

УДК 539.3

ОСЕССИММЕТРИЧНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ КЕЛДЫША — СЕДОВА

Беляев С. Ю.

Рассматривается осесимметричная гармоническая задача для полупространства, на границе которого имеется произвольное число круговых концентрических линий раздела граничных условий первого и второго рода. Предлагается метод построения эффективного решения задачи при разных соотношениях между геометрическими параметрами. В качестве примера исследуется задача о совместном действии кольцевого и кругового штампов на упругое полупространство.

Ранее [1, 2] для решения этой задачи предлагались методы, эффективные в случаях, когда линии раздела граничных условий расположены далеко одна от другой.

1. Постановка задачи. Пусть s — одно из множеств

$$\Omega_i^j = \bigcup_{k=i}^j (a_k, b_k), \Sigma_i^j = \bigcup_{k=i}^j (b_k, a_{k+1}) \quad (0 \leq a_k < b_k < a_{k+1})$$

а \bar{s} — соответствующее замкнутое множество. Пусть далее $c[\bar{s}]$ — пространство заданных на \bar{s} непрерывных функций, убывающих на бесконечности (если \bar{s} — неограниченное множество), как r^{-h} ($h > 0, r \in \bar{s}$), а $c^*[\bar{s}]$ — подпространство $c[\bar{s}]$ функций, убывающих на бесконечности не медленнее, чем r^{-1-h} .

Требуется определить гармоническую в области $r \geq 0, z > 0$ (r, z — цилиндрические координаты) функцию $u(r, z)$, удовлетворяющую на плоскости $z = 0$ смешанным граничным условиям

$$(1.1) \quad u|_{z=0} = f(r), \quad r \in \Omega_1^n, \quad \partial u / \partial z|_{z=0} = g(r), \quad r \in \Sigma_0^n \\ b_0 = 0, \quad a_{n+1} = \infty, \quad n < \infty, \quad f \in c[\bar{\Omega}_1^n], \quad g \in c^*[\bar{\Sigma}_0^n]$$

условиям

$$(1.2) \quad \lim_{r \rightarrow a_k+0} \sqrt{r - a_k} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow b_k-0} \sqrt{b_k - r} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} < \infty$$

и убывающую на бесконечности. Условия (1.2) обеспечивают единственность решения задачи [3] и в дальнейшем для краткости не выписываются.

В пространствах $c[\bar{s}], c^*[\bar{s}]$ введем норму $\|x\| = \max_{r \in \bar{s}} |x(r)|$. Обозначим $v_i^j(f, g), w_i^j(g, f)$ гармонические в области $r \geq 0, z > 0$ функции $v(r, z), w(r, z)$, убывающие на бесконечности и удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$v|_{z=0} = f(r), \quad r \in \Omega_i^j, \quad \partial v / \partial z|_{z=0} = g(r), \quad r \in D\bar{\Omega}_i^j \\ \partial w / \partial z|_{z=0} = g(r), \quad r \in \Sigma_i^j, \quad w|_{z=0} = f(r), \quad r \in D\bar{\Sigma}_i^j$$

Здесь и далее Ds — дополнение множества s до полуоси, т. е. $Ds = [0, \infty) \setminus s$.

Отметим, что так как $\Omega_1^n = D\bar{\Sigma}_0^n, \Sigma_0^n = D\bar{\Omega}_1^n$, то

$$(1.3) \quad u(r, z) = v_1^n(f, g) = w_0^n(g, f)$$

Подчеркнем, что f и g в обозначениях $v_i^j(f, g), w_i^j(g, f)$ являются функциональными аргументами. Собственно аргументами этих функций будут r и z .

Задача (1.1), (1.2) хорошо изучена, когда число линий раздела граничных условий равно двум [4, 5], поэтому для ее решения достаточно предложить методику сведения задачи с произвольным числом линий раздела граничных условий к задаче с двумя такими линиями, эффективную при разных соотношениях между параметрами. Предлагаемая ниже методика основана на двух методах сведения задачи к двум задачам с меньшим числом линий раздела граничных условий.

