

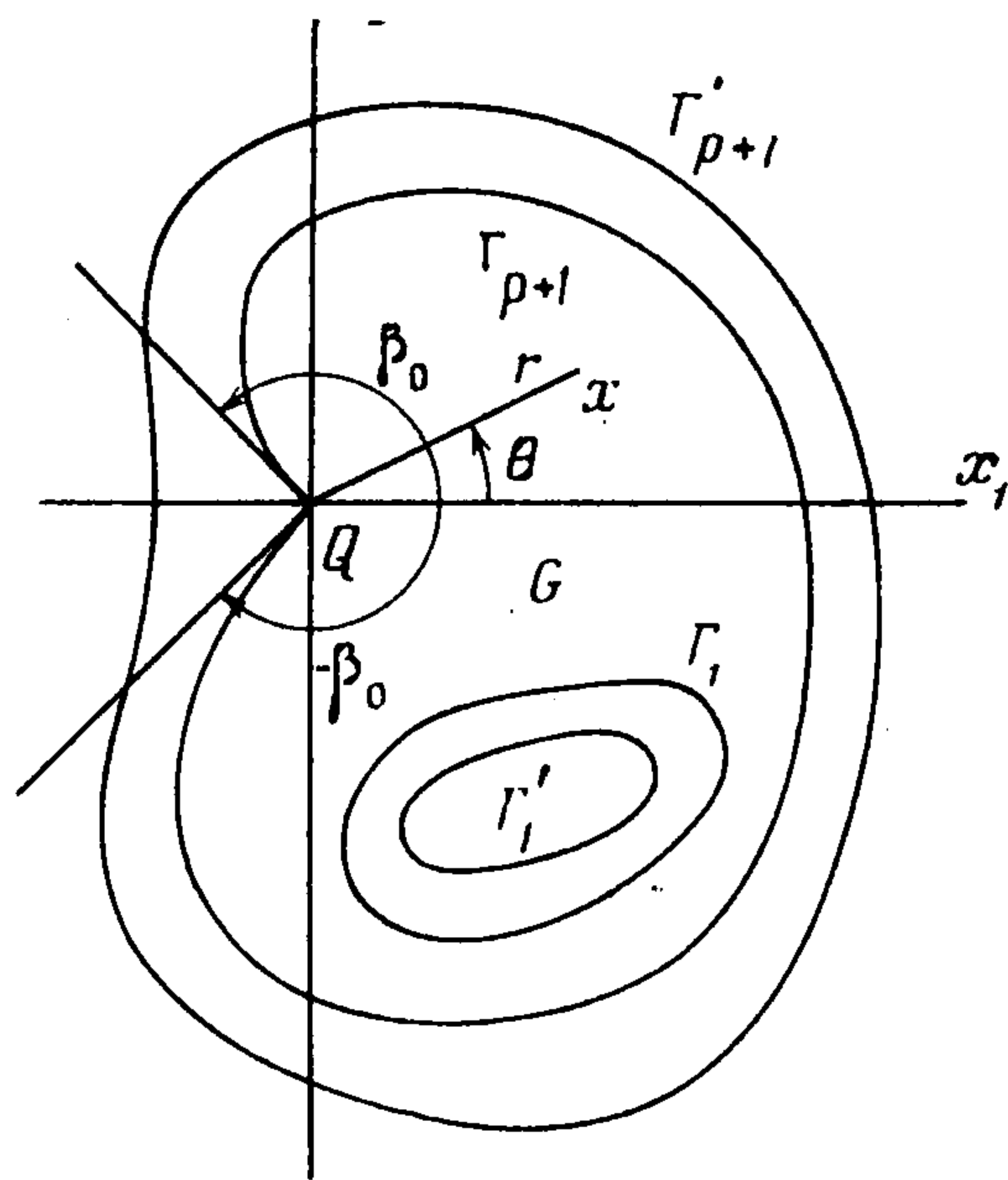
УДК 539.3

О ВЫДЕЛЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

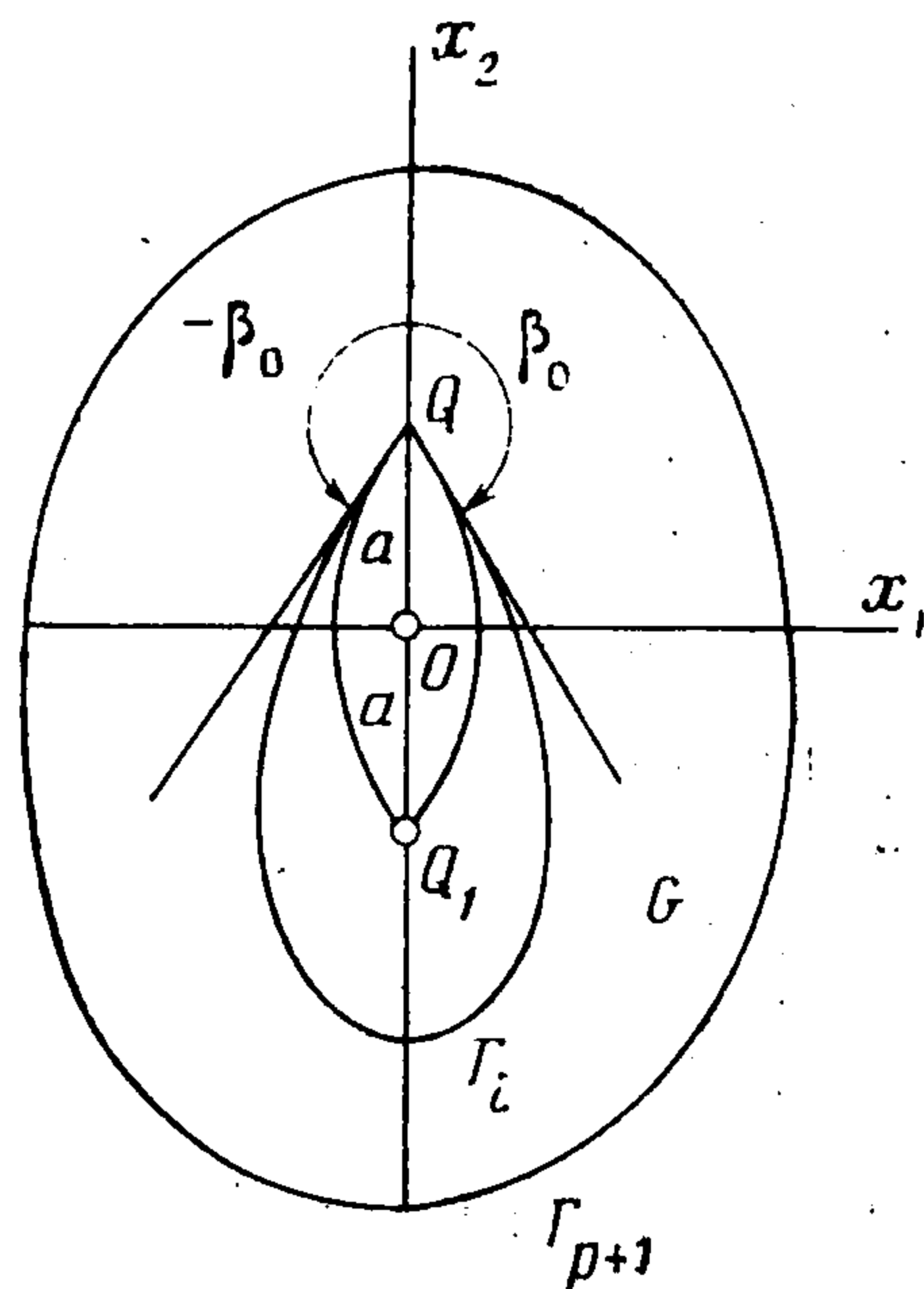
Левин А. М.

Рассматривается один общий способ выделения особенностей решений плоской задачи теории упругости, задачи изгиба тонких упругих пластинок и гармонических задач теории упругости в многосвязных областях, имеющих изломы границы. Этот способ применяется при решении указанных задач при помощи метода компенсирующих нагрузок (МКН) или метода интегральных уравнений первого рода [1—6].

В МКН компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) ищут в виде соответствующих потенциалов, распределенных не по границе области, а по отстоящим от нее на некотором удалении контурам. При подстановке потенциалов в граничные условия возникают системы интегральных уравнений первого рода относительно неиз-



Фиг. 1



Фиг. 2

вестных плотностей. Методы регуляризации решения этих уравнений рассматривались в [3—6]. Модификация МКН при наличии особенностей у компонентов НДС в угловых точках границы состоит в добавлении к потенциалам сингулярных решений однородных краевых задач для вспомогательных клиновидных областей [7—12] (фиг. 1). Однако решения для клина нельзя использовать в МКН, если исходная область многосвязна и угловые точки расположены на «внутренних» участках границы (фиг. 2). В этом случае разрез, необходимый для выделения однозначных ветвей соответствующих функций, обязательно пересекает область. Компоненты НДС оказываются разрывными внутри области и на «внешнем» участке границы, так как при обходе вокруг особой точки по замкнутому контуру сингулярные решения для клина даже при действительных собственных числах возвращаются в начало обхода с другим значением.

Рассматривается построение сингулярных решений в биполярных координатах [13], когда вместо клиновидных вспомогательных областей выбираются внешности круговых луночек с вершинами в особых точках [14]. Найденные функции имеют необходимый характер особенностей и в отличие от случая клина удовлетворяют однородным уравнениям в исходной многосвязной области.

