

УДК 532.546

## К ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ ОБЪЕМНОМ НАГРЕВЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Зыонг Нгок Хай, Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И.

Исследуется процесс фильтрации и разогрева очень вязкой жидкости (битума) в пористой среде при наличии объемного источника тепла за счет поглощения энергии высокочастотного электромагнитного поля (ВЧЭМП). Эта задача связана с анализом битумных нефтей [1], фильтрация которых практически реализуется только после предварительного разогрева пласта, например при помощи ВЧЭМП [2—5].

Предполагается, что в начальном состоянии битум находится в жидком (подвижном) или твердом (неподвижном) состоянии. Под воздействием объемного источника тепла битум нагревается, плавится, расширяется, становится текучим и под создаваемым перепадом давления движется относительно неподвижного твердого пористого скелета породы. Получена замкнутая система дифференциальных уравнений и устанавливаются основные безразмерные критерии подобия, характеризующие указанные процессы. Изучаются различные типы стационарных или предельных решений, реализующихся при стационарном или достаточно длительном разогреве среды. Эти решения, в случае их существования, могут быть использованы для оценки эффективности реального процесса (например, для оценки предельной длины области плавления, степени нагрева жидкого битума и характерного времени выхода процесса на стационарный режим и т. п.) и в качестве тестов для проверки правильности различных приближенных и численных методов решений полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассматриваемая задача отличается от классической задачи Стефана о процессах плавления или затвердевания [6, 7], где предполагается, что среда однокомпонентная, отсутствует движение среды и связанный с ним конвективный перенос тепла, а внешний подвод тепла происходит только на границах исследуемых областей (т. е. объемный источник тепла отсутствует).

**1. Основные допущения и уравнения.** Процессы разогрева, плавления и фильтрации битума исследуются методами механики многофазных сплошных сред при следующих основных допущениях: температуры фаз в каждом элементарном объеме пористой среды одинаковы; процесс фазового перехода (плавления или затвердевания) происходит на скачке, разделяющем зоны пористой среды, заполненной жидкой и твердой фазами битума (т. е. нет зоны смеси жидкой и твердой фаз битума); движение расплавленного битума в породе безынерционно и подчиняется закону Дарси; отсутствуют изменение объема нерасплавленной (твердой) фазы и деформация скелета породы. При принятых допущениях рассматриваются основные уравнения сохранения масс, импульсов фаз и энергии смеси для случая одномерного симметричного движения ( $\nu = 0, 1, 2$  соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии движения) в эйлеровой системе координат [8—10].

Примем следующие обозначения. Нижние индексы  $i = 1, 2, 3$  будем относить к параметрам соответственно подвижной (жидкой) фазы битума, неподвижной (твердой) фазы битума и скелета породы; нижний индекс  $s$  — к параметрам на линии плавления, а индексы  $0, b$  — к параметрам начального состояния и на границе скважины соответственно. Через  $\rho_i, u_i, c_i, \lambda_i$  обозначим истинную плотность, скорость фильтрации, удельную

теплоемкость и коэффициент теплопроводности  $i$ -й фазы ( $i = 1, 2, 3$ ),  $p$ ,  $\mu_1$  — давление и вязкость жидкости,  $k$ ,  $m$  — проницаемость и пористость породы ( $k, m = \text{const}$ ),  $T$  — температура,  $x_b$  — координата стенки скважины,  $x_s(t)$  — координата поверхности плавления. Введем также величины  $(\rho c)^{(i)} = m\rho_i c_i + (1 - m)\rho_3 c_3$ ,  $\lambda^{(i)} = m\lambda_i + (1 - m)\lambda_3$ ,  $m = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ . В области подвижной фазы — жидкости (расплавленного битума)  $x_b < x < x_s(t)$ ,  $T > T_s$ . Уравнения сохранения массы, импульса и энергии запишем в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (m\rho_1) + \frac{1}{x^v} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1 x^v) = 0, \quad u_1 = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(\rho c)^{(1)} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_1 c_1 u_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{x^v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda^{(1)} x^v \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q^{(e)} + A^{(\tau)}$$

где  $A^{(\tau)}$  — работа вязких сил,  $q^{(e)}$  — интенсивность объемного источника тепла за счет поглощения энергии ВЧЭМП. Далее будем рассматривать случай, когда  $A^{(\tau)} \ll q^{(e)}$  и величиной  $A^{(\tau)}$  можно пренебречь. Вязкость жидкости зависит от температуры ( $\mu_1 = \mu_1(T)$ ).

В области неподвижной фазы — твердого битума  $x > x_s(t)$ ,  $t > t_s$  имеем

$$(1.2) \quad (\rho c)^{(2)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda^{(2)} x^v \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q^{(e)}, \quad u_2 = 0, \quad \rho_2 = \text{const}$$

На границах исследуемой области и фронте плавления

$$(1.3) \quad x = x_b, \quad p = p(x_b, t), \quad \lambda^{(1)} S_b \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_b+0} = -q_b$$

$$x = x_s(t), \quad T = T_s = \text{const}$$

$$\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=x_s-0} = -u_{1s} = -m \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_{1s}} \right) \frac{dx_s}{dt};$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad T \rightarrow T_0$$

где  $q_b = q(x_b, t)$  — интенсивность полного потока тепла через границу  $x_b$  ( $q_b > 0$  соответствует случаю подвода тепла,  $q_b < 0$  — случаю отвода тепла).