2. Первый метод. Будем искать функцию $v_1^n(f, g)$, являющуюся решением рассматриваемой задачи, в виде

$$(2.1) \quad v_1^n(f, g) = v_1^m(\alpha, \mu) + v_{m+1}^n(\beta, l)$$

где функции α, β определяются из системы

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \alpha(r) &= f(r) - v_{m+1}^n(\beta, l)|_{z=0}, \quad r \in \bar{\Omega}_1^m \\ \beta(r) &= f(r) - v_1^m(\alpha, \mu)|_{z=0}, \quad r \in \bar{\Omega}_{m+1}^n \end{aligned}$$

а функции l, μ выбираются так, что

$$(2.3) \quad \mu(r) + l(r) = g(r), \quad r \in \Sigma_0^n$$

Очевидно, что если α, β, μ, l удовлетворяют условиям (2.2), (2.3), то равенство (2.1) обращается в тождество.

Таким образом, разрешив систему (2.2), приходим к двум независимым задачам (определения $v_1^m(\alpha, \mu), v_{m+1}^n(\beta, l)$ по заданным функциям α, μ, β, l) с меньшим числом линий раздела граничных условий.

Теорема 1. Если $\mu \in c^*[D\Omega_1^m], l \in c^*[D\Omega_{m+1}^n]$, то система (2.2) в классе непрерывных функций имеет единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений с коэффициентом сходимости, не превышающим b_m/a_{m+1} .

Доказательство. Очевидно, что если $\alpha \in c[\bar{\Omega}_1^m], \mu \in c^*[D\Omega_1^m], \beta \in c[\bar{\Omega}_{m+1}^n], l \in c^*[D\Omega_{m+1}^n]$, то $v_1^m(\alpha, \mu)|_{z=0} \in c[\bar{\Omega}_1^m], v_{m+1}^n(\beta, l)|_{z=0} \in c[\bar{\Omega}_{m+1}^n]$. Следовательно, существуют линейные операторы A, M, B, L , отображающие соответственно $c[\bar{\Omega}_1^m]$ в $c[\bar{\Omega}_{m+1}^n], c^*[D\Omega_1^m]$ в $c[\bar{\Omega}_{m+1}^n], c[\bar{\Omega}_{m+1}^n]$ в $c[\bar{\Omega}_1^m], c[D\Omega_{m+1}^n]$ в $c[\bar{\Omega}_1^m]$, такие, что

$$(2.4) \quad v_1^m(\alpha, \mu)|_{z=0} = A\alpha + M\mu, \quad v_{m+1}^n(\beta, l)|_{z=0} = B\beta + Ll$$

Используя последние соотношения, перепишем систему (2.2) в виде

$$(2.5) \quad \alpha = F_1 - B\beta, \quad \beta = F_2 - A\alpha; \quad F_1 = f - Ll, \quad F_2 = f - M\mu$$

Исключим функцию β из первого уравнения (2.5) при помощи второго уравнения. Находим

$$(2.6) \quad \alpha = F + BA\alpha, \quad F = F_1 - BF_2$$

Оценим норму оператора $T = BA$. С этой целью заметим, что если $v^m(1, 0)$ — гармоническая в области $r \geq 0, z > 0$ функция, удовлетворяющая условиям

$$v^m(1, 0)|_{z=0} = 1, \quad r < b_m, \quad \frac{\partial}{\partial z} v^m(1, 0)|_{z=0} = 0, \quad r > b_m$$

то из принципа максимума для гармонических функций следуют неравенства (χ — монотонная убывающая функция)

$$\begin{aligned} v_1^m(1, 0)|_{z=0} &\leq v^m(1, 0)|_{z=0}, \quad r \in \bar{\Omega}_{m+1}^n \\ v_{m+1}^n(\chi, 0)|_{z=0} &\leq \chi(a_{m+1}), \quad r \in \bar{\Omega}_1^m; \quad \chi \in c[\bar{\Omega}_{m+1}^n] \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что [3]

$$v^m(1, 0)|_{z=0} = \chi^*(r) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{b_m}{r}, \quad r > b_m$$

находим

$$(2.7) \quad Ae = v_1^m(1, 0)|_{z=0} \leq v^m(1, 0)|_{z=0} = \chi^*, \quad B\chi^* \leq \chi^*(a_{m+1})$$