1. Метод компенсирующих нагрузок (МКН). Пусть в области $G \subset R^2$ с границей Γ рассматривается краевая задача

$$(1.1) \quad Lw(x) = f(x), \quad x \in G$$

$$(1.2) \quad lw|_{\Gamma} = \varphi$$

где L — линейный эллиптический оператор порядка $2m$, для которого известно фундаментальное решение $K(x, y)$, $l = (l_1, \dots, l_m)$ — дифференциальные операторы граничных условий; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — заданная на Γ вектор-функция. Предполагается, что выполнены условия существования, единственности и устойчивости решения задачи (1.1), (1.2). При этом область G может быть многосвязной и неограниченной, а операторы граничных условий l могут иметь смешанный тип.

МКН состоит в следующем [1]. Рассматривается более широкая область G' ($G \subset G'$) с достаточно гладкой границей Γ' , расположенной на некотором удалении от Γ

$$(1.3) \quad d(\Gamma, \Gamma') = d > 0$$

Вдоль контура Γ' прикладываются распределенные компенсирующие нагрузки с неизвестными плотностями $z_1(y), \dots, z_m(y)$ (конкретный вид нагрузок будет указан для каждого типа задач). Приближенное решение задачи ищется в виде

$$(1.4) \quad w_z(x) = \int_G K(x, y) f(y) dy + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma'} t_j K(x, y) z_j(y) ds_y$$

где ядра $t_j K(x, y)$ — это решения уравнения (1.1) от соответствующих сосредоточенных в точке $y \in \Gamma'$ единичных нагрузок. Эти ядра получают путем применения известных дифференциальных операторов t_j к фундаментальному решению $K(x, y)$. Функция $w_z(x)$ точно удовлетворяет уравнению (1.1). Подставляя ее в граничные условия (1.2) и учитывая разнесенность контуров Γ и Γ' (1.3), получаем систему интегральных уравнений первого рода относительно вектор-функции $z(y)$

$$(1.5) \quad \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma'} K_{ij}(x, y) z_j(y) ds_y = \varphi_i(x) - \int_G l_i K(x, y) f(y) dy$$

с непрерывными ядрами $K_{ij}(x, y) = l_i t_j K(x, y)$, $i, j = 1, \dots, m$.

Совершенно аналогично применяется МКН и для решения эллиптических систем (например, в плоской задаче теории упругости). Особенность уравнений (1.5) заключается в том, что они могут не иметь точного решения $z(y)$ [3—5]. Действительно, при достаточной гладкости Γ и $f(x)$ левая часть (1.5) будет дифференцируемой на Γ при любых $z(y) \in L_1(\Gamma')$, тогда как $\varphi(x)$ может быть лишь непрерывной вектор-функцией. Тем более очевидно отсутствие точного решения у (1.5) в случае, если искомая функция $w(x)$ или ее производные имеют особенности в угловых точках границы Γ . Поэтому речь может идти лишь о приближенном решении системы (1.5) в смысле минимизации ее невязки. Возможность сколь угодно точного решения указанных интегральных уравнений для трехмерной задачи теории упругости и уравнения Лапласа в односвязных областях с достаточно гладкой границей доказана в [3].

В дальнейшем предполагается, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой вспомогательный контур Γ_ε' и вектор-функция $z_\varepsilon \in L_2(\Gamma_\varepsilon')$, при которых норма невязки (1.5) будет меньше ε [5]. Для этого необходима ε -продолжаемость решения $w(x)$ из области G в G' [3], т. е. существование для любого $\varepsilon > 0$ такого решения $w_\varepsilon(x)$ уравнения (1.1) в области G' , для которого справедливо неравенство $\|w_\varepsilon - \varphi\|_\Gamma \leq \varepsilon$ в соответствующей норме на Γ .

Задача решения интегральных уравнений первого рода является некорректно поставленной, поэтому при численной реализации МКН необходимо применение регуляризующих алгоритмов. Данные вопросы применительно к МКН исследовались в работах [3—6] и здесь не рассматриваются. Но даже при использовании методов регуляризации для задач с особенностями на границе непосредственное применение МКН оказывается неэффективным [9—11]. В этом случае удобно воспользоваться методом выделения особенностей [7—12].

Пусть граница Γ области G содержит угловую точку Q с углом $2\beta_0$ между касательными к Γ . Известно [12], что в окрестности угловой точки Q решение краевой задачи (1.1)—(1.2) (при бесконечной дифференцируемости $f(x)$, $\varphi(x)$ и Γ вблизи Q) представляется в виде суммы асимптотического ряда и бесконечно дифференцируемой функции $v_0(x)$

$$(1.6) \quad w(x) = v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x), \quad x \in G \cap U(Q)$$

Функции $v_k(x)$ — решения однородных краевых задач для некоторых модельных областей (например, бесконечных клиновидных областей [7, 8]) и зависят только от угла $2\beta_0$ и типа граничных условий. Для рассматриваемых задач теории упругости способы построения таких решений хорошо изучены (см. [7—12] и имеющуюся там библиографию). При этом в представлении (1.6) входят лишь те решения, которые приводят к конечной энергии [12].

