Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 539.3 : 534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В КРЕСТООБРАЗНОМ СОЕДИНЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ПОЛОС

Пельц С. П., Шихман В. М.

Предлагается метод решения динамических контактных задач для жестко сцепленных упругих тел. Рассматривается задача о набегании гармонической волны Релея—Лэмба, приходящей из бесконечности, на крестообразное соединение упругих полос. Контактное динамическое взаимодействие упругих тел в отсутствие трения исследовалось ранее [1—3].

Пусть горизонтальная полоса с постоянными ρ_1, λ_1, μ_1 занимает в декартовой системе координат область $|x| < \infty$, $-2H \leqslant y \leqslant 0$. Две вертикальные полуполосы с постоянными ρ_2, λ_2, μ_2, занимающие области $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y < \infty$ и $|x| \leqslant 1$, $-\infty < y \leqslant -2H$, жестко сцеплены с горизонтальной полосой в области контакта. Все геометрические параметры безразмерные. В горизонтальной полосе в положительном направлении оси x распространяется симметричная волна Релея—Лэмба.

В силу симметрии задачи относительно средней линии горизонтальной полосы достаточно рассмотреть верхнюю половину механической системы. Задача также разделяется на симметричную и антисимметричную относительно оси y части. Ниже рассматриваем симметричную часть; антисимметричная рассматривается аналогично.

Граничные условия для горизонтальной полосы имеют вид

$$
\begin{aligned}
&v_1(x, -H) = \tau_1(x, -H) = 0, \quad |x| < \infty \\
&\sigma_{y1}(x, 0) = \tau_1(x, 0) = 0, \quad 1 < |x| < \infty \\
&\sigma_{y1}(x, 0) = p(x), \quad \tau_1(x, 0) = g(x), \quad |x| \leqslant 1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $v_1(x, y)$ — перемещение вдоль оси y, $\sigma_{y1}(x, y)$ и $\tau_1(x, y)$ — нормальное и касательное напряжения, $p(x)$ и $g(x)$ — составляющие неизвестных контактных напряжений; гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен.

Набегающая волна задается как распространяющаяся мода волн Релея—Лэмба, и соответствует однородному решению уравнений Ламе для горизонтальной полосы без нагрузки на боковых гранях. Перемещения в заданной волне имеют вид

$$
u_0(x, y) = -A\alpha_0 (k_1^\circ)^{-1}\Phi_1(\alpha_0, y)\sin\alpha_0 x, \quad v_0(x, y) = A\Phi_2(\alpha_0, y)\cos\alpha_0 x
$$

$$
\Phi_1(\alpha_0, y) = (2\alpha_0^2 - \varkappa_2^2)\operatorname{sh} k_2^\circ H \operatorname{ch} k_1^\circ (y+H) - 2k_1^\circ k_2^\circ \operatorname{sh} k_1^\circ H \operatorname{ch} k_2^\circ (y+H)
$$

$$
\Phi_2(\alpha_0, y) = (2\alpha_0^2 - \varkappa_2^2)\operatorname{sh} k_2^\circ H \operatorname{sh} k_1^\circ (y+H) - 2\alpha_0^2 \operatorname{sh} k_1^\circ H \operatorname{sh} k_2^\circ (y+H)
$$

$$
k_1^\circ = (\alpha_0^2 - \varkappa_1^2)^{1/2}, \quad k_2^\circ = (\alpha_0^2 - \varkappa_2^2)^{1/2}, \quad \varkappa_1^2 = \frac{\rho_1\omega^2}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad \varkappa_2^2 = \frac{\rho_1\omega^2}{\mu_1}
$$

Здесь A — амплитуда, α_0 — действительный корень уравнения Релея—Лэмба

$$(2)\qquad \Delta(\alpha) \equiv (2\alpha^2 - \varkappa_2^2)^2 \operatorname{sh} k_2H \operatorname{ch} k_1H - 4\alpha^2 k_1 k_2 \operatorname{sh} k_1H \operatorname{ch} k_2H = 0$$
$$k_1^2 = \alpha^2 - \varkappa_1^2,\quad k_2^2 = \alpha^2 - \varkappa_2^2$$