где e — элемент $c[\bar{\Omega}_1^m]$, принимающий значения, равные единице при всех значениях аргумента. Заметим, что для любого $x \geq 0$ ($x \in c[\Omega_1^m]$) $Tx \geq 0$. Следовательно, $\|T\| = \max_{\bar{\Omega}_1^m} Te$. Для доказательства доста-

точно заметить, что если $\|x\| < 1$, то

$$|Tx| - Te = \begin{cases} T(x - e) \leq 0, & Tx \geq 0 \\ -T(x + e) \leq 0, & Tx < 0 \end{cases}$$

Учитывая неравенства (2.7), получим

$$\|T\| = \max_{\bar{\Omega}_1^m} BAe \leq \max_{\bar{\Omega}_1^m} B\chi^* \leq \chi^*(a_{m+1}) \leq b_m/a_{m+1}$$

Таким образом, утверждение теоремы следует из теоремы Банаха о неподвижной точке.

3. Второй метод. Наряду с (2.1) искомая гармоническая функция $v_1^n(f, g) = w_0^n(g, f)$ может быть представлена в виде

$$(3.1) \quad w_0^n(g, f) = w_0^{m-1}(\eta, p) + w_m^n(\zeta, q)$$

если функции η, p, ζ, q удовлетворяют условиям

$$(3.2) \quad \eta(r) = G_1(r) - \frac{\partial}{\partial z} w_m^n(\zeta, 0)|_{z=0}, \quad r \in \bar{\Sigma}_0^{m-1}$$

$$\zeta(r) = G_2(r) - \frac{\partial}{\partial z} w_0^{m-1}(\eta, 0)|_{z=0}, \quad r \in \bar{\Sigma}_m^n$$

$$G_1(r) = g(r) - \frac{\partial}{\partial z} w_m^n(0, q)|_{z=0}, \quad G_2(r) = g(r) - \frac{\partial}{\partial z} w_0^{m-1}(0, p)|_{z=0}$$

$$(3.3) \quad p(r) + q(r) = f(r), \quad r \in D\Sigma_0^n$$

Равенство (3.3) может рассматриваться как ограничение на выбор функций p, q , а соотношения (3.2) представляют собой систему уравнений для определения функций η, ζ .

Теорема 2. Если $G_1 \in c[\bar{\Sigma}_0^{m-1}]$, $G_2 \in c^*[\bar{\Sigma}_m^n]$, то система (3.2) в классе непрерывных функций имеет единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений с коэффициентом сходимости, не превышающим $(a_m/b_m)^3$.

Доказательство. Очевидно, что если $\eta \in c[\bar{\Sigma}_0^{m-1}]$, $\zeta \in c^*[\bar{\Sigma}_m^n]$, то

$$\frac{\partial}{\partial z} w_0^{m-1}(\eta, 0)|_{z=0} \in c^*[\bar{\Sigma}_m^n], \quad \frac{\partial}{\partial z} w_m^n(\zeta, 0)|_{z=0} \in c[\bar{\Sigma}_0^{m-1}]$$

Следовательно, существуют линейные операторы Z и Y , отображающие соответственно $c^*[\bar{\Sigma}_m^n]$ в $c[\bar{\Sigma}_0^{m-1}]$ и $c[\bar{\Sigma}_0^{m-1}]$ в $c^*[\bar{\Sigma}_m^n]$, такие, что

$$\frac{\partial}{\partial z} w_0^{m-1}(\eta, 0)|_{z=0} = Y\eta, \quad \frac{\partial}{\partial z} w_m^n(\zeta, 0)|_{z=0} = Z\zeta$$

Исключая из первого уравнения (3.2) функцию ζ при помощи второго уравнения и вводя обозначения

$$\xi = \tau\eta, \quad R = \tau(G_1 + YG_2), \quad X\xi = \tau ZY(y\xi)$$

$$\tau(r) = b_m^2 - r^2, \quad y(r) = (b_m^2 - r^2)^{-1}$$

получим следующее уравнение: $\xi = R + X\xi$. Так как $\tau, y \in c[\bar{\Sigma}_0^{m-1}]$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $\|X\| \leq (a_m/b_m)^3$.