Приближенное решение краевой задачи теперь ищется в виде

$$(1.7) \quad w_{c,z}(x) = \sum_{k=1}^{N_Q} c_k v_k(x) + w_z(x)$$

где $c = (c_1, \dots, c_{N_Q})$ — неизвестные коэффициенты, $w_z(x)$ имеет вид (1.4), а число N_Q выбирается таким, чтобы у оставшегося в (1.6) решения $w(x)$ после вычитания N_Q членов ряда не было особенностей в компонентах НДС [10]. Возникающие при подстановке $w_{c,z}(x)$ в граничные условия (1.2) интегрофункциональные уравнения решаются методом регуляризации относительно коэффициентов c и плотностей z [9, 10]. Затем путем непосредственного (в силу условия (1.3)) применения к приближенному решению $w_{c,z}(x)$ соответствующих дифференциальных операторов определяются компоненты НДС внутри G и на Γ .

Ниже данная методика рассматривается отдельно для каждого типа краевых задач.

2. Гармонические задачи. Пусть область G ограничена $p + 1$ замкнутыми контурами $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{p+1}$, $p \geq 0$, где Γ_{p+1} — внешний контур, охватывающий при $p > 0$ остальные. Соответственно, Γ' состоит из контуров $\Gamma_1', \dots, \Gamma_{p+1}'$. Приближенное решение уравнения Пуассона $-\Delta w(x) = f(x)$, $x \in G$ ищется в виде суммы частного решения

$$w_0(x) = \int_G K(x, y) f(y) dy = \int_G \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} f(y) dy$$

и потенциала простого слоя [3, 4] (t_1 — тождественный оператор на Γ') или потенциала двойного слоя [9] ($t_1 = \partial/\partial n_y$ — оператор производной по нормали к Γ' в точке y).

Если угловая точка Q расположена на Γ_{p+1} (фиг. 1), то рассматривается бесконечная клиновидная область, ограниченная касательными к Γ_{p+1}

в точке Q и имеющая угол раствора $2\beta_0$. Сингулярные решения уравнения Лапласа, ограниченные в окрестности угловой точки, ищут в виде

$$(2.1) \quad v_k(r, \theta) = r^{\lambda_k} [A_k \cos \lambda_k \theta + B_k \sin \lambda_k \theta], \quad \lambda_k > 0$$

где r, θ — полярные координаты с началом в точке Q и полярной осью, являющейся биссектрисой угла [12]. Числа λ_k, A_k, B_k находят при подстановке (2.1) в однородные граничные условия при $\theta = \pm\beta_0$. Для задачи Дирихле и Неймана $\lambda_k = \pi k / (2\beta_0)$, $k = 1, \dots$, для смешанной задачи ($\partial w(r, \beta_0) / \partial \theta = 0, w(r, -\beta_0) = 0$) $\lambda_k = -\pi / (4\beta_0) + \pi k / (2\beta_0)$, $k = 1, \dots$. Коэффициенты A_k и B_k выписаны в [12].

В выражении (1.7) достаточно брать только первый член разложений (2.1) с $0 < \lambda_1 < 1$ при $2\beta_0 > \pi$ (задачи Дирихле и Неймана) или при $2\beta_0 > \pi/2$ (смешанная задача). В этом случае у сингулярного решения $v_1(x)$ не ограничены производные в точке Q .

Однако если угловая точка Q расположена на внутренней компоненте границы Γ_i , $1 \leq i \leq p$, то сингулярные решения вида (2.1) оказываются разрывными в области G , так как при обходе вокруг точки Q по лежащему в G замкнутому контуру или по Γ_{p+1} функции вида (2.1) возвращаются в начало обхода с новым значением. Для данного случая предлагается следующее [14]. Рассматривается симметричная круговая луночка размера $2a$ с одной из вершин в точке Q , с другой вершиной Q_1 внутри контура Γ_i ($Q_1 \notin \bar{G}$) и углом между касательными $2\beta_0$ (фиг. 2). Основываясь на том, что характер особенностей сингулярных решений v_k зависит только от угла раствора и граничных условий на Γ_i вблизи точки Q , вместо клиновидной области выбирается внешность указанной луночки. Функции v_k записывают в модифицированных биполярных координатах [12]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_1 &= h \sin \beta, \quad x_2 = h \operatorname{sh} \alpha, \quad h = a / (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \\ x &= (x_1, x_2), \quad -\infty < \alpha < +\infty, \quad -\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0 \end{aligned}$$