В случае  $T_0 < T_s$  при  $t < t_s$  распределение температуры среды в области  $[x_b, +\infty) \times [0, t_s]$  находится из решения уравнений (1.2) с граничными условиями

$$(1.4) \quad x = x_b, \quad \lambda^{(2)} S_b \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_b+0} = -q_b; \quad x \rightarrow +\infty, \quad T \rightarrow T_0$$

Распределение тепловых источников  $q^{(e)}$ , возникающих за счет поглощения энергии ВЧЭМП, определяется из уравнения Умова—Пойнтинга и закона Бугера — Ламберта для монохроматической волны

$$(1.5) \quad q^{(e)} = -\nabla \cdot \mathbf{R}, \quad \nabla \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}/L_R$$

где  $\mathbf{R}$  — вектор интенсивности излучения, а  $L_R$  — длина поглощения, характеризующая степень поглощения энергии электромагнитной волны рассматриваемой средой. В случае распространения одномерной (плоской, цилиндрической и сферической) монохроматической волны в однородной и изотропной среде эти уравнения имеют вид

$$(1.6) \quad q^{(e)} = -\frac{1}{x^v} \frac{\partial}{\partial x} (x^v R) = \frac{R}{L_R}$$

В общем случае для заданной среды длина поглощения  $L_R$  определя-

ется частотой электромагнитного излучения  $\omega$  и зависит от давления  $p$  и температуры. Тогда даже при фиксированной частоте  $\omega$  уравнения для термогидродинамических параметров (1.1), (1.2) и уравнения (1.6) для  $q^{(e)}$  и электрофизического параметра  $R$  взаимосвязаны и должны решаться совместно. Часто влиянием давления и температуры на длину поглощения  $L_R$  можно пренебречь. Тогда для фиксированной частоты  $\omega$  величина  $L_R$  становится заранее известным параметром, который сразу определяет интенсивность излучения  $R$  и интенсивность объемного источника тепла независимо от решения термогидродинамических уравнений. Здесь

$$(1.7) \quad q^{(e)} = \frac{R_b}{L_R} \left( \frac{x_b}{x} \right)^{\nu} \exp \left( - \frac{x - x_b}{L_R} \right)$$

$R_b$  — интенсивность излучения на границе скважины  $x_b$ , определяемая мощностью  $N^{(e)}$  и площадью поверхности излучателя  $S_b$  (для  $\nu = 0$   $S_b = 1 \text{ м}^2$ , для  $\nu = 1$   $S_b = 2\pi x_b h$  ( $h$  — мощность радиального пласта), для  $\nu = 2$   $S_b = 4\pi x_b^2$ ).

Положение поверхности плавления определяется из условий баланса массы и в квазистатическом (фильтрационном) приближении баланса энергии на межфазной границе

$$(1.8) \quad dx_s/dt = j/m\rho_2, \quad jl = q_{1s} + q_{2s}$$

$$q_{1s} = -\lambda^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_s(t)-0}, \quad q_{2s} = \lambda^{(2)} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_s(t)+0}$$

Здесь  $q_{1s}$  и  $q_{2s}$  — потоки тепла, поступающие к межфазной поверхности со стороны подвижной и неподвижной фазы,  $j$ ,  $l$  — соответственно интенсивность и удельная теплота фазового перехода (разность энтальпий фаз).

Принимаются линейные уравнения состояния для плотности жидкости

$$(1.9) \quad \rho_1(p, T) = \rho_{10} + \beta_p(p - p_0) - \beta_T(T - T_0)$$

где  $\beta_p$ ,  $\beta_T$  — коэффициенты сжимаемости и теплового расширения. Тогда система термогидродинамических уравнений (1.1) — (1.4), (1.7) — (1.9) при заданных начальных условиях

$$(1.10) \quad t = 0, \quad p = p_0, \quad T = T_0$$

замкнута и может быть решена.

В общем случае параметры жидкости на фронте плавления должны быть определены из условия равновесия фаз на основе уравнения Клапейрона-Клаузиуса. В большинстве практически важных случаев, когда давление плавления меняется не очень сильно:  $p - p_0 \ll p^\circ = \rho_{1s} \rho_2 (\rho_2 - \rho_{1s})^{-1} l$  можно использовать условие  $T_s = \text{const}$ , как это и принято в данной работе.

**2. Безразмерные переменные и параметры.** Вводятся следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = \frac{u_* t}{L_R}, \quad X = \frac{x}{L_R}, \quad X_s(\tau) = \frac{x_s(t)}{L_R}, \quad U_i = \frac{u_i}{u_*}, \quad \Phi_i = \frac{\rho_i}{\rho_*}$$

$$\Theta = \frac{T}{T_s}, \quad P = \frac{p}{p_*}, \quad M_1(\Theta) = \frac{\mu_1(T)}{\mu_1(T_s)}, \quad u_* = \frac{k}{\mu_1(T_s)} \frac{p_*}{L_R}$$

Нижний индекс \* относится к некоторым характерным параметрам среды.

В новых переменных система уравнений (1.1) — (1.4), (1.7) — (1.9) преобразуется к двум дифференциальным уравнениям параболического типа в области  $X_b < X < X_s(\tau)$  и одному уравнению аналогичного типа в области  $X > X_s(\tau)$ , решения которых при пренебрежении диссипацией

энергии за счет вязкости жидкости ( $A^{(v)} = 0$ ) зависят от следующих безразмерных параметров, характеризующих соответственно:

геометрические свойства пространства:  $m, \nu, X_b$

теплофизические свойства фаз:

$$B_p = \frac{\beta_p p^*}{\rho_*}, \quad B_T = \frac{\beta_T T_s}{\rho_*}, \quad C_2 = \frac{c_2}{c_1}, \quad C_3 = \frac{\rho_3 c_3}{\rho_* c_1},$$

$$\delta = \frac{\rho_2 - \rho_{1s}}{\rho_{1s}}$$

относительное влияние конвективного переноса энергии по сравнению с переносом энергии за счет теплопроводности:

$$Pe_i = u_* L_R / D_i \quad (D_i = \lambda^{(i)} / (\rho_* c_1), \quad i = 1, 2)$$

( $Pe_i$  и  $D_i$  — число Пекле и коэффициент температуропроводности  $i$ -й фазы);