Заметим, что если $x_1 \in c [0, a_m]$, $x_2 \in c^* [\omega]$, $\omega = [b_m, \infty)$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, то

$$(3.4) \quad 0 \leq -\frac{\partial}{\partial z} w^{m-1}(x_1, 0)|_{z=0} \leq -\frac{\partial}{\partial z} w^{m-1}(x_1, 0)|_{z=0}, \quad r \in \bar{\Sigma}_m^n$$

$$(3.5) \quad 0 \leq -\frac{\partial}{\partial z} w_m(x_2, 0)|_{z=0} \leq -\frac{\partial}{\partial z} w_m(x_2, 0)|_{z=0}, \quad r \in \bar{\Sigma}_0^{m-1}$$

где $w^{m-1}(x_1, 0)$, $w_m(x_2, 0)$ — гармонические в области $r > 0$, $z > 0$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial}{\partial z} w^{m-1}(x_1, 0)|_{z=0} = x_1(r), \quad r \leq a_m, \quad w^{m-1}(x_1, 0)|_{z=0} = 0, \quad r > a_m$$

$$\frac{\partial}{\partial z} w_m(x_2, 0)|_{z=0} = x_2(r), \quad r > b_m, \quad w_m(x_2, 0)|_{z=0} = 0, \quad r < b_m$$

Левые части неравенств (3.4), (3.5) доказываются аналогично ([6], с. 223). Для доказательства правой части (3.4) достаточно заметить, что функция $s = w_0^{m-1}(x_1, 0) - w^{m-1}(x_1, 0)$ удовлетворяет условиям

$$\partial s / \partial z|_{z=0} \leq 0, \quad r \in (0, a_m), \quad s|_{z=0} = 0, \quad r \in (a_m, \infty)$$

Подобным образом доказывается правая часть неравенства (3.5). Принимая во внимание, что [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} w^{m-1}(x_1, 0)|_{z=0} &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a_m^2}} \int_0^{a_m} \frac{\rho \sqrt{a_m^2 - \rho^2} x_1(\rho)}{r^2 - \rho^2} d\rho, \quad r \in \bar{\Sigma}_m^n \\ \frac{\partial}{\partial z} w_m(x_2, 0)|_{z=0} &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b_m^2 - r^2}} \int_{b_m}^{\infty} \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - b_m^2} x_2(\rho)}{\rho^2 - r^2} d\rho, \quad r \in \bar{\Sigma}_0^{m-1} \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \|X\| &\leq \max_{r \in \kappa} \frac{4}{\pi^2} \sqrt{b^2 - r^2} \int_b^{\infty} \frac{t \sqrt{t^2 - b^2} dt}{(t^2 - r^2) \sqrt{t^2 - a^2}} \int_0^a \frac{\rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho}{(t^2 - \rho^2)(b^2 - \rho^2)} \leq \\ &\leq \frac{a^3}{b^3} \max_{r \in \kappa} \frac{2}{\pi} \sqrt{b^2 - r^2} \int_b^{\infty} \frac{t \sqrt{t^2 - b^2} dt}{(t^2 - r^2)(t^2 - a^2)} \leq \frac{a^3}{b^3} \\ \kappa &= \bar{\Sigma}_0^{m-1}, \quad a = a_m, \quad b = b_m \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим, что условия теоремы будут выполнены, если функции p, q выбрать, например, следующим образом: |

$$p \in c [D\Sigma_0^{m-1}], \quad q \in c^* [D\Sigma_m^n]; \quad p(r) = 0, \quad r > r_2$$

$$q(r) = 0, \quad r < r_1; \quad r_1, r_2 \in (a_m, b_m), \quad r_1 < r_2$$

4. Построение эффективного решения. Предложенные выше методы дают возможность свести задачу с $2n$ линиями раздела граничных условий к двум задачам, соответственно, с $2m$ и $2(n - m)$ линиями раздела граничных условий. К каждой из полученных задач можно снова применить один из указанных методов. Продолжение этого процесса позволяет в конце концов свести задачу к задаче с двумя линиями раздела граничных условий. Реализация процесса требует решения системы (2.2) или (3.2) в зависимости от выбранного на данном шаге метода. Коэффициент сходимости итераций при решении системы (2.2) методом по-

