Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 521.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Косенко И. И.

Рассматривается равномерно вращающийся неоднородный гравитирующий эллипсоид. Плотность постоянна на каждой эллипсоидальной поверхности из числа подобных. Материальная точка может свободно двигаться в пространстве, заполненном гравитирующей массой. Формулируются условия существования относительных равновесий, исследуется их устойчивость. Результаты интерпретируются с точки зрения динамики звездных систем.

1. Существование равновесий. Гравитирующий эллипсоид имеет полуоси a_1, a_2, a_3 и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг одной из них (a_3). В отличие от работы [1] предполагается, что он неоднородный. Плотность распределена по эллипсоидальному закону — она постоянна на эллипсоидальных поверхностях, подобных заданной. Начало вращающейся вместе с эллипсоидом системы координат x_i ($i = 1$, 2, 3) расположено в его центре, а координатные оси направлены вдоль полуосей a_i ($i = 1, 2, 3$) соответственно.

Приняв в качестве характерного размера и времени величины $l = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$ и $T = 1/\omega$, перейдем к новым (безразмерным) переменным по формулам $x_i = l\xi_i$ ($i = 1, 2, 3$), $t = T\tau$. Уравнения движения пассивной частицы имеют гамильтонов вид

$$\xi^{\bullet} = H_\eta, \quad \eta^{\bullet} = -H_\xi; \quad \xi, \eta \in \mathbf{R}^3 \tag{1.1}$$

$$H = \frac{1}{2}\|\eta\|^2 + \eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1 - \Lambda(\xi), \quad \Lambda(\xi) = \rho\int_0^\infty h[\mu(u, \xi)]\frac{du}{Q(u)}$$

$$\mu(u, \xi) = \sum_{k=1}^3 \frac{\xi_k^2}{\alpha_k + u}, \quad \rho = \frac{3fm}{4\omega^2 l^3}, \quad h(\mu) = \int_\mu^\infty \gamma(v)\,dv$$

$$\int_0^\infty \gamma(u^{2/3})\,du = 1$$

$$\gamma(\mu) = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{3m}\delta_1(\mu), \quad Q(u) = [(\alpha_1 + u)(\alpha_2 + u)(\alpha_3 + u)]^{1/2}$$

$$\delta_1[\mu(0, \xi)] = \delta(l\xi), \quad \|\eta\| = (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)^{1/2}, \quad a_i^2 = l\alpha_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Функция δ_1 характеризует величину плотности на эллипсоидальном слое, f — гравитационная постоянная, m — полная масса всего эллипсоида. В качестве пассивной частицы можно представить себе звезду внутри эллиптической галактики.

Положения равновесия находим из условия: $H_\xi = H_\eta = 0$.

Более подробно:

$$H_{\xi_1} = -\eta_2 - \Lambda_{\xi_1} = 0, \; H_{\xi_2} = \eta_1 - \Lambda_{\xi_2} = 0, \; H_{\xi_3} = -\Lambda_{\xi_3} = 0$$

$$H_{\eta_1} = \eta_1 + \xi_2 = 0, \; H_{\eta_2} = \eta_2 - \xi_1 = 0, \; H_{\eta_3} = \eta_3 = 0$$

В конфигурационном пространстве получим систему уравнений

$$\xi_1 + \Lambda_{\xi 1} = \xi_2 + \Lambda_{\xi 2} = \Lambda_{\xi 3} = 0$$

Если на распределение масс наложить даже такое слабое условие, как $\gamma \in L_1(\mathbf{R}_+)$, то справедливо включение [2] $\Lambda \in C^1(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$. Поэтому можно явно вычислить производные $\Lambda_{\xi i} = -2\rho\xi_i F_i(\xi)$, где

$$F_i(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}_+} \frac{\gamma[\mu(u, \xi)]}{(\alpha_i + u) Q(u)} du \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Уравнения равновесия примут вид

$$\xi_i(1 - 2\rho F_i(\xi)) = 0 \ (i = 1, 2), \ \xi_3 \rho F_3(\xi) = 0 \tag{1.3}$$

Рассмотрим различные случаи наличия решений у этих уравнений.

