$, такая, что $u_\eta^* \to u^*$ в $H^{-2}(Q)$ при $\eta \to 0$. Далее, для любого $u^* \in H^{-2}(Q)$ последовательность $\| L_\varepsilon^{-1} u^* \|_l \to \| L^{-1} u^* \|_l < \infty$ в силу определения 1. Тогда в силу теоремы о равномерной ограниченности ([9], с. 269) последовательность $\| L_\varepsilon^{-1} \|_{-2,l}$ ограничена равномерно по $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \| L_\eta^{-1} u_\eta^* - L^{-1} u_\eta^* \|_l \leqslant \| L_\eta^{-1} \|_{-2,l} \| u_\eta^* - u^* \|_{-2} + \\ + \| L^{-1} \|_{-2,l} \| u_\eta^* - u^* \|_{-2} + \| L_\eta^{-1} u^* - L^{-1} u^* \|_l \end{aligned} \tag{1.7}$$

Выражение в правой части (1.7) при $\eta \to 0$ стремится к нулю (следует использовать определение 1), что дает противоречие с (1.6) и доказывает (1.5).

2°. Покажем, что из сильной сходимости последовательности операторов M_ε к M в $H^{-k}(Q)$ следует, что при $l > k$

$$\| M_\varepsilon - M \|_{l,-l} = o(1) \tag{1.8}$$

Доказательство может быть выполнено методами, аналогичными использованным в п. 1°. Именно, если (1.8) не выполняется, то найдутся число $\delta > 0$ и последовательности $\{u_\varepsilon\}$, $\{v_\varepsilon\} \subset H_0^l(Q)$: $\| u_\varepsilon \|_l$, $\| v_\varepsilon \|_l = 1$, такие, что $| \langle M_\varepsilon u_\varepsilon - M u_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle_l | \geqslant \delta$.

Пользуясь компактностью вложения пространства $H^{\alpha}(Q)$ в $H^{\beta}(Q)$ при $\infty > \alpha > \beta > -\infty$ [10] и равномерной по $\varepsilon \to 0$ ограниченностью величин $\| M_\varepsilon \|_{k,-l}$ [9] (см. п. 1°), можно выделить подпоследовательности $\{u_\eta\}, \{v_\eta\}$, такие, что $| \langle M_\eta u_\eta - Mu_\eta, v_\eta \rangle_l | \to 0$ при $\eta \to 0$. Это дает противоречие и доказывает (1.8).

3°. Перепишем задачу $L_\varepsilon w = \lambda M_\varepsilon w$ в равносильном виде

$$w = \lambda L_\varepsilon^{-1} M_\varepsilon w \tag{1.9}$$

Отметим, что оператор $L_\varepsilon^{-1} M_\varepsilon$: $H_0{}^l(Q) \to H_0{}^l(Q)$, $2 > l > k$ самосопряжен и в силу ограниченности оператора L_ε^{-1}: $H^{-2}(Q) \to H_0{}^2(Q)$ компактен [9]. В силу (1.5), (1.8) и равномерной по $\varepsilon \to 0$ ограниченности величин $\| L_\varepsilon^{-1} \|_{-l,\,l}$, $\| M_\varepsilon \|_{l,\,-l}$ получаем, что

$$\| L_\varepsilon^{-1} M_\varepsilon - L^{-1} M \|_{l,\,l} = o(1) \tag{1.10}$$

Из (1.10) в силу [12, с. 365] следует, что

$$\sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}} \mathrm{dist}\,(\lambda, \mathrm{Sp}_\varepsilon) = o(1), \quad \sup_{\lambda_\varepsilon \in \mathrm{Sp}_\varepsilon} \mathrm{dist}\,(\lambda_\varepsilon, \mathrm{Sp}) = o(1) \tag{1.11}$$