следовательных приближений не превышает b_m/a_{m+1} , а при решении системы (3.2) — $(a_m/b_m)^3$. Последнее позволяет сформулировать следующий алгоритм выбора метода решения: если $b_i/a_{i+1} \leq (a_j/b_j)^3$, то следует воспользоваться первым методом, положив $m = i$, в противном случае — вторым, положив $m = j$. Здесь через i обозначено то значение k , при котором достигается $\min (b_k/a_{k+1})$, а через j — то значение k , при котором достигается $\min (a_k/b_k)$. В обоих случаях k пробегает все возможные значения, за исключением тех, при которых отношение b_k/a_{k+1} или a_k/b_k равно нулю.

В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу о совместном вдавливании кольцевого и кругового штампов в упругое полупространство. Предполагается, что штампы жесткие, имеют плоские основания и вдавливаются без трения. Предполагается также, что поверхность полупространства, внешняя к штампам, свободна от напряжений.

При помощи соотношений Папковича — Нейбера эта задача сводится к определению гармонической функции $u(r, z)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u|_{z=0} &= G(1-\nu)^{-1}\varepsilon_k, \quad r \in (a_k, b_k), \quad k = 1, 2, \quad a_1 = 0 \\ \partial u/\partial z|_{z=0} &= 0, \quad r \in (b_1, a_2) \cup (b_2, \infty) \end{aligned}$$

где ε_k — перемещения штампов, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. В соответствии с принятыми выше обозначениями (δ_{jk} — символ Кронекера)

$$(4.2) \quad u = \frac{G}{1-\nu} \sum_{j=1}^2 \varepsilon_j v_1^2(f_j, 0); \quad f_j(r) = \delta_{jk}, \quad a_k < r < b_k$$

Пусть расстояние между штампами велико (отношение b_1/a_2 мало). Используя первый метод сведения задачи к двум задачам с меньшим числом линий раздела граничных условий, представим искомые функции в виде $v_1^2(f_j, 0) = v_1^1(f_{j1}, 0) + v_2^2(f_{j2}, 0)$, где функции f_{jk} определяются из системы (2.2) при $m = 1$, $n = 2$, $\alpha = f_{j1}$, $\beta = f_{j2}$, $f = f_j$, $l = 0$, $\mu = 0$. Эта система может быть решена методом последовательных приближений с коэффициентом сходимости, не превышающим b_1/a_2 . Следовательно, выбранный метод эффективен в данном случае.

Функции $v_1^1(f_{j1}, 0)$, $v_2^2(f_{j2}, 0)$ представляют собой решения задач с одной и двумя линиями раздела граничных условий. Записывая эти решения в форме [7]

$$(4.3) \quad \begin{aligned} v_k^k(f_{jk}, 0) &= \int_0^\infty V_{jk}(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda \\ V_{j1} &= \int_0^a t_1 \psi_{j1}(t) \sin \lambda t dt + \int_a^\infty t_1 \omega_{j1}(t) \cos \lambda t dt \\ V_{j2} &= \int_0^b t_2 \varphi_{j2}(t) \sin \lambda t dt + \int_b^c t_2 \psi_{j2}(t) \cos \lambda t dt + \int_c^\infty t_2 \omega_{j2}(t) \cos \lambda t dt \\ t_1 &= t/\sqrt{|a^2 - t^2|}, \quad t_2 = t/\sqrt{|c^2 - t^2|}, \quad a = b_1, \quad b = a_2, \quad c = b, \end{aligned}$$

и переписывая систему (2.2) относительно функций ψ_{jk} , ω_{jk} , φ_{j2} , получим