Если $\xi_3^\circ \neq 0$, то $F_3(\xi^\circ) = 0$. Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, то должно быть $\gamma[\mu(u, \xi^\circ)] \equiv 0$ при $u \in \mathbf{R}_+$ почти всюду. Поэтому $\gamma(\mu) = 0$ почти всюду при $\mu \in [0, \mu(0, \xi)]$. Это означает, что эллипсоид $\mu(0, \xi) = \mu(0, \xi^\circ)$ ограничивает в $\mathbf{R}^3$ область, заполненную вакуумом. Эта область не может простираться неограниченно, поскольку общая масса эллипсоида заведомо ненулевая.

Внутри области $\gamma[\mu(u, \xi)] = 0$, поэтому $F_i(\xi) = 0$. Отсюда и из (1.3) следует, что $\xi_1 = \xi_2 = 0$, т. е. равновесия должны быть не изолированы и заполнять участок оси вращения, лежащий в полости.

В звездной динамике эллипсоидальные объекты с пустотой в центральной области не представляют интереса. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать точки либрации, не лежащие на оси вращения. Из (1.3) сразу получаем $\xi_3^\circ = 0$, и все особые точки, если они существуют, лежат в экваториальной плоскости.

Если $1 - 2\rho F_i(\xi^\circ) \neq 0$, то должно быть $\xi_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ — центр эллипсоида.

Остается возможность $1 - 2\rho F_i(\xi^\circ) = 0$. При этом $1 - 2\rho F_j(\xi^\circ) \neq 0$ $(j \neq i)$, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Иначе должно быть $\alpha_1 = \alpha_2$ и эллипсоид будет сфероидом, а равновесия заполняют окружность.

В любом случае достаточно ограничиться вариантом $i = 1$. Вариант $i = 2$ в силу симметрии изучается аналогично. Если $1 - 2\rho F_1(\xi^\circ) = 0$, то из (1.3) должно быть $\xi_2^\circ = 0$. Поэтому положение равновесия находится на оси ξ_1 и задача отыскания точек либрации свелась к поиску решений уравнения

$$f(\xi_1) \equiv 1 - 2\rho F_1(\xi_1, 0, 0) = 0 \tag{1.4}$$

Наличие корней этого уравнения и их количество зависит не только от значений параметров, но и от функции γ. В случае реальных эллиптических галактик в качестве γ можно взять непрерывную монотонно убывающую функцию.

Теорема 1. Если плотность $\gamma \in L_1(\mathbf{R}_+)$ определена всюду на $\mathbf{R}_+$ и не возрастает с ростом аргумента, то для существования точки либрации необходимо выполнение условия

$$1 - 2\rho\gamma(0+) A_1 \leqslant 0$$

$$\gamma(0+) = \lim_{\mu \to 0+} \gamma(\mu), \quad A_i = \int\limits_0^\infty \frac{du}{(\alpha_i + u) Q(u)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

При этом справедлива альтернатива:

1°. Равновесие существует и единственно только тогда, когда

$$1 - 2\rho\gamma\,(0+)\,A_1 < 0$$

2°. Если равновесие неединственно, то оно неизолировано. Решения уравнения (1.4) заполняют отрезок оси ξ_1, примыкающий к началу координат, а плотность постоянна на всем семействе эллипсоидальных поверхностей, проходящих через этот отрезок.

Доказательство. Функция f имеет в нуле правый предел $f(\xi_1) \to 1 - 2\rho\gamma\,(0+)\,A_1$ при $\xi_1 \to 0+$.