Решения $v_k(\alpha, \beta)$ ищут в виде произведений $\rho_k(\alpha)\omega_k(\beta)$. Применяя к $v_k(\alpha, \beta)$ оператор Лапласа $\Delta = h^{-2}(\partial^2/\partial\alpha^2 + \partial^2/\partial\beta^2)$ и учитывая требование ограниченности решения в окрестности точки Q (при $\alpha \rightarrow +\infty$), имеем

$$(2.3) \quad v_k(\alpha, \beta) = \exp(-\lambda_k \alpha) [A_k \cos \lambda_k \beta + B_k \sin \lambda_k \beta]$$

При подстановке (2.3) в граничные условия при $\beta = \pm\beta_0$ получают выражения для λ_k, A_k, B_k , аналогичные рассмотренным. Очевидно, что функции $v_k(\alpha, \beta)$ и их производные непрерывны во внешности луночки. Они не ограничены при стремлении к вершине Q_1 (при $\alpha \rightarrow -\infty$), но точка Q_1 располагается в дополнении к \bar{G} , поэтому функции $v_k(\alpha, \beta)$ ограничены в \bar{G} .

3. Плоская задача теории упругости. Пусть область G удовлетворяет условиям п. 2. Плоская деформация описывается эллиптической системой дифференциальных уравнений относительно смещений $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ [15]

$$(3.1) \quad (\lambda + \mu) \partial \Theta / \partial x_n + \mu \Delta u_n + X_n = 0, \quad n = 1, 2,$$

$$\Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, X_1, X_2 — объемные силы). На Γ ставятся два граничных условия.

В качестве компенсирующих нагрузок выбираются распределенные по Γ' и лежащие в плоскости $x_1 O x_2$ усилия $z_1(y)$, $z_2(y)$. Фундаментальная матрица $K_{ij}(x, y)$ ($i, j = 1, 2$) находится по хорошо известным выражениям для напряжений и смещений при действии на плоскость сосредоточенных сил [15]. Формулы для плоского напряженного состояния получаются, как обычно, заменой λ на $\lambda^* = E\nu/(1 - \nu)$.

С целью повышения устойчивости численной реализации МКН рекомендуется выбирать в качестве вспомогательного контура Γ' ломаную и кусочно-полиномиальные компенсирующие нагрузки z_1, z_2 . В этом случае для основных типов граничных задач плоской теории упругости интегралы левой части равенства (1.5) вычисляются в замкнутой форме.

Методы выделения особенностей для бесконечных клиновидных областей (когда $Q \in \Gamma_{p+1}$) изучались в [7, 8, 11, 12] и многих других работах. Например, функция Эри в полярных координатах r, θ имеет вид [7, 8]

$$(3.2) \quad U_k(r, \theta) = r^{\lambda_k+1} [A_k \cos(\lambda_k + 1)\theta + B_k \sin(\lambda_k + 1)\theta + C_k \cos(\lambda_k - 1)\theta + D_k \sin(\lambda_k - 1)\theta] = r^{\lambda_k+1} g_k(\theta)$$

где числа λ_k (в общем случае комплексные) определяются из решения соответствующих трансцендентных уравнений. В формуле (1.7) следует оставлять сингулярные решения ν_k с числами $0 < \operatorname{Re} \lambda_k < 1$, которым для критических значений углов $2\beta_0$ отвечают неограниченные в точке Q напряжения и выполняется условие конечности энергии [12].

Для определения сингулярных решений в биполярных координатах (2.2) воспользуемся следующим представлением бигармонического оператора [13]:

$$\Delta^2 U(\alpha, \beta) = \frac{1}{h^3} \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] \left(\frac{U}{h} \right)$$

Используя для функции U/h метод разделения переменных, аналогичный описанному в п. 2, находим функции напряжений

$$(3.3) \quad U_k(\alpha, \beta) = h \exp(-\lambda_k \alpha) g_k(\beta)$$

где $g_k(\beta)$ имеют вид (3.2). Характер особенностей функций $U_k(\alpha, \beta)$ в точке Q (при $\alpha \rightarrow +\infty$) такой же, что и в (3.2), но $U_k(\alpha, \beta)$ однозначны во внешности луночки. Выражения для компонентов тензора напряжений $\sigma_\alpha^k, \sigma_\beta^k, \tau_{\alpha\beta}^k$ получаются из функции Эри U_k по формулам [13]

$$\begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left[\frac{a}{h} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] \left(\frac{U}{h} \right) \\ a\sigma_\beta &= \left[\frac{a}{h} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] \left(\frac{U}{h} \right) \\ a\tau_{\alpha\beta} &= - \frac{a}{h} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \left(\frac{U}{h} \right) \end{aligned}$$