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \psi_{j1}(t) &= \frac{2}{\pi} \delta_{j1} - \frac{t_2}{t_1} \varphi_{j2}(t) - \int_a^b \tau \vartheta \tau_2 \varphi_{j2}(\tau) \frac{d\tau}{\tau_1}, \quad t \leq a \\ \omega_{j1}(t) &= t_1^{-1} \int_0^a \tau \tau_1 \vartheta \psi_{j1}(\tau) d\tau, \quad t \geq a \\ \varphi_{j2}(t) &= \frac{t_2}{t} \left[\int_b^c \tau \vartheta \psi_{j2}(\tau) d\tau + \int_c^\infty \tau_2 \vartheta \omega_{j2}(\tau) d\tau \right], \quad t \leq b. \end{aligned}$$

$$\psi_{j_2}(t) = \frac{2}{\pi} \delta_{j_2} - \frac{t_1}{t_2} \omega_{j_1}(t) - \int_a^b \tau \tau_1 \vartheta \omega_{j_1}(\tau) \frac{d\tau}{\tau_2}, \quad b \leq t \leq c$$

$$\omega_{j_2}(t) = t_2 \int_0^b \tau \tau_2 \vartheta \varphi_{j_2}(\tau) d\tau, \quad t \geq c$$

$$\vartheta = 2\pi^{-1} / |t^2 - \tau^2|, \quad \tau_1 = \tau / \sqrt{|a^2 - \tau^2|}, \quad \tau_2 = \tau / \sqrt{|b^2 - \tau^2|}$$

Разрешив систему (4.4), по формулам (4.2), (4.3) получим решение задачи.

Можно показать, что система (4.4) имеет единственное решение в классе непрерывных функций, которое может быть получено методом последовательных приближений с коэффициентом сходимости, не превышающим $\max [b_1/a_2, (a_2/b_2)^3]$. Наличие здесь коэффициента $(a_2/b_2)^3$ связано с тем, что задача определения функции $v_2^2(f_{j_2}, 0)$ сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, при решении которого методом последовательных приближений коэффициент сходимости итераций не превышает $(a_2/b_2)^3$ ¹.

Через решение системы (4.4) выражаются важнейшие величины, характерные для данной задачи. Получим, например, численную связь перемещений ε_k с силами P_k , действующими на штампы. Эта связь определяется коэффициентами p_{kj} :

$$(4.5) \quad P_k = Gc (1 - \nu)^{-1} \sum_{j=1}^2 p_{kj} \varepsilon_j$$

$$(4.6) \quad p_{1j} = \frac{2\pi}{c} \int_a^\infty t_1 \omega_{j_1}(t) dt$$

$$p_{2j} = \frac{2\pi}{c} \left[\int_b^c t_2 \psi_{j_2}(t) dt + \int_c^\infty t_2 \omega_{j_2}(t) dt \right]$$

Пусть теперь расстояние между штампами мало ($b_1/a_2 \approx 1$). Используя второй метод сведения задачи к двум задачам с меньшим числом линий раздела граничных условий, получим

$$u(r, z) = \int_0^\infty [W_{j_1}(\lambda) + W_{j_2}(\lambda)] J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

$$W_{j_1} = \int_0^a t_1 \alpha_{j_1}(t) \cos \lambda t \frac{dt}{t} + \int_a^b t_1 \beta_{j_1}(t) \sin \lambda t \frac{dt}{t} + \int_b^\infty t_1 \gamma_{j_1}(t) \cos \lambda t \frac{dt}{t}$$

$$W_{j_2} = \int_0^c \beta_{j_2}(t) \cos \lambda t dt + \int_c^\infty \gamma_{j_2}(t) \cos \lambda t dt$$

где функции α_{j_1} , β_{jk} , γ_{jk} определяются из системы

$$(4.7) \quad \alpha_{j_1}(t) = t_2 \left[\delta_{j_1} - \delta_{j_2} - \int_a^b \tau_2 \vartheta \beta_{j_1}(\tau) d\tau \right], \quad t \leq a$$

$$\beta_{j_2}(t) = \frac{2}{\pi} \Delta + t_1 t_2 \left[\int_b^\infty \tau_1 \tau_2 \vartheta \gamma_{j_1}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \int_c^\infty \tau_1 \vartheta \gamma_{j_2}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right], \quad a \leq t \leq b$$

$$\gamma_{j_1}(t) = -t \int_0^a \vartheta \alpha_{j_1}(\tau) d\tau, \quad t \geq b, \quad \beta_{j_2}(t) = \frac{2}{\pi} \delta_{j_2}, \quad t \leq c$$

$$\gamma_{j_2}(t) = -t^{-1} t_2 \gamma_{j_1}(t) + \int_a^b \tau_2 \vartheta \beta_{j_1}(\tau) d\tau, \quad t \geq c$$

$$\Delta = 2\pi^{-1} \delta_{j_2} t^{-1} t_2 \ln \left[(\sqrt{c^2 - a^2} + \sqrt{t^2 - a^2}) / \sqrt{c^2 - t^2} \right]$$

¹ *Беляев С. Ю.* Смешанная задача о деформации упругого полупространства с произвольным числом круговых концентрических линий раздела граничных условий: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Л.: ЛПИ им. М. И. Калинина, 1983, с. 11.