4°. Пусть соотношение (1.4) не выполнено. Тогда найдется подпоследовательность $\{\lambda_\eta\colon \lambda_\eta \in \mathrm{Sp}_\eta\}$, такая, что $\lambda_\eta \to 1$ при $\eta \to 0$. В силу (1.11) существует подпоследовательность $\{\lambda^\eta\colon \lambda^\eta \in \mathrm{Sp}\}$ (Sp_ε, Sp — спектры задач $L_\varepsilon w = \lambda M_\varepsilon w$ и $Lw = \lambda M w$ соответственно), такая, что $| \lambda_\eta - \lambda^\eta | \to 0$ при $\eta \to 0$. Таким образом, $\lambda^\eta \to 1$ при $\eta \to 0$, $\{\lambda^\eta\} \subset \mathrm{Sp}$. Но точка $\lambda = 1$ не является предельной точкой множества Sp — спектра компактного оператора $L^{-1}M$ [9]. Тогда $\lambda^\eta \to 1$ при $\eta \to 0$ может иметь место только в случае, если $\lambda^\eta = 1$, начиная с некоторого номера. Но $\lambda = 1$ не входит в спектр Sp оператора $L^{-1}M$ в силу условия А. Получаемое противоречие доказывает (1.4).

Лемма 2. При выполнении условий предложения 1 последовательность решений $\{w^\varepsilon\}$ задачи (1.1) ограничена в $H_0{}^2(Q)$ равномерно по $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Перепишем (1.1) в равносильном виде

$$w^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} M_\varepsilon w^\varepsilon - L_\varepsilon^{-1} f \tag{1.12}$$

и рассмотрим (1.12) на пространстве $H_0{}^l(Q)$, $2 > l > k$. Очевидно, решение (1.12), принадлежащее пространству $H_0{}^l(Q)$, принадлежит также $H_0{}^2(Q)$ и является решением задачи (1.1). Для оператора $L_\varepsilon^{-1} M_\varepsilon$ в силу (1.4) выполнена очевидная оценка (см., например, [12])

$$\| (E - L_\varepsilon^{-1} M_\varepsilon)^{-1} \|_{l,\,l} \leqslant 1/c_2$$

в силу которой $\| w^\varepsilon \|_l \leqslant \| L_\varepsilon^{-1} \|_{-l,\,l} \| f \|_{-l} / c_2 \leqslant c_6$, где $c_6 < \infty$ не зависит от $\varepsilon \to 0$.

В силу равномерной по $\varepsilon \to 0$ положительной определенности операторов L_ε операторы L_ε^{-1}: $H^{-2}(Q) \to H_0{}^2(Q)$ ограничены равномерно по $\varepsilon \to 0$. Операторы M_ε: $H_0{}^k(Q) \to H^{-k}(Q)$ ограничены равномерно по $\varepsilon \to 0$ по условию. Отсюда получаем, что $\| w^\varepsilon \|_2 \leqslant c_7 (\| w^\varepsilon \|_l + 1) \leqslant c_8$, где $c_8 < \infty$ не зависит от $\varepsilon \to 0$.

Доказательство предложения 1. Последовательность $\{w^\varepsilon\}$ в силу леммы 2 слабо компактна в $H_0{}^2(Q)$ [9]. Тогда найдется подпоследовательность $\{w^\eta\} \in \{w^\varepsilon\}$ такая, что $w^\eta \to w$ слабо в $H_0{}^2(Q)$, сильно в $H_0{}^l(Q)$, $l < 2$ при $\eta \to 0$. В силу (1.10) $L_\eta^{-1} M_\eta w^\eta \to L^{-1} M w$ в $H_0{}^l(Q)$ при $\eta \to 0$. Отсюда с учетом того, что $L_\eta^{-1} f \to L^{-1} f$ в $H_0{}^l(Q)$, $l < 2$, при $\eta \to 0$ (в силу G-сходимости последовательности операторов L_ε к оператору L) получаем, что $w \in H_0{}^2(Q)$ и является решением задачи (1.3). Это решение единственно в силу условия А. Тогда $w^\varepsilon \to w$ слабо в $H_0{}^2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$, где w — решение задачи (1.3).