Для вычисления смещений воспользуемся их комплексным представлением [15]. Обозначим $z = x_1 + ix_2$, $\gamma = \alpha + i\beta$. Формулы (2.2) переписываются в виде $z = ai \operatorname{cth} \frac{1}{2} \gamma$. В обозначениях [15] имеем $P_k(\gamma) = \Delta U_k(\gamma)$, $f_k(\gamma) = P_k(\gamma) + iQ_k(\gamma)$, где $Q_k(\gamma)$ — сопряженная с $P_k(\gamma)$ гармоническая функция. Она может быть найдена с точностью до по-

стоянной следующим образом [15]:

$$Q_k(\gamma) = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\partial P_k}{\partial \beta}(\alpha, \beta_0) d\alpha + \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\partial P_k}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) d\beta$$

Окончательно получаем $f_k = 4\mu (\Lambda_k^+ \xi_k - \Lambda_k^- \zeta_k)$, где $\xi_k = A_k + iB_k$, $\zeta_k = C_k + iD_k$, $\Lambda_k^{\pm} = (\lambda_k \pm 1) \exp(-\lambda_k \gamma) - \lambda_k \exp[-(\lambda_k \pm 1)\gamma]$. Функции $\varphi_k(\gamma)$ (см. [15]) выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_k(\gamma) &= \frac{1}{4} \int f_k(z) dz = - \frac{1}{4} \int f_k(\gamma) \frac{ai d\gamma}{\operatorname{ch} \gamma - 1} = \\ &= \frac{2\mu ai}{\operatorname{exp} \gamma - 1} \{ \operatorname{exp}(-\lambda_k \gamma) \xi_k + \operatorname{exp}[-(\lambda_k - 1)\gamma] \zeta_k \} \end{aligned}$$

Заметим, что функцию напряжения $U_k(\gamma)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} U_k(\gamma) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{4\mu a^2}{(\operatorname{exp} \gamma - 1)(\overline{\operatorname{exp} \gamma - 1})} \times \right. \\ &\times \left. [\overline{\operatorname{exp} \gamma \operatorname{exp}(-\lambda_k \gamma) \xi_k} + \operatorname{exp}[-(\lambda_k - 1)\gamma] \zeta_k] \right\} \end{aligned}$$

(черта означает комплексное сопряжение). Отсюда и из формулы $U_k = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi_k(z) + \chi_k(z)]$ получаем

$$\chi_k(\gamma) = 2\mu a^2 (\operatorname{exp} \gamma - 1)^{-1} \{ \operatorname{exp}(-\lambda_k \gamma) \xi_k - \operatorname{exp}[-(\lambda_k - 1)\gamma] \zeta_k \}$$

Продифференцировав по z , имеем для $\psi_k(z) = \chi_k'(z)$ $\psi_k(\gamma) = -\mu ai (\Lambda_k^+ \xi_k + \Lambda_k^- \zeta_k)$.

Выражения для смещений u_1, u_2 и u_α, u_β получаются из формулы [15]

$$(3.4) \quad 2\mu (u_1 + iu_2) = \kappa \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

и легко выводимой формулы $h(\operatorname{ch} \gamma - 1)(u_\alpha + iu_\beta) = ia(u_1 + iu_2)$.

В (3.4) компоненты смещений u_1, u_2 задаются в системе координат x_1, x_2 , начало которой находится в середине отрезка QQ_1 , а ось Ox_2 проходит через вершины луночки Q и Q_1 (фиг. 2). Все найденные выше компоненты НДС могут быть записаны в этой системе координат с помощью замены $\operatorname{exp} \gamma = (z + ia)(z - ia)^{-1}$. Из полученных формул вытекает однозначность компонентов НДС сингулярных решений во внешности луночки и, следовательно, в области G .

4. Задача изгиба пластинок. Прогиб $w(x)$ тонкой упругой пластинки удовлетворяет уравнению Софи Жермен