Система (4.7) имеет в классе непрерывных функций единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений с коэффициентом сходимости, не превышающим $\max [(a_2/b_2)^3, 1/2]$. Через решение системы (4.7) коэффициенты p_{kj} в формуле (4.5) выражаются следующим образом:

$$(4.8) \quad p_{1j} = \frac{2\pi}{c} \left[\frac{2}{\pi} \delta_{j2} (c - \sqrt{c^2 - a^2}) + \int_0^a t_2 \alpha_{j2}(t) \frac{dt}{t} + \int_b^\infty (1 - t_1) t_2 \gamma_{j1}(t) \frac{dt}{t} + \int_c^\infty (1 - t_1) \gamma_{j2}(t) dt \right]$$

$$p_{2j} = \frac{2\pi}{c} \left[\frac{2}{\pi} \delta_{j2} (\sqrt{c^2 - a^2} - \sqrt{b^2 - a^2}) + \int_a^b t_1 t_2 \beta_{j1}(t) \frac{dt}{t} + \int_b^c t_1 t_2 \gamma_{j1}(t) \frac{dt}{t} \right]$$

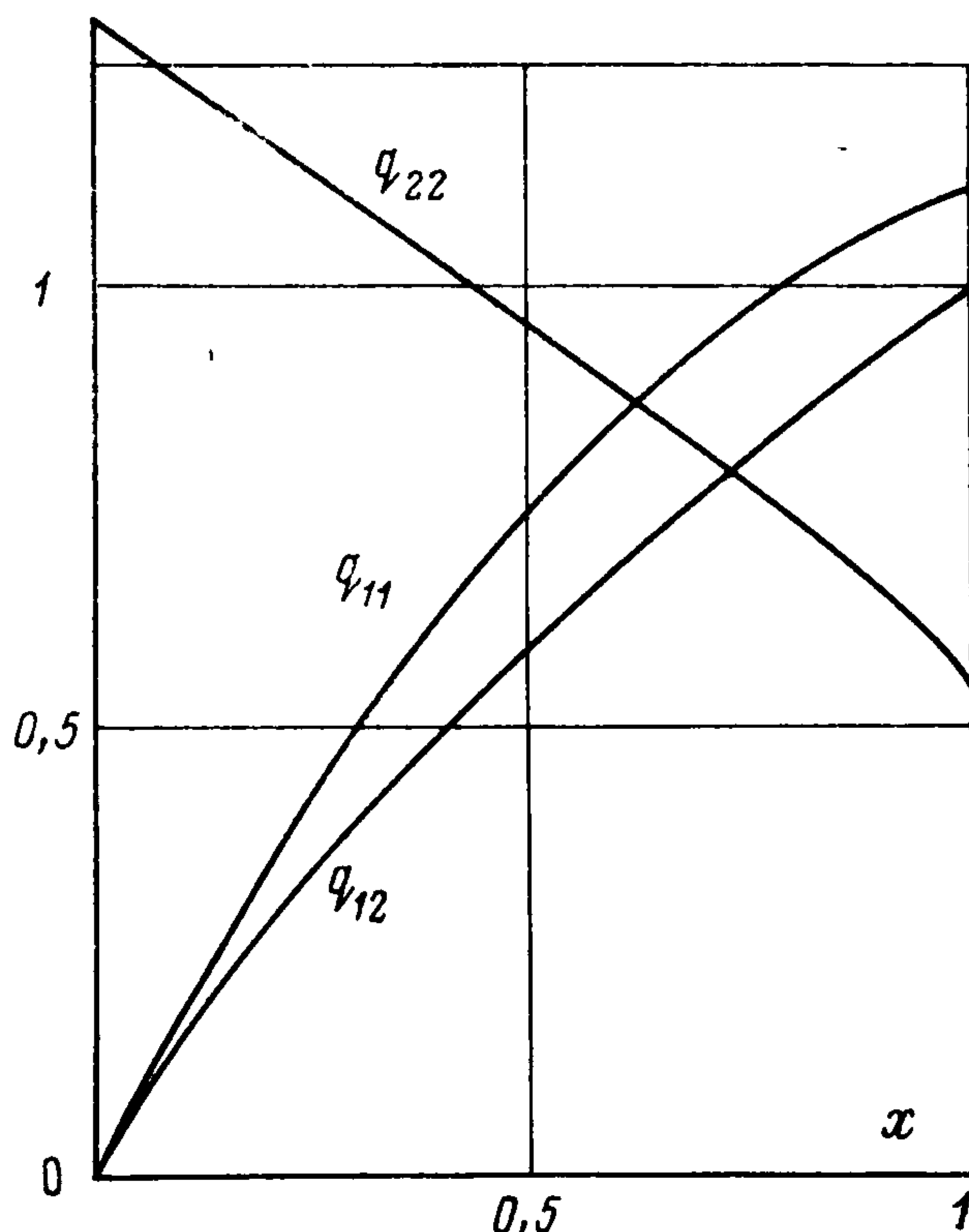
Результаты расчетов по формулам (4.6), (4.8) при $b_2 = 1$, $a_2 = 0,5$ и различных $x = b_1/a_2$ приведены на фигуре, где