относительный вклад в изменение энергии среды процессов теплопроводности и плавления:

$$G_1 = u_* L_R / \Lambda_i \quad (\Lambda_i = \lambda^{(i)} T_s / (\rho_* l), \quad i = 1, 2)$$

влияние внешнего подвода тепла и краевых условий:

$$N = \frac{N^{(e)}}{S_b \rho_* c_1 u_* T_s}, \quad \Theta_0, \quad Q_b = \frac{q_b L_R}{\lambda^{(1)} S_b T_s}$$

При допущении о несжимаемости жидкой фазы рассматриваемая задача сводится к задаче о процессе плавления вещества с учетом конвективной теплопроводности в жидкости и при наличии внешнего объемного источника тепла. В этом случае поля скорости и давления в жидкой фазе выражаются через поле температуры следующим образом:  $X_b < X < X_s$

$$U_1 = -m\delta \left( \frac{X_s}{X} \right)^\nu \frac{dX_s}{d\tau}, \quad P = 1 + m\delta X_s^\nu \frac{dX_s}{d\tau} \int_{X_b}^X \frac{M_1(\Theta)}{\xi^\nu} d\xi$$

В пренебрежении изменением вязкости жидкой фазы от температуры ( $M_1(\Theta) = 1$ ) поле давления в жидкости находится элементарно. Например, для  $\nu = 1$

$$P = 1 + m\delta X_s \frac{dX_s}{d\tau} \ln \frac{X}{X_b}, \quad X \in [X_b, X_s)$$

**3. Стационарные решения с неподвижными фронтами плавления и затвердевания.** Рассмотрим вначале стационарные или предельные решения типа

$$(3.1) \quad \partial \rho_i / \partial t = 0, \quad \partial T / \partial t = 0, \quad x_s = \text{const} \quad (i = 1, 2)$$

соответствующие случаю непрерывного и постоянного нагрева пористой среды, первоначально насыщенной твердым битумом. В этом случае  $u_1 = 0$  и задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$(3.2) \quad \frac{d}{dX} \left( X^\nu \frac{d\Theta}{dX} \right) = -K_i \exp [-(X - X_b)] \quad (i = 1, 2)$$

$$K_i = Pe_i N X_b^\nu$$

$$(3.3) \quad X \in [X_b, X_s), \quad U_1 = 0, \quad P = 1, \quad \Phi_1 = 1 - B_T (\Theta - \Theta_0)$$

$$X \in [X_s, +\infty), \quad U_2 = 0, \quad \Phi_2 = \text{const}$$

$$X = X_b, \quad (d\Theta/dX)_{X=X_b+0} = -Q_b = \text{const}$$

$$X = X_s, \quad \Theta = 1, \quad j = 0, \quad \frac{1}{G_1} \frac{d\Theta}{dX} \Big|_{X=X_s-0} = \frac{1}{G_2} \frac{d\Theta}{dX} \Big|_{X=X_s+0}$$

$$X \rightarrow +\infty, \quad \Theta \rightarrow \Theta_0 \quad (\Theta_0 < 1)$$

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \nu = 0, \quad \Theta(X) &= -K_i \exp[-(X - X_b)] + CX + D \\ \nu = 1, \quad \Theta(X) &= K_i \exp X_b \operatorname{Ei}(-X) + C \ln X + D \\ \nu = 2, \quad \Theta(X) &= -K_i \exp X_b F(X) - C/X + D \\ F(X) &= \exp(-X)/X + \operatorname{Ei}(-X) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ei}(-X) = - \int_X^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi e^\xi} < 0, \quad X > 0$$

где  $K_i$  — безразмерный параметр, характеризующий соотношение тепловыделения и теплопроводности,  $C$  и  $D$  — постоянные интегрирования,  $\operatorname{Ei}(-X)$  — интегральная показательная функция. Отметим, что обычно  $X_b \ll 1$ , поэтому  $\exp X_b \approx 1$ .

**Утверждение 1.** Для  $\nu = 0, 1$  не существует решения системы уравнений (3.2), удовлетворяющего условиям (3.3).

**Доказательство.** Из общего решения (3.4) видно, что для того, чтобы удовлетворить последнему условию (3.3), необходимо положить  $C = 0, D = \Theta_0$ . В силу неравенств  $-K_i \exp[-(X - X_b)] < 0$  (для  $\nu = 0$ ) и  $K_i \exp X_b \operatorname{Ei}(-X) < 0$  (для  $\nu = 1$ ) при  $X \in [X_b, +\infty)$  следует, что для любого  $X \in [X_b, +\infty)$  имеем  $\Theta(X) \leq \Theta_0$ , т. е. не существует координаты  $X_s$ , такой, что  $\Theta(X_s) = 1 > \Theta_0$  при  $X = X_s$ .

**Утверждение 2.** Для  $\nu = 2$  при  $K_2 \geq K_* = -(1 - \Theta_0) / [\exp(X_b) \cdot \operatorname{Ei}(-X_b)]$  и  $Q_b = 0$  существует единственное решение системы уравнений (3.2), удовлетворяющее условиям (3.3). При этом  $X_s > X_b$  в случае  $K_2 > K_*$ .