В самом деле, поскольку функция γ определена и монотонна на $\mathbf{R}_+$, то она имеет правый предел в нуле. Поэтому для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $|\,\xi_1^2/\alpha_1\,| < \delta$ выполнено неравенство $\gamma\,(0+) - \varepsilon < \gamma\,(\xi_1^2/\alpha_1) \leqslant \gamma\,(0+)$. В силу монотонности γ при $u \in \mathbf{R}_+$ будет также выполняться неравенство $\gamma\,(0+) - \varepsilon < \gamma\,[\xi_1^2/(\alpha_1+u)] \leqslant \gamma\,(0+)$, откуда получаем $[\gamma\,(0+) - \varepsilon]\,A_1 < F_1\,(\xi_1, 0, 0) \leqslant \gamma\,(0+)\,A_1$. Поэтому существует предел: $F_1\,(\xi_1, 0, 0) \to \gamma\,(0+)\,A_1$ при $\xi_1 \to 0+$.

Снова в силу монотонности γ функция f также монотонна. Из [2] следует, что $f(\xi_1)$ непрерывна при $\xi_1 \in (0, +\infty)$. Кроме того, $f(\xi_1) \to 1$ при $\xi_1 \to +\infty$.

Действительно, γ удовлетворяет условию конечности массы, приведенному среди формул (1.1), которое для точки, лежащей на оси ξ_1, может быть представлено в виде

$$\frac{3}{2}\xi_1^3\int\limits_0^\infty \frac{\gamma\,[\xi_1^2/(\alpha_1+u)]}{(\alpha_1+u)^{3/2}}\,du = \int\limits_0^a \gamma\,(v^{2/3})\,dv \leqslant c_1 < +\infty, \qquad a = \frac{\xi_1^3}{\alpha_1^{3/2}}$$

где $c_1 > 0$ — постоянная. Поскольку при $u \to +\infty$ существует предел: $(\alpha_2+u)\,(\alpha_3+u)/(\alpha_1+u)^2 \to 1$, то можно подобрать такую постоянную c_2, что $[(\alpha_2+u)\,(\alpha_3+u)]^{-1/2} \leqslant c_2\,/(\alpha_1+u)$ при всех $u \in \mathbf{R}_+$.

Поэтому окончательно имеем оценку: $|\,F_1\,(\xi_1, 0, 0)\,| \leqslant 2c_1c_2/(3\xi_1^3) \to 0$ при $\xi_1 \to +\infty$.

Итак, если существует равновесие при $\xi_1^\circ > 0$, то с необходимостью должно быть $f\,(0+) \leqslant 0$. Первая часть теоремы доказана.

Далее, если ненулевое решение (1.4) единственно, то должно быть $f\,(0+) < 0$. Поскольку, если $f\,(0+) = 0$, то вследствие монотонности $f(\xi_1) = 0$ при всех $\xi_1 \in (0, \xi_1^\circ)$, что противоречит единственности.

Обратно, пусть $f\,(0+) < 0$ и в то же время единственность нарушена, т. е. при $\xi_1', \xi_1'' > 0$, $\xi_1' < \xi_1''$, имеем $f(\xi_1') = f(\xi_1'') = 0$. Тогда $F_1\,(\xi_1'', 0, 0) - F_1\,(\xi_1', 0, 0) = 0$. Так как $\gamma\,[(\xi_1'')^2/(\alpha_1+u)] \leqslant \gamma\,[(\xi_1')^2/(\alpha_1+u)]$ в силу монотонности γ, то при всех $u \in \mathbf{R}_+$ должно быть

$$\gamma\,[(\xi_1'')^2/(\alpha_1+u)] \equiv \gamma\,[(\xi_1')^2/(\alpha_1+u)] \tag{1.5}$$

Можно показать, что $\gamma\,(\mu) \equiv \mathrm{const}$ при $\mu \leqslant (\xi_1'')^2/\alpha_1$.

Определим величину u_1 из уравнения $(\xi_1'')^2/(\alpha_1+u_1) = (\xi_1')^2/\alpha_1$. Получим $u_1 = \alpha_1\,[(\xi_1''/\xi_1')^2 - 1] = \alpha > 0$.