Следствие. При выполнении условий предложения 1 $w^\varepsilon \to w$ в $C(Q)$ при $\varepsilon \to 0$.

Для доказательства достаточно воспользоваться предложением 1 и соответствующей теоремой вложения (см., например, [9]).

Вычисление G-предельного оператора L, являющегося вновь оператором изгиба пластинки (но уже однородной и, вообще говоря, ортотропной), может быть проведено методами [2, 6, 7]. Оператор M, описывающий напряженное состояние в плоскости усредненной пластинки, может быть построен следующим образом. Пусть напряжения $\sigma_{ij}^{\varepsilon}(\mathrm{x})$ определяются из решения задачи теории упругости неоднородного плоского тела [13], обладающего упругими постоянными $E^{\varepsilon}(\mathrm{x})$, $\nu^{\varepsilon}(\mathrm{x})$, удовлетворяющими условиям: $c_9 \leqslant E^{\varepsilon}(\mathrm{x}) \leqslant 1/c_9$, $-1/2 + c_9 \leqslant \nu^{\varepsilon}(\mathrm{x}) \leqslant 1 - c_9$, где $c_9 > 0$ не зависит от $\varepsilon \to 0$. Тогда, как следует из [11, 14] в случае первой краевой задачи $\sigma_{ij}^{\varepsilon}(\mathrm{x}) \to \sigma_{ij}(\mathrm{x})$ слабо в $L_2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$, где $\sigma_{ij}(\mathrm{x})$ — напряжения, определяемые из решения G-предельной задачи плоской теории упругости. Методика построения указанной G-предельной задачи изложена в [6, 7, 14, 15].

Предложение 2. Если напряжения $\sigma_{ij}^{\varepsilon}(\mathrm{x})$ в плоскости пластинки определяются из решения плоской задачи теории упругости неоднородного тела, то сформулированные в (1.2) и в предложении 1 условия на последовательность операторов M_{ε} выполнены, если положить $2 > k \geqslant 1,5$. При этом

$$M = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\mathrm{x})\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Доказательство, основывающееся на слабой сходимости $\sigma_{ij}^{\varepsilon}(\mathrm{x})$ к $\sigma_{ij}(\mathrm{x})$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon \to 0$, приведено в [3].

Замечание 1. Выше задача (1.1) рассматривалась на пространстве $H_0^2(Q)$, т. е. при условии жесткого защемления краев пластинки. Результаты сохраняются в случае шарнирного, свободного опирания краев пластинки и их комбинаций [3]. То же относится к задаче теории упругости, определяющей напряжения $\sigma_{ij}^{\varepsilon}(\mathrm{x})$ в плоскости пластинки ([3], предложение 5).

2. Собственные колебания неоднородной напряженной пластинки. Задача определения собственных частот ω_k^{ε} и собственных форм $w_k^{\varepsilon}(\mathrm{x})$ колебаний пластинки имеет вид [1, 5, 13]

$$-L_{\varepsilon}w_k^{\varepsilon} + M_{\varepsilon}w_k^{\varepsilon} = \omega_k^{\varepsilon}\rho^{\varepsilon}(\mathrm{x})w_k^{\varepsilon} \tag{2.1}$$

где $0 < c_{10} \leqslant \rho^{\varepsilon}(\mathrm{x}) \leqslant 1/c_{10}$ (c_{10} не зависит от $\varepsilon \to 0$) — удельная масса пластинки. Операторы L_{ε}, M_{ε} определены выше. Рассмотрим задачу на пространстве функций $H_0^2(Q)$ (замечание 1 остается в силе). Определим оператор

$$N_{\varepsilon}: u \in H_0^l(Q) \to \rho^{\varepsilon}(\mathrm{x})u \in L_2(Q) \subset H^{-l}(Q)$$