Для вертикальной полуполосы боковые грани свободны от напряжений. В области контакта выполняются условия жесткого сцепления. Решение граничной задачи (1) находится интегральным преобразованием Фурье по координате x (α — параметр преобразования). Для перемещений горизонтальной полосы получаем

$$(3)\qquad u_1(x, y) = \frac{1}{\mu_1\sqrt{2\pi}} \int_\Omega [-p(\alpha)\alpha\Phi_1(\alpha, y) +$$
$$+ ik_2 g(\alpha)\Phi_3(\alpha, y)] \frac{\sin \alpha x}{\Delta(\alpha)} d\alpha + u_0(x, y),$$
$$v_1(x, y) = \frac{1}{\mu_1\sqrt{2\pi}} \int_\Omega [k_1 p(\alpha)\Phi_2(\alpha, y) +$$
$$+ i\alpha g(\alpha)\Phi_4(\alpha, y)] \frac{\cos \alpha x}{\Delta(\alpha)} d\alpha + v_0(x, y)$$
$$\Phi_3(\alpha, y) = (2\alpha^2 - \varkappa_2^2) \operatorname{ch} k_1H \operatorname{ch} k_2(y + H) -$$
$$- 2\alpha^2 \operatorname{ch} k_2H \operatorname{ch} k_1(y + H)$$
$$\Phi_4(\alpha, y) = 2k_1k_2 \operatorname{ch} k_2H \operatorname{sh} k_1(y + H) - (2\alpha^2 -$$
$$- \varkappa_2^2) \operatorname{ch} k_1H \operatorname{sh} k_2(y + H)$$
$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} p(x) \cos \alpha x\, dx,\quad g(\alpha) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} g(x) \sin \alpha x\, dx$$

Контур интегрирования в (3) совпадает с вещественной осью, обходя особенности подынтегральных функций в соответствии с принципом предельного поглощения [4].

Для вертикальной полуполосы решение строится в виде рядов по однородным решениям для бесконечной полосы со свободными от напряжений границами

$$(4)\qquad u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x) \exp(i\beta_n y)$$
$$v_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(x) \exp(i\beta_n y)$$
$$v_n(x) = i\,\frac{2\beta_n \operatorname{ch} m_{1n}x \operatorname{ch} m_{2n} - (\beta_n^2 + m_{2n}^2) \operatorname{ch} m_{2n}x \operatorname{ch} m_{1n}}{m_{1n}\beta_n \operatorname{ch} m_{2n}}$$
$$u_n(x) = 2\,\frac{(\beta_n^2 + m_{2n}^2) \operatorname{sh} m_{1n}x \operatorname{sh} m_{2n} - 2\beta_n^2 \operatorname{sh} m_{2n}x \operatorname{sh} m_{1n}}{(\beta_n^2 + m_{2n}^2) \operatorname{sh} m_{2n}}$$
$$m_{1n}^2 = \beta_n^2 - \delta_1^2,\quad m_{2n}^2 = \beta_n^2 - \delta_2^2,\quad \delta_1 = \frac{\rho_2\omega^2}{\lambda_2 + 2\mu_2},\quad \delta_2 = \frac{\rho_2\omega^2}{\mu_2}$$

Здесь C_n — неизвестные комплексные постоянные, β_n — корни дисперсионного уравнения Релея—Лэмба для бесконечной полосы с постоянными ρ_2, μ_2, λ_2

$$(5)\qquad (2\beta^2 - \delta_2^2)^2 \operatorname{ch} m_1 \operatorname{sh} m_2 - 4\beta^2 m_1 m_2 \operatorname{ch} m_2 \operatorname{sh} m_1 = 0$$

Уравнение (5) имеет конечное число действительных и мнимых и счетное множество комплексных корней для каждого значения частоты. Действительные и мнимые корни лежат симметрично относительно начала координат, а комплексные — симметрично во всех четырех квадрантах комплексной плоскости. Суммирование в (4) ведется по корням, лежащим в верхней полуплоскости, с учетом требований принципа энергетического излучения [4].