**Доказательство.** Для  $\nu = 2$  профиль температуры в среде (3.4) удовлетворяет условиям (3.3), если постоянные интегрирования определяются следующим образом:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} X \in [X_b, X_s], \quad C &= -(K_1 + \\ &+ Q_b X_b^2), \quad D = 1 + C X_s^{-1} + \\ &+ K_1 \exp X_b F(X_s) \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} X \in [X_s, +\infty), \quad C &= \\ = -X_s [1 - \Theta_0 + K_2 \exp X_b F(X_s)], \quad D &= \Theta_0 \end{aligned}$$

а для определения месторождения фронта плавления  $X_s$  из (3.3) получается уравнение

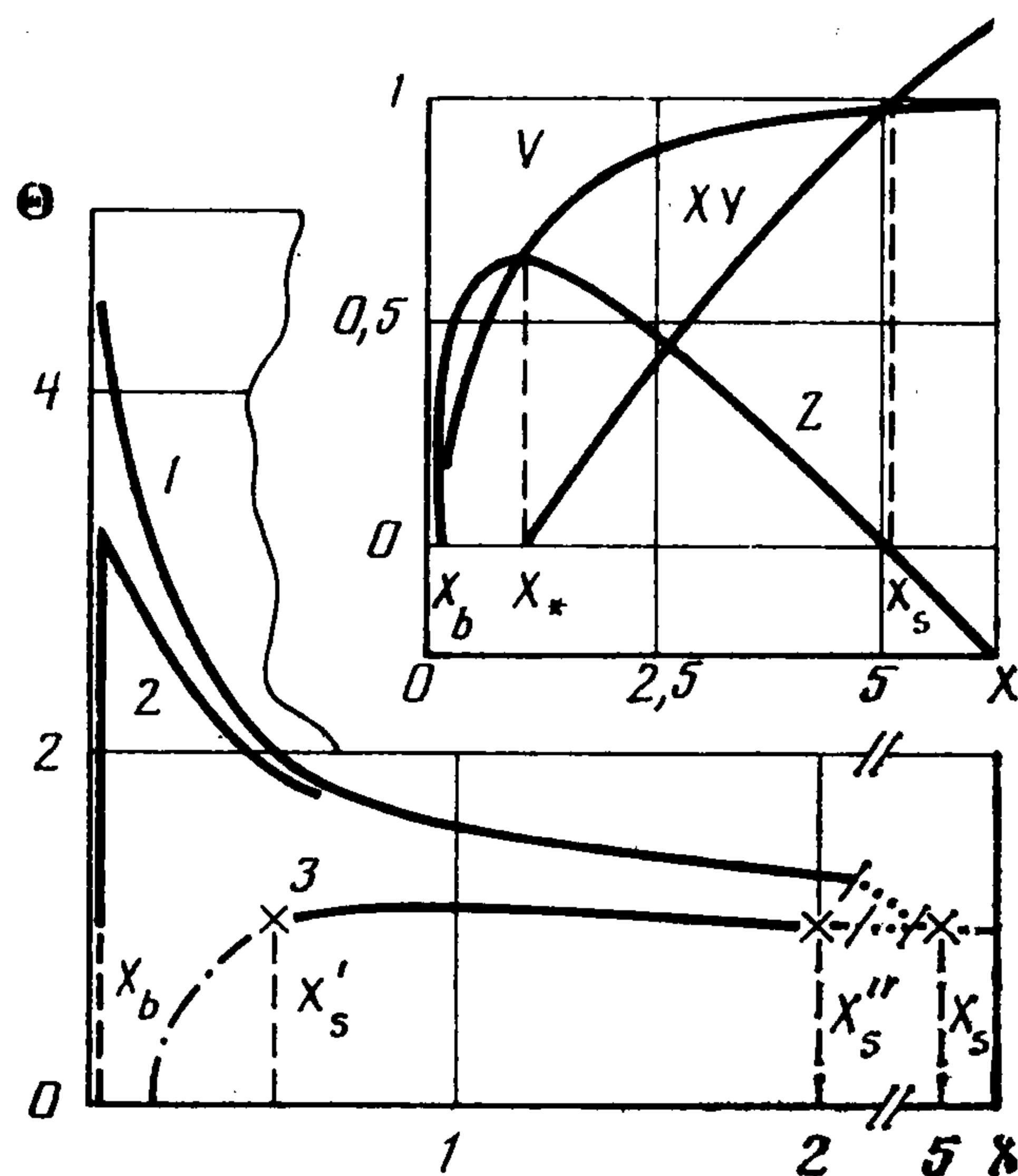
$$(3.7) \quad \begin{aligned} Z(X) &= K_1^{-1} Q_b X_b^2 + V(X) - \\ &- XY(X) = 0 \end{aligned}$$

$$V(X) = 1 - \exp[-(X - X_b)]$$

$$Y(X) = K_2^{-1} (1 - \Theta_0) - \exp X_b \operatorname{Ei}(-X)$$

(Члены, содержащие  $Q_b$ , в данном случае равны нулю. Соотношения (3.5) — (3.7) верны и для случая, когда  $Q_b \neq 0$ .)

Докажем существование и единственность решения уравнения (3.7) при  $Q_b = 0$ . Рассмотрим функции  $V(X)$  и  $XY(X)$ . При  $K_2 \geq K_*$  в силу монотонности отрицательной возрастающей функции  $\operatorname{Ei}(-X)$  следует, что уравнение  $Y(X) = 0$  в области  $X > X_b$  имеет единственный корень  $X = X_*$ , при этом если  $K_2 = K_*$ , то  $X_* \equiv X_b$ . В области  $X \in [X_*, +\infty)$   $XY(X)$  — неотрицательная монотонно возрастающая от 0 до  $+\infty$  функция, а  $V(X)$  — ограниченная, положительная, возрастающая функция.



Фиг. 1

В указанной области  $d(XY)/dX > dV/dX$ , откуда следует, что в этой области графики функций  $XY(X)$  и  $V(X)$  пересекаются в одной и только в одной точке, которая соответствует координате фронта плавления  $X_s$  и где  $V(X) - XY(X) = 0$ . В области  $X \in [X_b, X_*)$  имеем  $XY(X) < 0$ ,  $V(X) \geq 0$ , т. е. графики этих функций не пересекаются между собой (правая верхняя часть фиг. 1).