Оператор N_{ε} равномерно по $\varepsilon \to 0$ ограничен как оператор из $H_0^l(Q)$, $l \geqslant 0$ в $L_2(Q)$. Запишем задачу (2.1) в виде

$$w_k^{\varepsilon} = \omega_k^{\varepsilon}(-L_{\varepsilon} + M_{\varepsilon})^{-1}N_{\varepsilon}w_k^{\varepsilon} \tag{2.2}$$

Лемма 3. При выполнении условия А последовательность операторов $-L_{\varepsilon} + M_{\varepsilon}: H_0^2(Q) \to H^{-2}(Q)$ G-сходится при $\varepsilon \to 0$ к оператору $-L + M: H_0^2(Q) \to H^{-2}(Q)$.

Доказательство следует из предложения 1 и определения 1.

Пусть последовательность функций $\rho^{\varepsilon}(\mathrm{x}) \in L_{\infty}(Q)$ обладает средним в том смысле, что существует функция $\langle\rho\rangle(\mathrm{x}) \in L_{\infty}(Q)$, такая, что $\int_Q (\rho^{\varepsilon}(\mathrm{x}) - \langle\rho\rangle(\mathrm{x}))u(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любой $u \in L_2(Q)$. Оператор N определим аналогично оператору N_{ε} с заменой $\rho^{\varepsilon}(\mathrm{x})$ на $\langle\rho\rangle(\mathrm{x})$.

Лемма 4. Для $l > 0$

$$\| N_{\varepsilon} - N \|_{l,-l} = o(1) \tag{2.3}$$

Доказательство. Заметим, что последовательность операторов N_ε: $H_0^l(Q) \to H^{-l}(Q)$ в силу слабой сходимости последовательности функций $\rho^\varepsilon(\mathbf{x})$ к $\langle\rho\rangle(\mathbf{x})$ в $L_2(Q)$, сходится к оператору N сильно в $H^{-l}(Q)$ для любого $l > 0$ [3]. После этого требуемое следует из п. 2 леммы 1.

Рассмотрим задачу (2.2) при $2 > l > k \geqslant 1{,}5$, когда справедливы предложения 1, 2.

Лемма 5. Для $2 > l > k \geqslant 1{,}5$ при выполнении условия А имеем

$$\| (-L_\varepsilon + M_\varepsilon)^{-1} N_\varepsilon - (-L + M)^{-1} N \|_{l,l} = o(1) \tag{2.4}$$

Доказательство проводится методами, использованными при доказательстве леммы 1. При доказательстве используется лемма 4.

Предложение 3. При выполнении условия А имеет место следующая асимптотика собственных частот $\{\omega_k^\varepsilon\} = \Omega_\varepsilon$ колебаний пластинки

$$\sup_{\omega^\varepsilon \in \Omega_\varepsilon} \operatorname{dist}(\omega^\varepsilon, \Omega) = o(1), \quad \sup_{\omega \in \Omega} \operatorname{dist}(\omega, \Omega_\varepsilon) = o(1)$$

где $\{\omega_k\} = \Omega$ — собственные частоты, определяемые из решения задачи (описывающей собственные колебания некоторой однородной пластинки)

$$-Lw_k + Mw_k = \omega_k \langle\rho\rangle(\mathbf{x}) w_k \tag{2.5}$$

Доказательство, с учетом (2.4), следует непосредственно из [12, с. 365]. При этом надо иметь в виду, что операторы $(-L_\varepsilon + M_\varepsilon)^{-1} N_\varepsilon$ и $(-L + M)^{-1} N$ компактные и самосопряженные.

Замечание 2. Все полученные выше результаты переносятся на случай изгиба и колебания неоднородных балок ($Q = [a, b]$).