$$(4.1) \quad \Delta^2 w(x) = q(x)/D, \quad x \in G$$

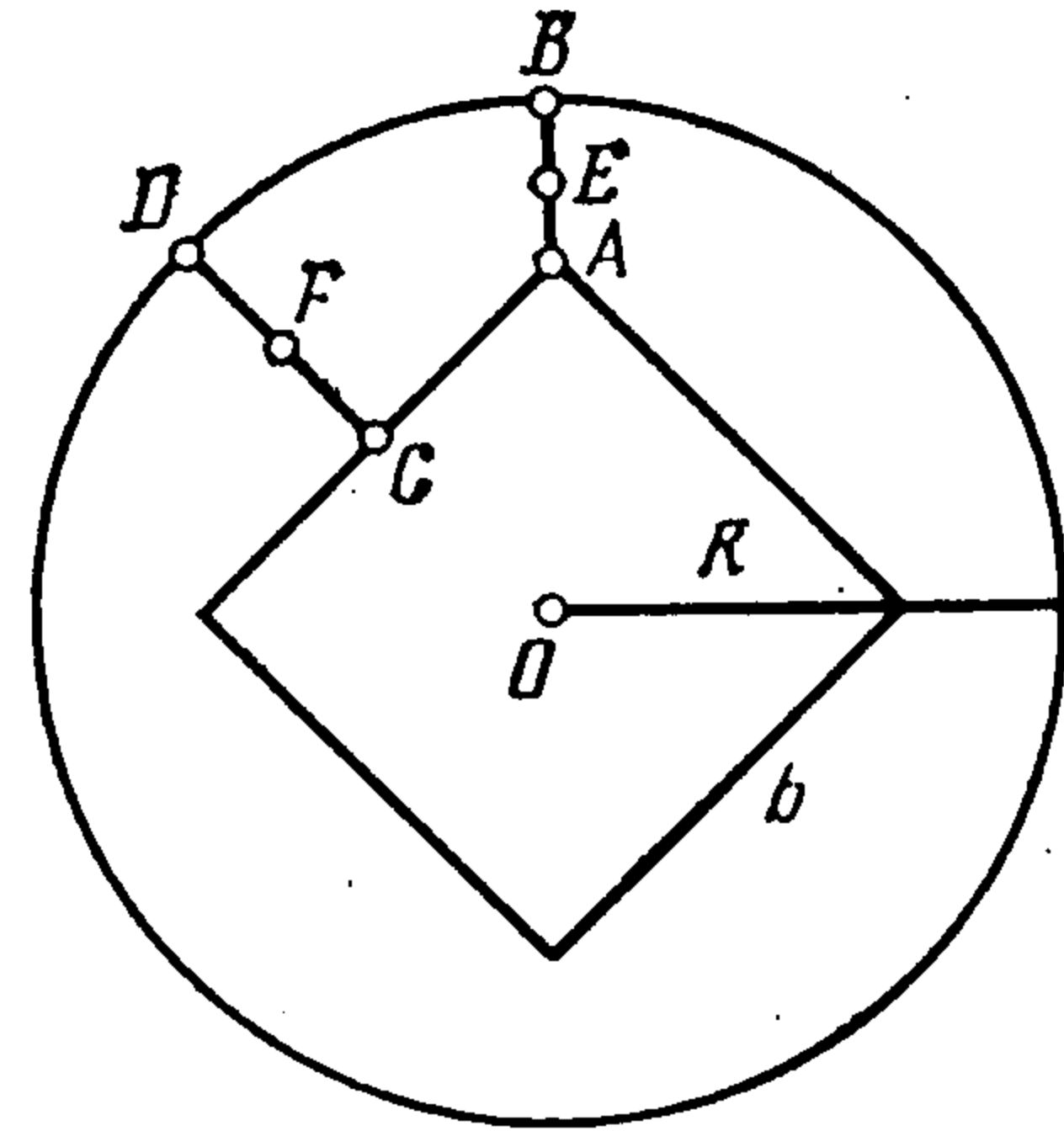
где D — цилиндрическая жесткость пластинки, $q(x)$ — плотность распределенной нормальной нагрузки. На границе Γ ставятся два граничных условия. В качестве компенсирующих нагрузок к Γ' прикладываются нормальные силы $z_1(y)$ и изгибающие моменты $z_2(y)$ [1, 5, 6]. Соответствующие фундаментальные решения имеют вид [5, 6]

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= (8\pi D)^{-1} |x - y| \ln |x - y|^2, \quad K_2(x, y) = \\ &= -\partial K_1(x, y)/\partial n_y \end{aligned}$$

Формулы для сингулярных решений однородного бигармонического уравнения фактически выписаны в п. 3 ((3.2), (3.3)) [10, 14]. Другие компоненты НДС находятся в полярных и биполярных координатах путем применения известных дифференциальных операторов. В (1.7) включа-

ются сингулярные решения с числами $0 < \operatorname{Re} \lambda_k < 2$. У таких решений есть особенности в моментах (при $0 < \operatorname{Re} \lambda_k < 1$) и перерезывающих силах.

В качестве примера рассмотренной методики приведем решение задачи изгиба заземленной по контуру пластинки (фиг. 3) под действием равномерно распределенной нагрузки с плотностью $q(x)/D \equiv 1$. Радиус окружности $R = 1$, длина стороны квадрата $b = 0,5$. Частное решение уравнения (4.1) имеет вид $w_0(x) = (64D)^{-1} (x_1^2 + x_2^2)^2$. При численном решении брались кусочно-постоянные компенсирующие нагрузки и интегралы вычислялись в замкнутой форме. Для понижения порядка получающейся системы линейных алгебраических уравнений учитывалась симметрия задачи.