Индуктивно предположим, что для величин u_k $(k \leqslant n)$, удовлетворяющих уравнению

$$(\xi_1'')^2\Big(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{k-1} u_i + u_k\Big)^{-1} = (\xi_1')^2\Big(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{k-1} u_i\Big)^{-1}$$

выполнено неравенство $u_k \geqslant \alpha$. Это же верно и для u_{n+1}, поскольку

$$u_{n+1} = \Big(\alpha_1 + \sum_{k=1}^{n} u_k\Big)\,[(\xi_1''/\xi_1')^2 - 1] \geqslant \alpha$$

Поэтому ряд $u_1 + u_2 + \ldots$ расходится, что и позволяет доказать постоянство γ. В самом деле, $\gamma\,[(\xi_1'')^2/(\alpha_1 + u_1)] = \gamma\,[(\xi_1')^2/\alpha_1] = \gamma\,[(\xi_1'')^2/\alpha_1]$ и из-за монотонности γ на всем отрезке $[0, u_1]$ при $u \in [0, u_1]$ выполнено равенство

$$\gamma\,[(\xi_1'')^2/(\alpha_1 + u)] = \gamma\,[(\xi_1'')^2/\alpha_1] = \text{const}$$

Используя тождество (1.5), функцию в левой части (1.5) можно непрерывно продолжать с $[0, u_1]$ на $[0, u_1 + u_2]$ и т. д. на любой отрезок $[0, u_1 + u_2 + \ldots + u_n]$. Поскольку верхний предел — частичная сумма расходящегося ряда, то продолжение допустимо на весь полубесконечный интервал $[0, +\infty)$.

Поэтому $\gamma(\mu) = \text{const} = \gamma(0+)$ при $\mu \in (0, (\xi_1'')^2/\alpha_1]$. Отсюда $f(\xi_1'') = f(0+) = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, точка либрации должна быть только одна.

Из проведенного доказательства также видно, что при нарушении единственности положения равновесия заполняют отрезок $[0, (\xi_1'')^2/\alpha_1]$ оси ξ_1, а плотность на соответствующем семействе эллипсоидов постоянна. Теорема доказана.

2. Устойчивость. По аналогии с [1] перейдем к локальным координатам каноническим преобразованием $(\xi, \eta) \mapsto (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ при помощи производящей функции $W(\xi, \mathbf{p}) = (\xi - \xi^\circ, \mathbf{p} + \eta^\circ)$, где $(\xi^\circ, \eta^\circ) = (\xi_1^\circ, 0, 0, 0, \xi_1^\circ, 0)$ — положение равновесия гамильтоновой системы, если оно существует, соответствующее точке либрации. Формулы преобразования: $\mathbf{q} = W_{\mathbf{p}} = \xi - \xi^\circ$, $\eta = W_\xi = \mathbf{p} + \eta^\circ$.

Функция Гамильтона может быть разложена в степенной ряд в окрестности положения равновесия (если плотность обладает требуемой гладкостью)

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{p}\|^2 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_k(\mathbf{q})$$

где H_k — однородные формы от фазовых переменных степени k, Λ_k — однородные формы от координат в разложении потенциала в окрестности $\xi = \xi^\circ$ [2].

В точке либрации Λ_2 зависит только от квадратов ξ_i $(i = 1, 2, 3)$. В соответствии с [2]

$$\Lambda_{\xi_1\xi_1} = 2\rho\,(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi), \quad \Lambda_{\xi_2\xi_2} = -2\rho\varphi_2, \quad \Lambda_{\xi_3\xi_3} = -2\rho\varphi_3$$
$$\varphi_i = F_i\,(\xi^\circ)\ (i = 1, 2, 3), \quad \varphi = -2\gamma\,[(\xi_1^\circ)^2/\alpha_1]/(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/2}$$

Из условия равновесия (1.4) следует, что $2\rho = 1/\varphi_1$. В соответствии с [2] эти формулы можно использовать, если предположить непрерывность функции γ на эллипсоидальном слое, накрывающем точку либрации.