Пример. Проиллюстрируем применение полученных результатов на примере задачи о колебании неоднородной балки (см. замечание 2). В этом случае

$$L_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2}\left(D^\varepsilon(x)\frac{d^2}{dx^2}\right), \quad M_\varepsilon = \frac{d}{dx}\left(\sigma \frac{d}{dx}\right) \tag{2.6}$$

Усилие σ вдоль оси балки равно $(A - B)/[(a - b)\langle 1/E^\varepsilon\rangle]$, где A, B — перемещения концов балки с координатами a, b.

Замечание 3. В рассматриваемом случае G-предел последовательности операторов L_ε существует, если функция $1/D^\varepsilon(x)$ имеет слабый предел в $L_2([a, b])$ при $\varepsilon \to 0$ (возможно, с вероятностью единица) [16].

Обозначим $D = 1/\langle 1/D^\varepsilon\rangle$, где $\langle\cdot\rangle$ — операция взятия слабого предела в $L_2([a, b])$. Рассмотрим для простоты случай, когда D не зависит от x (что имеет место, если $D^\varepsilon(x)$ — периодическая функция). Тогда [16] $L = -Dd^4/dx^4$. Задача (2.5) принимает в данном случае вид

$$D\frac{d^4 w_k}{dx^4} - \sigma\frac{d^2 w_k}{dx^2} = \omega_k \langle\rho\rangle w_k$$

Пусть балка выполнена из однородного материала, но имеет переменную площадь поперечного сечения (оребренная балка или балка с вырезами [1]). В случае оребренной балки $D = E_0\langle h_\varepsilon^{-3}\rangle^{-1}/(12(1 - \nu^2))$, $\langle 1/E^\varepsilon\rangle = (1/E_0)\langle h_\varepsilon^{-1}\rangle$, где $h_\varepsilon(x)$ — толщина балки, E_0 — модуль Юнга материала балки. При условии шарнирного опирания собственные частоты колебания усредненной балки, как можно проверить, таковы:

$$\left\{\omega_k = \frac{\pi^2 k^2 E_0 (\varkappa k^2 - \langle h_\varepsilon^{-1}\rangle^{-1}(B - A)/(b - a))}{(b - a)^4 \langle\rho\rangle}, \quad k \in N\right\} = \Omega \tag{2.7}$$

$$\varkappa = \langle h_\varepsilon^{-3}\rangle^{-1} \pi^2/[12(1 - \nu^2)]$$

Условие А принимает вид

$$\varkappa k^2/(b - a) \neq \langle h_\varepsilon^{-1}\rangle^{-1}, \quad \forall k \in N \tag{2.8}$$

Согласно предложению 3 и замечаниям 1, 2, спектр собственных частот колебаний исходной неоднородной балки сходится при выполнении условия (2.8) к спектру (2.7) в смысле, указанном в предложении 3.

3. Вынужденные колебания неоднородной напряженной пластинки. Рассмотрим задачу колебания названных пластинок [1, 5, 13]

(3.1) $$-L_\varepsilon w^\varepsilon + M_\varepsilon w^\varepsilon = \rho^\varepsilon(\mathrm{x})\,\partial^2 w^\varepsilon/\partial t^2 + f(\mathrm{x})$$

(3.2) $$w^\varepsilon(\mathrm{x}, 0) = w_0(\mathrm{x}), \quad \partial w^\varepsilon/\partial t\,(\mathrm{x}, 0) = w_1(\mathrm{x}),\ w_0, w_1 \in L_2(Q)$$

Формализация и разрешимость задачи (3.1), (3.2) связаны с положительной определенностью (ПО) ее стационарной части $L_\varepsilon - M_\varepsilon$ [10, 17]. Операторы L_ε по условию равномерно по $\varepsilon \to 0$ положительно определены. В случае однородных пластинок для ПО операторов $L_\varepsilon - M_\varepsilon$ достаточно ограничиться рассмотрением класса нагрузок, приводящих к неположительной определенности тензора напряжений в плоскости пластинки [13]. Однако в неоднородной пластинке напряжения $\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathrm{x})$ в ее плоскости, определяемые из решения задачи теории упругости неоднородного плоского тела, являются напряжениями общего вида и указанный путь неприменим. Покажем, что для равномерной, начиная с некоторого $\varepsilon' > 0$, ПО операторов $L_\varepsilon - M_\varepsilon$ требование неположительной определенности достаточно отнести к усредненному тензору напряжений $\sigma_{ij}(\mathrm{x})$ (определяющему оператор M, см. предложение 2).

