

УДК 532.5 + 536.46

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ФРОНТА ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ

Авдеев П. А.

Рассматривается задача об устойчивости плоского фронта волны горения, распространяющейся в теплоизолированном пористом цилиндре. Используется модельная система теории горения, описывающая экзотермическую реакцию в пористой среде, насыщенной газом. Аррениусовская зависимость скорости реакции от температуры заменяется кусочно-постоянной. В этом случае удается найти аналитическое решение для распределения температуры и концентрации реагента в стационарной волне. В отличие от результатов подхода [1, 2] у построенного решения тепловой и диффузионный потоки всюду непрерывны. Исследование устойчивости найденного решения приводит к результатам, похожим на приближенные [1, 2], но детали потери устойчивости имеют качественное отличие, связанное с наличием складки у нейтральной гиперповерхности при числе Льюиса $L < 1$, объясняющее возможность появления винтовых волн в образце круглого сечения [3, 4].

При $0 < L < 1$ по нейтральной поверхности и данным о спектре частот колебаний свободной мембраны, совпадающей по форме с сечением цилиндрического образца, определяется граница устойчивости стационарного фронта горения в данном цилиндрическом образце. Эта граница зависит от формы сечения образца, но всегда заключена между границей устойчивости волны в неограниченном пространстве и границей устойчивости в соответствующей одномерной задаче. Потеря устойчивости происходит при пересечении парой комплексно-сопряженных собственных значений мнимой оси. При $L > 1$ потеря устойчивости происходит при пересечении вещественным собственным значением мнимой оси. Область устойчивости для цилиндра любого сечения шире области устойчивости соответствующей волне, распространяющейся в неограниченном пространстве, заполненном веществом. Определены критические показатели границы устойчивости в окрестности $L = 1$, критические размеры для образцов квадратного и круглого сечения.

Уравнение теплопроводности и диффузии в системе координат, движущейся с постоянной скоростью U вдоль образующей цилиндра, имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \frac{\partial X}{\partial s} - \Phi$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = L \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial Y}{\partial s} - \Phi$$

$$(2) \quad \Phi = \Lambda Y f(X, \theta), \quad f(X, \theta) = \exp \left(\frac{1}{\theta} \frac{X}{X-1} \right)$$

$$\tau = \frac{U^2}{a} t, \quad s = \frac{U}{a} (z_3 - Ut), \quad x = \frac{U}{a} z_1, \quad y = \frac{U}{a} z_2$$

$$X = 1 - \frac{T}{T_1}, \quad Y = \frac{q}{\theta} n, \quad T_1 = T_0 + \frac{Q}{c}$$

$$L = \frac{D}{a}, \quad q = \frac{RQ}{Ec}, \quad \theta = \frac{RT_1}{E}, \quad \Lambda = \frac{aB}{U^2} \exp \left(-\frac{1}{\theta} \right)$$

Здесь z_1, z_2, z_3 — декартовы координаты, Φ — скорость реакции, n — концентрация реагента, D, a — коэффициенты диффузии и температуропроводности, B — предэкспонент, T_0 — начальная температура, T_1 — температура горения. Остальные обозначения общепринятые [5]. Величины L, θ и q ($0 < q < \theta$) — безразмерные параметры задачи, соответствующие коэффициенту диффузии, температуре горения и тепловыделению. Вводится зависимый параметр $C = q/\theta$.

В рассматриваемой задаче, как и в [6], аррениусовская зависимость скорости реакции от температуры в (1) заменяется модельной (h — функция Хевисайда)

$$(3) \quad f(X, \theta) = h(\theta - X)$$

Для уравнений (1) в случае (2) или (3) ставится начально-краевая задача (Ω — цилиндр, ν — внешняя нормаль к границе цилиндра)

$$X|_{\tau=0} = Y_0(x, y, s), \quad Y|_{\tau=0} = X_0(x, y, s), \quad \frac{\partial X}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial Y}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

Пусть U совпадает со скоростью распространения волны горения, тогда профиль волны определяется стационарным решением (1) с граничными условиями

$$s = -\infty, \quad X = Y = 0, \quad s = +\infty, \quad X = Y = C$$

Стационарная задача приводит к системе

$$(4) \quad \frac{dX}{ds} = Z - X, \quad L \frac{dY}{ds} = Z - Y, \quad \frac{dZ}{ds} = \Lambda Y f(X, \theta)$$

$$s = -\infty, \quad X = Y = Z = 0, \quad s = +\infty, \quad X = Y = Z = C$$

Второе из уравнений (4) получено вычитанием второго уравнения (1) из первого и интегрированием по s с учетом граничных условий.