Форма наинизшего порядка в разложении H имеет вид

$$H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\,p_1^2 + \frac{1}{2}\,p_2^2 + \frac{1}{2}\,p_3^2 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{qg + h}{2}\,q_1^2 + \frac{g}{2}\,q_2^2 + \frac{\varphi_3}{2\varphi_1}\,q_3^2$$

а характеристическое уравнение системы первого приближения

$$[\lambda^4 + (2 - h)\,\lambda^2 + (1 + g + h)\,(1 - g)]\,(\lambda^2 + \varphi_3/\varphi_1) = 0$$
$$(g = \varphi_2/\varphi_1, \ h = (\varphi_3 + \varphi)/\varphi_1)$$

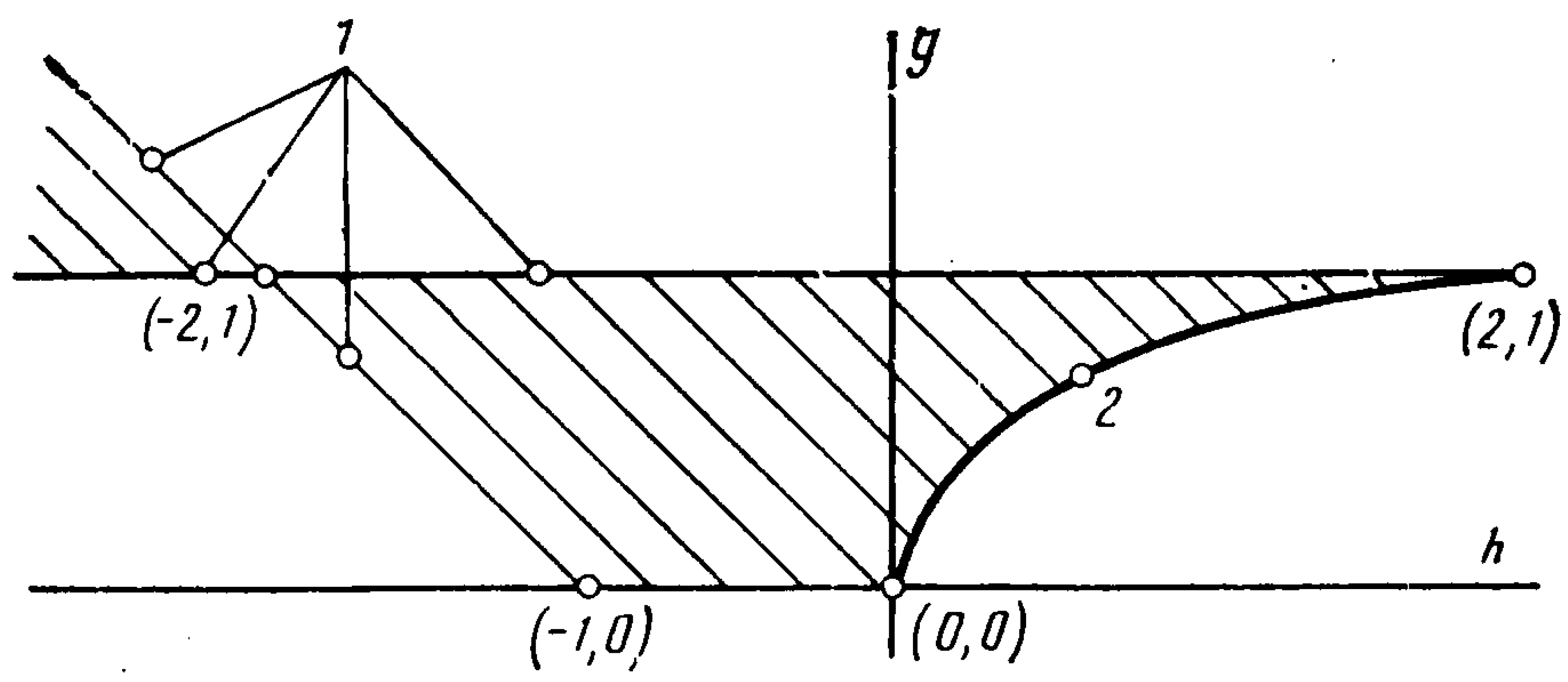
По пространственной координате q_3 звезда совершает нормальные колебания с частотой $(\varphi_3/\varphi_1)^{1/2}$. Поэтому устойчивость в первом приближении достаточно изучать для движений в экваториальной плоскости.