Введем в рассмотрение шар $S(1) = \{u \in H_0^2(Q) : \|u\|_2 \leqslant 1\}$.

Лемма 6. Для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_0(\delta) > 0$, такое, что для всех $u \in S(1)$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\delta)$ выполнено неравенство

(3.3) $$\langle L_\varepsilon u, u\rangle_2 - \langle M_\varepsilon u, u\rangle_2 \geqslant c - \langle Mu, u\rangle_2 - \delta$$

Доказательство. Ввиду наложенных на L_ε условий $\langle L_\varepsilon u, u\rangle_2 \geqslant c$, $\forall u \in S(1)$. В силу компактности вложения $H_0^2(Q)$ в $H_0^k(Q)$ при $k < 2$, в $S(1)$ существует конечная ε^0-сеть $\{u_n\}_{n=1}^N \subset H_0^k(Q)$ $(N = N(\varepsilon^\circ) < \infty)$. В силу наложенных на операторы M_ε (1.2) условий для любого $u \in S(1)$ найдется элемент u_n из ε°-сети, такой, что

(3.4) $$|\langle M_\varepsilon u, u\rangle_2 - \langle M_\varepsilon u_n, u_n\rangle_2| \leqslant C\varepsilon^\circ$$

причем постоянная $C < \infty$ в правой части (3.4) может быть выбрана не зависящей от $u \in S(1)$. Кроме того, в силу сильной сходимости последовательности операторов M_ε к оператору M в $H^{-k}(Q)$ и конечности ε°-сети для любого ε, начиная с некоторого $\varepsilon_0(N) > 0$, выполнено неравенство

(3.5) $$|\langle M_\varepsilon u_n, u_n\rangle_2 - \langle Mu_n, u_n\rangle_2| \leqslant \varepsilon^\circ$$
$$\forall u_n \in \{u_n\}_{n=1}^N, \quad N = N(\varepsilon^\circ) < \infty$$

Возьмем $\delta > 0$ и выберем ε° из условия: $C\varepsilon^\circ < \delta/3$ (см. (3.4)), а затем выберем $\varepsilon_0(N) > 0$ из условия $\varepsilon^\circ < \delta/3$ (см. (3.5)). Тогда, в силу (3.4), (3.5) и неравенства вида (3.4) для оператора M, получаем, что для всех $u \in S(1)$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(N)$ левая часть (3.4) не превышает δ. Отсюда с учетом оценки $\langle L_\varepsilon u, u\rangle_2$ получаем (3.3).

Лемма 7. Начиная с некоторого $\varepsilon_0(\delta) > 0$ выполнено неравенство

(3.6) $$\langle L_\varepsilon u, u\rangle_2 - \langle M_\varepsilon u, u\rangle_2 \geqslant \mu \|u\|_2^2, \quad \forall u \in H_0^2(Q)$$

где μ — правая часть (3.3).

Это утверждение очевидно в силу линейности операторов L_ε, M_ε.

Предложение 4. Если тензор усредненного напряженного состояния $\sigma_{ij}(\mathrm{x})$ неположительно определен, то операторы $L_\varepsilon - M_\varepsilon$, начиная с некоторого $\varepsilon' > 0$, положительно определены для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon'$.

Доказательство. В рассматриваемом случае

$$\langle -Mu, u\rangle_2 = -\int\limits_Q \sigma_{ij}(\mathrm{x})\, u_{,i} u_{,j}\, d\mathrm{x} \geqslant 0, \quad \forall u \in H_0^2(Q)$$

в силу чего достаточно воспользоваться леммами 6, 7, положив в (3.3) $\delta < c/2$.