Фиг. 3

Для выделения особенностей в каждый из четырех входящих углов вписывались луночки ($2\beta_0 = 3\pi/2$, $2a = 0,2$). Числа λ_k определялись из решения уравнения [8, 11] $\lambda_k \sin 2\beta_0 \pm \sin(2\beta_0 \lambda_k)$. В силу симметрии задачи относительно биссектрис входящих углов, в (1.7) включались только симметричные решения (соответствующие знаку плюс в уравнении) с числами $0 < \operatorname{Re} \lambda_k < 2$: $\lambda_1 = 0,544484$, $\lambda_2 = 1,62926 + i0,231251$ $v_k(\alpha, \beta) = h \exp(-\lambda_k \alpha) [\cos(\lambda_k - 1)\beta_0 \cos(\lambda_k + 1)\beta - \cos(\lambda_k + 1)\beta_0 \cos(\lambda_k - 1)\beta]$.

Для комплексного λ_2 использовались $\operatorname{Re} v_2(\alpha, \beta)$ и $\operatorname{Im} v_2(\alpha, \beta)$. Расстояние Δ' до вспомогательного контура Γ' варьировалось в пределах $0,01 - 0,3$, при $\Delta' = 0,1$ не-

N_Q	$c_1 \cdot 10^3$	$c_2 \cdot 10^3$	$c_3 \cdot 10^3$	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$
0				28,8	26,2
1	3,80			1,8	0,56
2	3,37	2,26		0,20	0,08
3	3,35	2,45	0,09	0,11	0,08

вязки системы (1.5) были наименьшими. Настоящий метод сравнивался с МКН без выделения особенностей.

Результаты счета на ЭВМ для $\Delta' = 0,1$ и различных чисел N_Q используемых сингулярных решений представлены в таблице (число участков разбиения $1/8$ симметричной части Γ' — по 5, количество точек разбиения соответствующих участков Γ — по 20, см. [5]). Через c_1, c_2, c_3 обозначены найденные коэффициенты при сингулярных членах $v_k(\alpha, \beta)$; δ_1 и δ_2 — отношения погрешностей в граничных условиях $w|_{\Gamma} = 0$, $\theta_n = \partial w / \partial n|_{\Gamma} = 0$ к максимальным w и θ внутри области (в %). Максимальные прогибы на отрезках AB и CD получились $w_E = 5,753 \cdot 10^{-4}$ ($|AE| = 0,45 |AB|$), $w_F = 6,997 \cdot 10^{-4}$ ($|CF| = 0,5 |CD|$).

Из результатов счета следует, что выделение особенностей качественно улучшает решение задач в нерегулярных областях при помощи МКН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев Б. Г. Метод компенсирующих нагрузок в приложении к задачам о равновесии, колебаниях и устойчивости плит и мембран. — ПММ, 1940, т. 4, вып. 5—6, с. 61—72.
2. Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач. — Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1964, т. 4, № 4, с. 683—715.
3. Кочетов И. И., Рахматулина А. Х. Решение некоторых краевых задач для эллиптических уравнений с помощью интегральных уравнений 1-го рода. — Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1974, т. 215, № 3, с. 532—534.
4. Тихонов А. Н., Кочетов И. И., Пергамент А. Х. Некоторые аспекты метода регуляризации при решении краевых задач для эллиптических уравнений. — Газовая и волновая динамика: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1979, вып. 3, с. 29—34.
5. Венцель Э. С., Кобылинский В. Г., Левин А. М. Применение метода регуляризации для численного решения задачи изгиба тонких упругих пластинок. — Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1984, т. 24, № 2, с. 323—328.

6. Венцель Э. С., Кобылинский В. Г., Левин А. М. Некоторые вопросы применения метода регуляризации для решения бигармонических задач теории упругости.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 3, с. 25—28.
7. Китовер К. А. Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 6, с. 739—748.
8. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, с. 132—135.
9. Левин А. М. О выделении особенностей при решении эллиптических краевых задач методом интегральных уравнений I рода.— Докл. АН УзССР, 1985, № 1, с. 17—19.
10. Венцель Э. С., Кобылинский В. Г., Левин А. М. Об учете особенностей при численной реализации метода компенсирующих нагрузок в бигармонических задачах теории упругости.— Проблемы машиностроения: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1986, вып. 25, с. 16—18.
11. Зиновьев Б. М., Карманова Т. Ф. К вопросу о численном решении задач теории упругости с учетом особенностей напряжений.— Сопротивление материалов и теория сооружений: Сб. статей. Киев: Будівельник, 1981, вып. 38, с. 109—113.
12. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
13. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 232 с.
14. Левин А. М. О решении бигармонических задач теории упругости в нерегулярных областях методом интегральных уравнений I рода.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. симпоз. «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики». Харьков: Изд-во ХВВАИУ, 1985, с. 63—65.
15. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Ворошиловград

Поступила в редакцию
13.I.1986.