Если  $Q_b \neq 0$ , можно доказать аналогичное утверждение в следующих случаях:

1)  $K_2 < K_*$ ,  $Q_b > 0$  и  $Q_b X_b^2 - K_1 X_b Y(X_b) \geq 0$ ;

2)  $K_2 \geq K_*$ ,  $Q_b \geq 0$  (и утверждение 2 соответствует частному случаю, когда  $Q_b = 0$ );

3)  $K_2 \geq K_*$ ,  $Q_b < 0$  и  $|Q_b X_b^2| < K_1 X_b Y(X_b)$

В случае  $K_2 \geq K_*$ ,  $Q_b < 0$ ,  $K_1 X_b Y(X_b) \leq |Q_b X_b^2| < K_1 V(X_*)$  можно показать существование и единственность двухфронтного решения задачи (3.2) со следующими условиями:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} X \in [X_b, X_s'), \quad U_2 = 0, \quad \Phi_2 = \text{const} \\ X \in [X_s', X_s''), \quad U_1 = 0, \quad P = 1, \quad \Phi_1 = 1 - B_T (\Theta - \Theta_0) \\ X \in [X_s'', +\infty), \quad U_2 = 0, \quad \Phi_2 = \text{const} \\ X = X_b, \quad (d\Theta/dX)_{X=X_b+0} = -Q_b = \text{const} \\ X = X_s', \quad \Theta = 1, \quad j = 0, \quad \frac{1}{G_2} \frac{d\Theta}{dX} \Big|_{X=X_s'-0} = \frac{1}{G_1} \frac{d\Theta}{dX} \Big|_{X=X_s'+0} \\ X = X_s'', \quad \Theta = 1, \quad j = 0, \quad \frac{1}{G_1} \frac{d\Theta}{dX} \Big|_{X=X_s''-0} = \frac{1}{G_2} \frac{d\Theta}{dX} \Big|_{X=X_s''+0} \\ X \rightarrow +\infty, \quad \Theta \rightarrow \Theta_0 \quad (\Theta_0 < 1) \end{aligned}$$

При этом координаты фронтов  $X_s'$ ,  $X_s''$  ( $X_s' < X_s''$ ) определяются тем же уравнением (3.7), которое имеет в этом случае два корня, а постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  принимают следующие значения: при  $X \in [X_b, X_s')$  — те же, что в (3.5), с заменой  $K_1$  на  $K_2$  и  $X_s$  на  $X_s'$ ; при  $X \in [X_s'', +\infty)$  — те же, что в (3.6), с заменой  $X_s$  на  $X_s''$ ; при  $X \in [X_s', X_s'')$ :

$$C = -K_1 \exp X_b \frac{X_s' \cdot X_s''}{X_s'' - X_s'} [F(X_s') - F(X_s'')]$$

$$D = 1 - K_1 \exp X_b \frac{1}{X_s'' - X_s'} [X_s' F(X_s') - X_s'' F(X_s'')]$$

В остальных случаях стационарного решения данного типа не существует. Отметим, что параметр  $K_*$  характеризует, при прочих одинаковых условиях, возможность установления стационарной (неподвижной) поверхности плавления в среде, подвергнутой длительному нагреву источниками тепла типа (1.7) с мощностями  $K_2 \geq K_*$ .

На фиг. 1 представлены некоторые примеры решения задач (3.2), (3.3) и (3.2), (3.8) для значений  $K_1 = 0,82$ ,  $K_2 = 0,75$ , соответствующих, например, следующим значениям параметров фаз и объемных источников тепла:  $T_0 = 293$  К,  $T_s = 343$  К,  $\lambda_1 = 0,6$  Вт/м·К,  $\lambda_2 = 1,2$  Вт/м·К,  $\lambda_3 = 5,8$  Вт/м·К,  $m = 0,5$ ,  $L_R = 25$  м,  $N^{(e)} = 280$  кВт,  $x_b = 0,15$  м.

Кривая 1 соответствует однофронтному решению задачи (3.2) при отсутствии отвода или подвода тепла в пласт через границу области  $X = X_b$ :  $Q_b = 0$ , представленному в правой верхней части фиг. 1. Кривая 2 иллюстрирует предельное однофронтное решение для случая отвода тепла на границе  $X = X_b$ :  $Q_b = -K_1 X_b^{-1} Y(X_b) \approx -0,026 K_1 X_b^{-2}$ . Кривая 3 демонстрирует двухфронтное решение, имеющее место в случае отвода более значительного количества тепла через границу  $X = X_b$ :  $Q_b \approx -0,573 K_1 X_b^{-2}$ .

Видно (кривая 1), что максимальная область, в которой среда (битум) испытывает фазовый переход в результате постоянного воздействия объемного источника тепла

(ВЧЭМП) мощности 280 кВт, составляет значительное расстояние, около  $5,1 L_k$ , т. е. около 125 м. Температура жидкого битума в окрестности скважины достигает значения  $\approx 4,5 T_s$ , т. е.  $\approx 1500$  К. В предельном случае однофронтовой задачи, когда реализуется наибольший отвод тепла через левую границу исследуемой области, температура битума на стенке скважины понижается до температуры плавления  $X = X_b$ :  $T_b = T_s = 343$  К (кривая 2). При этом в очень узкой зоне вблизи скважины наблюдается резкое снижение температуры битума. Так, пиковое значение температуры жидкого битума, достигаемое на расстоянии около 0,75 м, уменьшается до  $3,2 T_s$ , т. е. до  $\approx 1100$  К, но фронт плавления смещается к центру незначительно (на величину  $\approx 0,1 L_R$ , т. е.  $\approx 2,5$  м).

Дальнейшее увеличение количества тепла  $Q_b$ , отводящегося через границу  $X = X_b$ , приводит к появлению фронта затвердевания (кривая 3), но при этом реализуются отрицательные температуры вблизи скважины. Реальный максимальный отвод тепла из продуктивного пласта за счет теплопроводности среды через границу  $X = X_b$  достигается, когда  $\Theta(X_b) = 0$ . В этом случае профиль температуры в среде практически совпадает с кривой 2, что свидетельствует о малом влиянии на процесс реальной возможности теплоотвода на границе скважины.