Уравнения первого приближения плоского движения $\mathbf{z}^{\cdot} = IG_{\mathbf{z}}$, где $\mathbf{z} = (q_1, q_2, p_1, p_2)$, I — симплектическая матрица четвертого порядка, имеют гамильтониан $G(\mathbf{z}) = H_2(q_1, q_2, 0, p_1, p_2, 0)$. В пространстве параметров h и g множество S, для точек которого выполнены необходимые условия устойчивости линейной системы, получается из условия равенства нулю вещественной части корней характеристического уравнения. Оно задается неравенствами (фигура)

$$g > 0,\ h \leqslant 2,\ (g + h/2)^2 - 2h \geqslant 0,\ (1 + g + h)(1 - g) \geqslant 0$$

В отличие от случая внешней точки либрации однородного эллипсоида [1] здесь отсутствует ограничение $h > 0$. На величину h в неоднородном случае может повлиять значение плотности в самой точке.

Условия устойчивости линейной системы станут достаточными, если матрица $IG_{\mathbf{zz}}$ приводится к диагональному виду подходящей линейной



заменой. В частности, это имеет место в области $\operatorname{Int} S$, где корни характеристического уравнения чисто мнимы, различны и не равны нулю.

Множество $\operatorname{Rs}(1, S) = \{(h, g)\colon (1 + g + h)(1 - g) = 0,\ h \leqslant 2,\ g > 0\} \subset \partial S$ (кривая *1*) соответствует резонансу первого порядка (одна из частот нулевая). При всех $(h, g) \in \operatorname{Rs}(1, S)$, как показывает проверка, элементарный делитель, соответствующий нулевому собственному числу матрицы $IG_{\mathbf{zz}}$, будет непростой, за исключением точки $(h, g) = (-2, 1)$. Поэтому при $(h, g) = (-2, 1)$ равновесие в линейном приближении устойчиво, а при $(h, g) \in \operatorname{Rs}(1, S) \setminus \{(-2, 1)\}$ неустойчиво.

Остается исследовать множество $\operatorname{Rs}(2, S) = \{(h, g)\colon (g + h/2)^2 - 2h = 0,\ 0 < h < 2\}$ (кривая *2*) резонанса второго порядка. Можно проверить, что в этом случае у матрицы $IG_{\mathbf{zz}} - i(1 - h/2)E$ минор M_{14} (вычеркивается первая строка и четвертый столбец) равен нулю лишь при $h = 0$ и $h = 2$. Значит, при $(h, g) \in \operatorname{Rs}(2, S)$ собственное число $i(1 - h/2)$ имеет непростой элементарный делитель. Отсюда следует неустойчивость.

Итак, устойчивость в первом приближении обеспечивается, только когда $(h, g) \in \operatorname{Int} S \cup \{(-2, 1)\}$. Заметим также, что при $(h, g) \in \operatorname{Int} S \cap \{(h, g)\colon h < -2\} = S_0$ функция $G(\mathbf{z})$ согласно критерию Сильвестра положительно определена. Поэтому при $(h, g) \in S_0$ положительно определена также $H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, а так как $H = H_2 + \ldots$ — интеграл точной нелинейной системы, то согласно известной теореме Ляпунова S_0 соответствует ее устойчивому положению равновесия.