$$(4.9) \quad q_{kj} = c_{kj} p_{kj} / (1 - \ln(1 - b_1/a_2)), \quad c_{11} = 1, \quad c_{12} = -1, \quad c_{22} = 1/3$$

Введение коэффициентов q_{kj} имеет целью выделить логарифмическую особенность у p_{kj} в окрестности точки $b_1/a_2 = 1$. Однако физический смысл имеют именно коэффициенты p_{kj} . Используя фигуру и соотношения (4.9), можно убедиться в том, что p_{11} возрастает с уменьшением расстояния между штампами (и имеет логарифмическую особенность при $b_1/a_2 = 1$). Такое поведение коэффициента p_{11} как функции отношения b_1/a_2 объясняется тем, что он с точностью до постоянного множителя равен силе P_1 , которую необходимо приложить к внутреннему штампу, чтобы он погрузился в полупространство на единичную глубину при условии, что нормальные перемещения под внешним штампом поддерживаются равными нулю.

Коэффициент p_{22} имеет аналогичный смысл. Разница в поведении p_{11} и p_{22} состоит лишь в том, что при $b_1/a_2 \rightarrow 0$ имеем $p_{11} \rightarrow 0$, а $p_{22} \rightarrow \text{const} > 0$. Данное различие есть следствие уменьшения площади основания внутреннего штампа вплоть до нуля при $b_1/a_2 \rightarrow 0$.

Что касается коэффициента $p_{12} = p_{21}$, то он характеризует взаимное влияние штампов один на другой и качественно ведет себя так же, как p_{11} , но принимает отрицательные значения. Последнее связано с тем, что при одной и той же силе P_1 перемещение ϵ_1 будет больше, если $\epsilon_2 > 0$.



ЛИТЕРАТУРА

1. Андрейкив А. Е., Панасюк В. В. Упругое равновесие неограниченного тела, ослабленного системой концентрических трещин.— Прикл. механика, 1970, т. 6, вып. 4, с. 124—128.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Контактная задача теории упругости для системы кольцевых штампов.— Математическая физика: Сб. статей. Киев: Наук. думка, вып. 5, 1968, с. 54—57.
3. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
4. Беляев С. Ю. Электростатическая задача для диска, расположенного в соосном круглом отверстии проводящей плоскости.— Журн. техн. физики, 1980, т. 50, вып. 1, с. 24—31.
5. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство.— Инж. ж. МГТ, 1967, вып. 4, с. 108—116.
6. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк. 1977. 431 с.
7. Валов Г. Н. О действии кольцевых штампов на упругое полупространство.— Изв. АН СССР. МГТ, 1972, вып. 1, с. 143—149.

Ленинград

Поступила в редакцию
22.IX.1986