Основными безразмерными критериями в стационарных решениях типа (3.1) являются параметры  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ). Фигурирующие же в условии (3.3) или (3.8) безразмерные параметры  $G_1$  и  $G_2$  в случае  $j = 0$  выражаются через них:

$$G_1/G_2 = \text{Pe}_1/\text{Pe}_2 = K_1/K_2$$

Входящая в параметры  $K_i$  величина  $L_R$  может меняться за счет изменения частоты  $\omega$  электромагнитного излучения. При увеличении  $L_R$  предельная зона плавления увеличивается, но при этом время ее установления также увеличивается. При прочих одинаковых условиях реальная максимальная зона плавления достигается при воздействии ВЧЭМП частотой, соответствующей максимальной длине области релаксации  $L_R$ .

Следует отметить, что в случаях, когда стационарное решение существует, можно оценить характерное время выхода на стационарный режим  $t_{st}$ . Например, в сферическом случае ( $\nu = 2$ ) при разогреве среды только ВЧЭМП ( $q_b = 0$ ) на основании однофронтового решения (3.4)–(3.7) для  $t_{st}$  справедлива следующая оценка:

$$t_{st} \sim Q_{st}/N_{st}$$

$$Q_{st} \approx \Omega_s \{(\rho c)^{(1)} (\langle T \rangle - T_s) + m\rho_2 l + (\rho c)^{(2)} (T_s - T_0)\}$$

$$N_{st} \approx N^{(e)} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{x_s - x_b}{L_R}\right) \right]; \quad \Omega_s = \frac{4}{3} \pi (x_s^3 - x_b^3)$$

Здесь  $N_{st}$ ,  $Q_{st}$  — соответственно интенсивность и общее количество подводимого тепла в предельную стационарную зону расплавленного битума объема  $\Omega_s$  и средней температуры  $\langle T \rangle$ .

Координата стационарного фронта плавления битума в случае нагрева продуктивного пласта путем подвода энергии через его границу  $X = X_b$  только за счет теплопроводности среды ( $N = 0$ ,  $Q_b > 0$ ) определяется следующим образом:

$$(3.9) \quad X_s^{(q)} = \frac{Q_b X_b^2}{1 - \Theta_0}, \quad Q_b > Q_* = \frac{1 - \Theta_0}{X_b^2}$$

На основании (3.9) можно показать, что при подводе одного и того же количества энергии в пласты с прочими равными параметрами предельная глубина проникания фронта плавления в случае подвода тепла через границу  $X = X_b$  только за счет теплопроводности среды  $X_s^{(q)}$  ( $Q_b > 0$ ,  $N = 0$ ) будет больше соответствующей величины в случае нагрева пласта

только объемным источником тепла типа (1.7)  $X_s$  ( $Q_b = 0$ ,  $N \neq 0$ ). При этом температура около скважины в первом случае  $T^{(q)}(X_b)$  гораздо больше, чем во втором случае  $T(X_b)$ .

В примере, проиллюстрированном кривой 1 на фиг. 1,  $X_s \approx 5,1 L_R$ ,  $T(X_b) \approx 4,5 T_s$ , а  $X_s^{(q)} \approx 5,14 L_R$ ,  $T^{(q)}(X_b) \approx 136 T_s \approx 30 T(X_b)$ . Имеющее место незначительное различие в решениях  $X_s$  и  $X_s^{(q)}$  обусловлено тем, что при нагреве пласта объемным источником тепла большее количество энергии излучения передается в область нерасплавленного битума, однако распределение температуры среды по пространству в этом случае получается более равномерным и время установления стационарного решения, по-видимому, гораздо меньше.

Полученные стационарные решения характеризуются наличием особенности в центре исследуемой области:  $\Theta(X_b) \rightarrow +\infty$  при  $X_b \rightarrow 0$ . Реально наличие такой особенности может проявиться в том, что при уменьшении размера генератора энергии ВЧЭМП будет наблюдаться очень сильное повышение температуры среды в окрестности скважины. В этом случае, как и в случае, представленном на фиг. 1, из-за высокой температуры среды около скважины приведенные решения могут оказаться неприемлемыми вследствие необходимости учета таких дополнительных процессов, как деформация скелета породы, газообразование, крекинг и др. На основании общего решения (3.4) можно показать также существование и единственность решений аналогичных задач в конечной области пространства  $[X_b, X_k]$  при различных заданных законах подвода или отвода тепла через границы  $X = X_b$  и  $X = X_k$ .

Следует отметить, что в общем случае необходимо учитывать отражение электромагнитной волны от фронта плавления (затвердевания) и различие коэффициентов поглощения волн для твердого и жидкого битумов. Учет этих факторов на основе системы уравнений (1.1) — (1.4), (1.7) — (1.10) не создает больших затруднений и принципиально не влияет на основные полученные результаты.