3. Обсуждение результатов. С точки зрения динамики звездных систем представляет особый интерес случай убывающей функции γ, достигающей максимума в нуле (центре галактики). Как замечено в [3], справедливо тождество: $A_1 + A_2 + A_3 = 2/(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/2}$. В случае невозрастающей функции $\gamma\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, имеющем место для наблюдаемых эллиптических галактик, $\varphi_i \geqslant \gamma\, [(\xi_1^\circ)^2/\alpha_1]\, A_i$ $(i = 1, 2, 3)$, причем равенство справедливо в точности тогда, когда положение равновесия неединственно и точки либрации заполняют отрезок $[0, \xi_1^\circ]$ на оси ξ_1, а плотность постоянна на соответствующих эллипсоидах.

Следовательно, когда плотность не возрастает с удалением от центра, имеет место неравенство $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \geqslant 2\gamma\, [(\xi_1^\circ)^2/\alpha_1]/(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{1/2} = -\varphi$, что эквивалентно $1 + g + h \geqslant 0$ (фигура). Поэтому точки области S_0 не могут соответствовать убывающей функции γ.

Отсюда видно, что в этом случае устойчивость реализуется только при $g < 1$, т. е. при $\alpha_1 < \alpha_2$. Выводы работы [1,3] распространяются на неоднородный случай: если изолированная точка либрации устойчива, то она расположена на продолжении меньшей экваториальной полуоси.

Вслед за исследованием устойчивости в первом приближении можно провести для множества параметров $S \cap \{(h, g)\colon 1 + g + h > 0\}$ нелинейный анализ так, как это было сделано в [4]. Ясно, что в плоском движении будет иметь место устойчивость везде в $\operatorname{Int} S \setminus S_0$, за исключением, быть может, некоторых резонансных кривых (теорема Арнольда—Мозера). В отношении пространственных движений в этом случае можно говорить об устойчивости для большинства начальных условий.

Неизолированное положение равновесия при $g \neq 1$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ реализуется только тогда, когда $1 + g + h = 0$. Один характеристический показатель нулевой. Элементарный делитель, ему соответствующий,— непростой. Неустойчивость состоит в систематическом сдвиге вдоль оси ξ_1 с постоянной скоростью, линейно растущей с увеличением расстояния от этой оси. Явный вид решения легко получить рассматривая движение звезды внутри однородного эллипсоида, например так, как это сделано в работе [5]. Однородность следует из теоремы 1 и неизолированности. В [5] как раз и рассматриваются эллипсоиды, у которых положения относительного равновесия заполняют отрезок на оси ξ_1. Заметим, что в случае $1 + g + h = 0$ система Гамильтона будет линейной: $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Если $g = 1$, то точки либрации также неизолированы, но заполняют окружность в плоскости экватора. Галактика имеет форму сфероида. Как замечено в [4], здесь в общем случае также будет иметь место неустойчивость для нелинейной системы вследствие систематического сдвига по долготе.

Автор благодарит В. Г. Демина за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косенко И. И.* О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 26—33.
2. *Косенко И. И.* О разложении гравитационного потенциала неоднородного эллипсоида в степенной ряд.— ПММ, 1986, т. 50, вып. 2, с. 194—199.
3. *Косенко И. И.* Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде. Геометрия области устойчивости.— Космич. исследования, 1981, т. 19, № 2, с. 200—209.
4. *Косенко И. И.* Нелинейный анализ устойчивости точек либрации трехосного эллипсоида.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 1, с. 16—24.
5. *Freeman K. C.* Structure and evolution of barred spiral galaxies. II.— Monthly Notes Roy. Astron. Soc., 1966, v. 134, No. 1, p. 1—14.

Москва

Поступила в редакцию
12.III.1986