Для исследования асимптотики решения задачи (3.1), (3.2) при $\varepsilon \to 0$ теперь можно воспользоваться теоремой 6.3 ([17], с. 89). Для ее применимости необходимым является условие положительной определенности стационарной части задачи (3.1), (3.2) — операторов $L_\varepsilon - M_\varepsilon$, что в силу предложения 4 имеет место.

Предложение 5. Пусть последовательности операторов L_ε, M_ε сходятся к операторам L, M в смысле, указанном в предложении 1, и тензор $\sigma_{ij}(\mathrm{x})$ неположительно определен. Тогда последовательность решений задачи (3.1), (3.2) $w^\varepsilon \to w$ *-слабо в $L_\infty([0, \infty], H_0^2(Q))$ при $\varepsilon \to 0$, где w — решение уравнения

$$-Lw + Mw = \langle\rho\rangle(\mathrm{x})\partial^2 w/\partial t^2 + f(\mathrm{x})$$

с начальными условиями (3.2).

Доказательство повторяет доказательство теоремы 6.3 [17] (при соответствующей замене функциональных пространств, так как в [17] часть результатов получена применительно к уравнению второго порядка).

Замечание 4. Представляет интерес исследование задачи (3.1), (3.2) при условии неположительности операторов (например, колебания сжатой пластины). Как показано выше, задача о собственных колебаниях допускает в этом случае усредненное описание, правда, при условии (условие А), что напряжения в плоскости пластинки не приводят к потере устойчивости, что также ставит вопрос об усредненном описании колебаний пластинки в состоянии потери устойчивости или вблизи этого состояния.

Замечание 5. Полученные в п. п. 1, 2 результаты можно перенести на случай густо перфорированных пластинок. При проведении доказательства в этом случае необходимо применять, в дополнение к использовавшимся выше, методы и результаты [18, 19]. Результаты [20] позволяют получить в этом случае явные формулы для вычисления усредненных характеристик сетчатых пластинок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем. Ред. *И. Н. Преображенский.* М.: Мир, 1984. 311 с.
2. *Дюво Ж.* Функциональный анализ и механика сплошной среды.— В кн.: Теоретическая и прикладная механика. М.: Мир, 1979, с. 323—345.
3. *Колпаков А. Г.* Эффективные жесткости композиционных пластинок.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 666—673.
4. *Колпаков А. Г.* Усредненные характеристики в задаче устойчивости неоднородных пластинок.— В сб.: II Всесоюз. конф. по теории упругости. Тез. докл. Тбилиси: Мецниереба, 1984, с. 138—139.
5. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1964. 635 с.
6. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
7. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.
8. *Mignot F., Puel J.-P., Suquet P.-M.* Homogenization and bifurcation of perforated plates.— Int. J. Eng. Sci., 1980, v. 18, p. 409—414.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
10. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи их и приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
11. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов.— Успехи мат. наук (УМН), 1979, т. 34, № 5, с. 65—133.

12. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972. 400 с.
13. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
14. *Ха Тьен Нгоан.* О сходимости решений краевых задач для последовательности эллиптических операторов.— Вестн. МГУ, 1977, с. 83—92.
15. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
16. *Колпаков А. Г.* Осреднение некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1982, т. 119, вып. 4, с. 534—547.
17. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
18. *Берлянд Л. В.* Асимптотическое описание тонкой пластины с большим числом мелких отверстий.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 10, с. 5—8.
19. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Панасенко Г. П.* Асимптотическое разложение системы теории упругости в перфорированных областях.— Мат. сб., 1983, т. 120, вып. 1, с. 22—41.
20. *Колпаков А. Г.* К определению усредненных характеристик упругих каркасов.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 6, с. 969—977.

Новосибирск

Поступила в редакцию 10.IV.1986