**4. Стационарные решения задач фильтрации вязкой жидкости в поле объемного источника тепла.** Рассмотрим стационарные решения типа

$$(4.1) \quad \partial \rho_1 / \partial t = 0, \quad \partial T / \partial t = 0, \quad u = u_1(x) \quad (x_s \rightarrow +\infty)$$

соответствующие случаю отсутствия твердой фазы ( $\mu_2 < +\infty$ ) и поверхности плавления вообще. Тогда полученная система уравнений принимает следующий безразмерный вид:

$$(4.2) \quad -G_b \frac{d\Theta}{dX} = \frac{1}{\text{Pe}_1} \frac{d}{dX} \left( X^\nu \frac{d\Theta}{dX} \right) + NX_b^\nu \exp[-(X - X_b)]$$

$$\frac{dP}{dX} = -M_1 U, \quad U = -\frac{G_b}{\Phi_1 X^\nu}, \quad G_b = -(\Phi_1 U X^\nu)|_{X=X_b} =$$

$$= \text{const} > 0$$

$$\Phi_1 = 1 + B_p(P - 1) - B_T(\Theta - 1)$$

$$(4.3) \quad X = X_b, \quad (d\Theta/dX)_{X=X_b+0} = -Q_b$$

$$X \rightarrow +\infty, \quad \Theta \rightarrow \Theta_\infty < +\infty, \quad P \rightarrow P_\infty < +\infty$$

$$(\Theta = T/T_*)$$

Для  $\nu = 0, 1$  не существует решения системы уравнений (4.2), удовлетворяющего условиям (4.3). Действительно, в этом случае, согласно второму уравнению, давление неограниченно растет:

$$(4.4) \quad \nu = 0, \quad P^2 \sim \text{const } G_b X \rightarrow +\infty$$

$$\nu = 1, \quad P^2 \sim \text{const } G_b \ln X \rightarrow +\infty$$

что противоречит последнему условию (4.3).

Можно показать, однако, существование решения системы уравнений (4.2) с граничными условиями

$$(4.5) \quad X = X_b, \quad P = P_b, \quad (d\Theta/dX)_{X=X_b+0} = -Q_b; \quad X \rightarrow +\infty,$$

$$\Theta \rightarrow \Theta_\infty < +\infty$$

которое не требует ограничения на асимптотическое поведение для давления при  $X \rightarrow \infty$ . При этом распределения температуры жидкости имеют вид

$$\begin{aligned} \nu = 0, \quad \Theta(X) &= 1 - \frac{K_1 \exp[-(X - X_b)]}{1 - \kappa} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{\exp[-(X - X_b) \cdot (\kappa - 1)]}{\kappa} \right\} + Q_b \exp[-\kappa(X - X_b)] / \kappa \\ \nu = 1, \quad \Theta(X) &= 1 + \kappa^{-1} K_1 \left( \frac{X_b}{X} \right)^\kappa \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{Q_b X_b}{K_1} + \kappa \exp X_b \int_1^{X/X_b} \exp(-\xi X_b) \xi^{\kappa-1} d\xi \right] \\ \kappa &= \text{Re}_1 G_b \end{aligned}$$

Наличие решения системы уравнений (4.2) с асимптотическим поведением (4.4) при  $X \rightarrow +\infty$  показывает, что на практике при выполнении условий (4.3) стационарный нагрев пласта объемным источником энергии ВЧЭМП типа (1.4), в случае  $\nu = 0, 1$ , должен сопровождаться уменьшением во времени расхода жидкости. В предельном случае  $G_b = 0$  система уравнений (4.2) сводится к одному уравнению теплопроводности, решение которого легко получить, и оно однозначно связывает распределение плотности жидкости с распределением ее температуры. При этом давление в жидкости будет однородным:  $P(X) = \text{const}$ .

Для случая  $\nu = 2$  можно показать, что решение задачи (4.2) с граничными условиями (4.3) существует. При этом поле температуры определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (4.6) \quad \Theta(X) &= 1 + \kappa^{-1} K_1 \exp X_b \{ \exp(-X) + \exp(-X_b) [I(X) \cdot \\ &\cdot \exp(\kappa/X) - I(+\infty)] \} + \kappa^{-1} Q_b X_b^2 (\exp(\kappa/X) - 1) \\ I(X) &= \int_{X_b}^X \exp[-(\xi + \kappa/\xi - X_b)] d\xi \end{aligned}$$

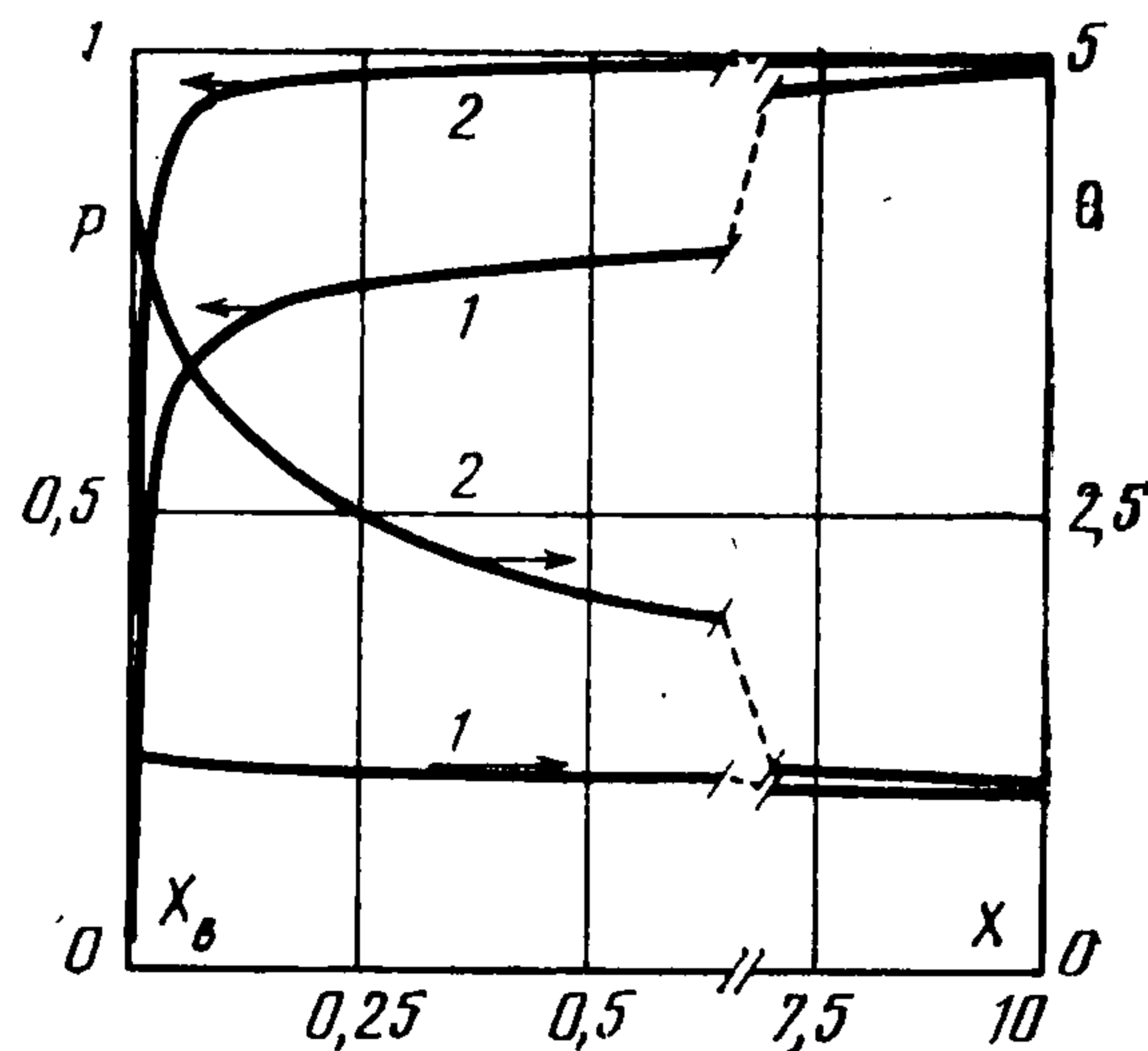
а поле давления в жидкости может быть найдено из решения следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} (4.7) \quad G_b \frac{M_1}{X^2} \frac{dX}{dP} &= \\ &= 1 + B_p (P - 1) - B_T (\Theta - 1) \\ X \rightarrow +\infty, \quad P &\rightarrow P_\infty < +\infty \end{aligned}$$