Из условия равенства напряжений в области контакта можно получить

$$(6)\qquad p(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sigma_{yn}(x),\quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\tau_n(x)$$

Здесь $\sigma_{yn}(x)$ и $\tau_n(x)$ — напряжения, соответствующие однородным решениям

$$\sigma_{yn}(x)=2\mu_2(m_{1n}\operatorname{ch} m_{2n})^{-1}[(2\beta_n^2-\delta_2^2)\operatorname{ch} m_{1n}\operatorname{ch} m_{2n}x-$$
$$-(2m_{1n}^2+\delta_2^2)\operatorname{ch} m_{2n}\operatorname{ch} m_{1n}x]$$
$$\tau_n(x)=4\mu_2 i\beta_n(\operatorname{sh} m_{2n})^{-1}(\operatorname{sh} m_{2n}\operatorname{sh} m_{1n}x-\operatorname{sh} m_{1n}\operatorname{sh} m_{2n}x)$$

Подставляя соотношение (6) в решение (3), представим перемещения горизонтальной полосы $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ через однородные решения вертикальной. Для получения алгебраической системы уравнений относительно C_n используем вариационный принцип Рейсснера, который в рассматриваемом случае при учете соотношений (6) принимает вид

$$(7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} C_n\int_{-1}^{1}[\sigma_{yj}(x)v_n(x)+\tau_j(x)u_n(x)]\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}[\sigma_{yj}(x)v_1(x,0)+\tau_j(x)u_1(x,0)]\,dx,\quad j=1,2,\ldots$$

Здесь $v_1(x, 0)$ и $u_1(x, 0)$ — перемещения в области сцепления, полученные из (3). Входящие в (7) однородные решения удовлетворяют условиям обобщенной ортогональности [5]

$$(8)\qquad W_{nj}=\int_{-1}^{1}[v_n(x)\sigma_{yj}(x)-u_j(x)\tau_n(x)]\,dx=0,\quad \beta_n^2\neq\beta_j^2$$
$$W_{nn}\neq 0,\ \beta_n^2=\beta_j^2;\ j, n=1, 2, \ldots$$

Используя (8), получаем из (7) бесконечную алгебраическую систему относительно C_n следующего вида:

$$(9)\qquad C_jS_j+\sum_{n=1}^{\infty} C_n a_{nj}=b_j,\quad j=1,2,\ldots;\quad S_j=\frac{W_{jj}}{\mu_2}$$

$$a_{nj}=a_{nj}^{(1)}+a_{nj}^{(2)};\quad a_{nj}^{(1)}=\frac{1}{\mu_2}\int_{-1}^{1}[u_n(x)\tau_j(x)+u_j(x)\tau_n(x)]\,dx$$

$$a_{nj}^{(2)}=\frac{1}{\mu_1\mu_2}\int_{\Omega}\{[k_1\varkappa_2^2\sigma_{yn}(\alpha)\sigma_{yj}(\alpha)\operatorname{sh} k_1H\operatorname{sh} k_2H-$$
$$-k_2\varkappa_2^2\tau_n(\alpha)\tau_j(\alpha)\operatorname{ch} k_2H\operatorname{ch} k_1H+$$
$$+i\alpha\Phi_1(\alpha,0)[\tau_n(\alpha)\sigma_{yj}(\alpha)+\sigma_{yn}(\alpha)\tau_j(\alpha)]\}\frac{d\alpha}{\Delta(\alpha)}$$

$$b_j=-A\frac{\sqrt{2\pi}}{\mu_2}\left[\frac{i\alpha_0}{k_1^\circ}\Phi_1(\alpha_0,0)\tau_j(\alpha_0)+\varkappa_2^2\operatorname{sh} k_2^\circ H\operatorname{sh} k_1^\circ H\sigma_{yj}(\alpha_0)\right]$$

$$\sigma_{yn}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\sigma_{yn}(x)\cos\alpha x\,dx,$$

$$\tau_n(\alpha)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\tau_n(x)\sin\alpha x\,dx$$

Параметры падающей волны Релея—Лэмба (амплитуда A, волновое число α_0) входят в правую часть системы (9).