например, численным методом. В этом случае из-за геометрии пространства можно получить постоянный расход жидкости путем стационарного нагрева пласта объемным источником тепла типа (1.4).

На фиг. 2 представлены решения задачи (4.6), (4.7) для  $K_1 = 0,71$ ;  $\text{Re}_1 = 2,97$ ,  $B_p = 0,002$ ;  $B_T = 0,15$ ;  $X_b = 0,006$ ;  $Q_b = 0$ , соответствующих, например:  $p_b = 0,1$  МПа;  $p_* = p_\infty = 3,0$  МПа;  $T_* = T_\infty = 300$  К;  $\rho_* = \rho_\infty = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu_* = 1,0$  Па·с;  $c_1 = 2,1$  кДж/кг·К;  $\lambda_1 = 0,60$  Вт/м·К;  $\lambda_2 = 5,8$  Вт/м·К;  $k = 2,0$  мкм<sup>2</sup>;  $m = 0,3$ ;  $N^{(e)} = 280$  кВт;  $q_b = 0$ ;  $L_R = 25$  м;  $x_b = 0,15$  м.

Кривые 1 и 2 иллюстрируют распределение давления и температуры среды для случаев, когда  $\mu_1 = (T/T_\infty)^{-18}$ , что характерно для битумной нефти (кривые 1), и когда  $\mu_1 = \mu_\infty = \text{const}$  (кривые 2), при этом расходы  $G_b$  соответственно равны 0,58 ( $\approx 40$  т/сут) и 0,003 ( $\approx 0,2$  т/сут). Видно, что учет влияния температуры на вязкость



Фиг. 2

жидкости приводит к существенному изменению полей давления и температуры. В этом случае температура среды около скважины, благодаря более интенсивному теплопереносу, уменьшается в несколько раз по сравнению со случаем  $\mu_1 = \mu_\infty = \text{const}$ . При этом характерная длина зоны активной фильтрации имеет порядок  $10L_R$ , т. е.  $\approx 250$  м.

В заключение отметим, что, хотя сведения о стационарном решении полезны для оценки эффективности процесса, с теоретической и практической точек зрения более интересно и актуально изучение нестационарной стадии и определение динамики процесса, в частности при переменных во времени интенсивностях воздействия, а также нахождение оптимальных законов облучения в зависимости от свойств среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вахитов Г. Г., Сафиуллин Р. Х. Освоение битумных месторождений. Итоги науки и техники. Сер. Разработка нефтяных и газовых месторождений. М.: ВИНТИ, 1978, т. 10, с. 117—151.
2. Саяхов Ф. Л., Фатыхов М. А., Кузнецов О. Л. Исследование электромагнитно-акустического воздействия на распределение температуры в нефтеводонасыщенной горной породе.— Изв. вузов. Нефть и газ, 1981, № 3, с. 36—40.
3. Чистяков С. И., Денисова Н. Ф., Саяхов Ф. Л. Экспериментальное исследование зависимости диэлектрических свойств нефти и ее фракций от частоты.— Изв. вузов. Нефть и газ, 1972, № 5, с. 53—56.
4. Alberthy E. R. Production increase of heavy oil by electromagnetic heating.— J. Canad. Petr. Tech., 1976, v. 15, No. 3, p. 91—97.
5. Bridges J., Stresty G., Taflove A., Snow R. Radio-frequency heating to recovery oil from Utah tar-sands.— In: The future of heavy crude oils and tar-sands. N. Y.: McGraw-Hill Inc., 1980, p. 396—409.
6. Рубинштейн Л. И. Проблемы Стефана. Рига: Звайгзне, 1967. 457 с.
7. Carslow H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids. Oxford: Clarendon Press, 1959. 510 p.— Рус. перев. М.: Наука, 1964. 487 с.
8. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
9. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
10. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.XII.1985