Найдем полное поле перемещений при $y = 0$, включающее как симметричную, так и антисимметричную части. Симметричная часть задается соотношениями (3). Переходим от интегрирования по α к интегрированию в комплексной плоскости $\zeta = \alpha + i\eta$. При $x < -1$, замыкая контур Ω в нижней части комплексной плоскости и вычисляя вычеты в полюсах, получаем

$$u_1(x, 0) = \sum_{j=1}^{m} D_j \exp(-i\alpha_j x) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \exp(i\zeta_k x) + u_0(x, 0) \tag{10}$$

Здесь α_j — действительные, ζ_k — комплексные корни уравнения (2), D_j и E_k — постоянные, зависящие от всех параметров задачи. Волновое поле содержит конечное число бегущих в отрицательном направлении оси x отраженных волн и бесконечное число неоднородных волн с затухающей амплитудой. Количество бегущих волн равно числу полюсов подынтегральной функции в (3). Фазовые скорости волн определяются упругими постоянными горизонтальной полосы.

При $x > 1$ волновое поле содержит кроме заданной те же волны, что и в (10), но распространяющиеся в положительном направлении оси x.

В области $-1 \leqslant x \leqslant 0$ поле перемещений можно представить в виде

$$u_1(x, 0) = \sum_{j=1}^{m} (F_j \cos \alpha_j x + G_j \sin \alpha_j x) + \sum_{j=1}^{m} H_j \exp(-i\alpha_j x) + \sum_{k=1}^{\infty} [K_k \exp(i\zeta_k x) + L_k \exp(-i\zeta_k x)] + u_0(x, 0) \tag{11}$$

Здесь первая сумма — это стоячие волны, вторая — волны, бегущие в отрицательном направлении оси x. Фазовые скорости этих волн определяются действительными корнями уравнения (2). Третья сумма — это затухающие волны, соответствующие комплексным корням. Амплитуды волн в (11) определяются всеми параметрами задачи.

В случае $0 \leqslant x \leqslant 1$ характер волнового поля тот же, что и в (11), исключая бегущие волны, которые в этом случае изменяют направление распространения.

В угловых точках области сцепления имеется особенность напряженного состояния [6]. В полярных координатах ρ, φ с центром в угловой точке напряжения имеют вид

$$\sigma_\varphi \sim \rho^{\gamma-1}, \quad \tau_{\rho\varphi} \sim \rho^{\gamma-1}, \quad \rho \to 0 \tag{12}$$

где γ определяется из уравнения

$$\mu_2^2 (1 - \nu_1)^2 (\sin^2 {}^1/_2\gamma\pi - \gamma^2) + \mu_1^2 (1 - \nu_2)^2 \sin^2\gamma\pi + {}^1/_4 (\nu_1 - \nu_2)^2 (\sin^2 {}^1/_2\gamma\pi - \gamma^2) \sin^2\gamma\pi + 2\mu_1\mu_2 (1 - \nu_2)(1 - \nu_1) \sin\gamma\pi \sin{}^1/_2\gamma\pi \cos^3/_2\gamma\pi + \mu_2 (\mu_1 - \mu_2) (1 - \nu_1) (\sin^2 {}^1/_2\gamma\pi - \gamma^2)\sin^2\gamma\pi + \mu_1 (\mu_2 - \mu_1) (1 - \nu_2)\sin^2\gamma\pi \sin^2 {}^1/_2\gamma\pi = 0, \quad 0 < \gamma < 1$$

Воспользовавшись представлением (4), можно получить

$$\sigma_{y2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sigma_{yn}(x) \exp(i\beta_n y)$$

где $\sigma_{yn}(x)$ — напряжения, соответствующие однородным решениям. Асимптотическое поведение $\sigma_{yn}(x)$ при больших n определяется известной асимптотикой корней дисперсионного уравнения [7, 8]

$$\beta_n \sim i\pi (n - {}^1/_4) + {}^1/_2 \ln \pi (4n - 1) + O(n^{-1} \ln n) \tag{13}$$

Используя (13) и переходя к полярным координатам, получаем, что поведение напряжений при $\rho \to 0$ определяется рядом

$$\sigma = (\sigma_\varphi, \tau_{\rho,\varphi}) \sim \sum_{n=N}^{\infty} C_n (-1)^n n^{-1/2} e^{-nz}, \quad N \gg 1 \tag{14}$$

$$z = \pi\rho\cos\varphi, \quad z \to 0, \quad \varphi \in [0, \pi/2]$$

Из (14) и (12) следует, что условия в угловой точке диктуют асимптотическое поведение постоянных C_n при $n \to \infty$. Отыскивая постоянные C_n в виде $C_n \sim C_0 (-1)^n n^{\beta_0}$, где β_0 подлежит определению, получим из (14)

$$\sigma \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta_0 - 1/2} e^{-nz}$$

Воспользуемся результатом из [9]. Если

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^q e^{-nz}, \quad z > 0, \quad -1 < q < 0$$

то справедлива оценка $f(z) \sim z^{-(q+1)}$, $z \to +0$. Отсюда и из (12) следует, что $\beta_0 = 1/2 - \gamma$. Таким образом, выбор асимптотического поведения постоянных в виде

$$C_n = C_0 (-1)^n n^{1/2 - \gamma}, \quad n \to \infty \tag{15}$$

обеспечивает требуемую особенность напряжений в угловых точках контакта (12). Бесконечная система (9), при учете заданного асимптотического поведения C_n (15), приводится к конечной

$$C_j S_j + \sum_{n=1}^{N_1} C_n a_{nj} + C_0 \sum_{n=N_1+1}^{N_2} (-1)^n n^{1/2-\gamma} a_{nj} = b_j$$

$$j = 1, 2, \ldots, N_1 + 1; \quad N_2 \gg N_1$$

Несобственные интегралы в a_{nj} вычисляются методами теории вычетов.

Развитый подход переносится на случай колебаний упругой полуполосы, сцепленной на торце с упругой полуплоскостью, при воздействии набегающей волны Релея. Общий ход решения при этом не отличается от изложенного. Задача (1) для бесконечной полосы переходит в задачу о колебаниях полуплоскости с заданными на границе нагрузками и волной Релея, распространяющейся в положительном направлении оси x. Входящие в решение несобственные интегралы находятся эффективным методом, предложенным в [10]. Поле перемещений при $y = 0$ состоит из набегающей и рассеянной волн Релея и затухающих продольной и поперечной волн. В области контакта к волновому полю добавляются стоячие волны, соответствующие однородным решениям для полосы.

Авторы благодарят В. А. Бабешко за постоянное внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А., Пельц С. П.* Колебания плит на упругом слое.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1, с. 131—135.
2. *Пельц С. П., Цветянский В. Л.* Возбуждение волн вибрирующим цилиндром в слое.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 141—145.
3. *Пельц С. П.* Вибрация цилиндра на упругом слое, частично сцепленном с жестким основанием.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 5, с. 799—804.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных ре-

шений в динамических задачах теории упругости.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 333—335.
6. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178—186.
7. *Златин А. Н.* О корнях некоторых трансцендентных уравнений, встречающихся в теории упругости.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 12, с. 69—74.
8. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974, 455 с.
9. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.
10. *Александров В. М., Буряк В. Г.* О некоторых динамических смешанных задачах теории упругости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 114—121.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
31.III.1986