Найденной при решении (4) зависимостью, связывающей Λ , L , C , θ , определяется скорость волны. В случае (3) решение имеет вид

$$(5) \quad X = \exp(ps), \quad Y = p(1+p)\Lambda^{-1} \exp(ps), \quad s \leq s_*$$

$$X = C - \exp(s_1 - s), \quad Y = C - \exp((s_2 - s)/L), \quad s > s_*$$

$$s_* = p^{-1} \ln \theta, \quad s_1 = s_* + \ln(p\theta), \quad s_2 = s_* + L \ln [CLp/(1+Lp)^{-1}]$$

$$C = (1+p)\theta, \quad p = ((1+4L\Lambda)^{1/2} - 1)/(2L)$$

Здесь s_1 — ширина температурной волны, s_2 — ширина волны превращения. Преобразованием $X = \theta X'$, $Y = \theta Y'$ уравнения (1) приводятся к виду, содержащему только параметр Λ , а граничные условия стационарной задачи (4) содержат только параметр C/θ или связанный с ним в силу (5) параметр p . Итак стационарная задача зависит только от Λ и L или от p и L . Далее p и L принимаются за основные параметры задачи. При $L \rightarrow 0$ параметр p переходит в Λ .

Асимптотическое поведение стационарного решения при $s \rightarrow \pm \infty$ в случае (2) имеет тот же вид, что и в случае (3).

Исследуем устойчивость решения (5) в рамках линейной теории. Задача на собственные значения имеет вид

$$(6) \quad \lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} u - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} v$$

$$\lambda v = L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} u - \frac{\partial \Phi}{\partial Y} v$$

$$u, v \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \pm \infty, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

где $\partial \Phi / \partial X$ и $\partial \Phi / \partial Y$ вычислены на решении (5)

$$\partial \Phi / \partial X = -(1+p) \delta(s - s_*), \quad \partial \Phi / \partial Y = \Lambda h(s_* - s)$$

Применяя к (6) метод разделения переменных

$$(7) \quad u = \xi(s) w(x, y), \quad v = \eta(s) w(x, y)$$

получим две задачи:

$$(8) \quad \frac{d\xi}{ds} = \zeta, \quad \frac{d\eta}{ds} = \rho, \quad \frac{d\zeta}{ds} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X} + \lambda + \mu \right) \xi + \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \eta - \zeta$$

$$L \frac{d\rho}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial X} \xi + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y} + \lambda + L\mu \right) \eta - \rho$$

$$\xi, \eta, \zeta, \rho \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \pm \infty$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Заметим, что (9) — это задача о колебаниях свободной мембраны, имеющая счетное число неотрицательных упорядоченных по возрастанию решений μ_n ($\mu_0 = 0$), каждому из которых может соответствовать несколько собственных функций w . Для каждого μ_n из (8) определяются собственные числа λ , а по формуле (7) найдутся собственные функции (6), соответствующие данным λ . Для определения границы устойчивости цилиндра сечением Ω требуется знать только спектр $\mu_n(\Omega)$, $n = 0, 1, \dots$, которым форма Ω однозначно не определяется. Решение задачи устойчивости заключается в определении границы устойчивости стационарной волны в пространстве параметров $L, \rho, \{\mu_n\}$ из условия пересечения самым правым собственным значением мнимой оси.

Задача (8) зависит от задачи (9) только через параметр μ , поэтому (8) можно рассматривать как однопараметрическую по μ задачу на собственные значения λ . При $\mu = 0$ это задача об одномерной устойчивости стационарной волны. Задачу (8) можно рассматривать и как задачу об устойчивости стационарной волны, распространяющейся в неограниченном пространстве, заполненном веществом. Действительно, применяя к (6) преобразование Фурье по x, y и вводя обозначения (U, V — преобразование Фурье функций u, v)

$$\xi = U, \quad \eta = V, \quad \zeta = \partial U / \partial s, \quad \rho = \partial V / \partial s, \quad \mu = k_x^2 + k_y^2$$

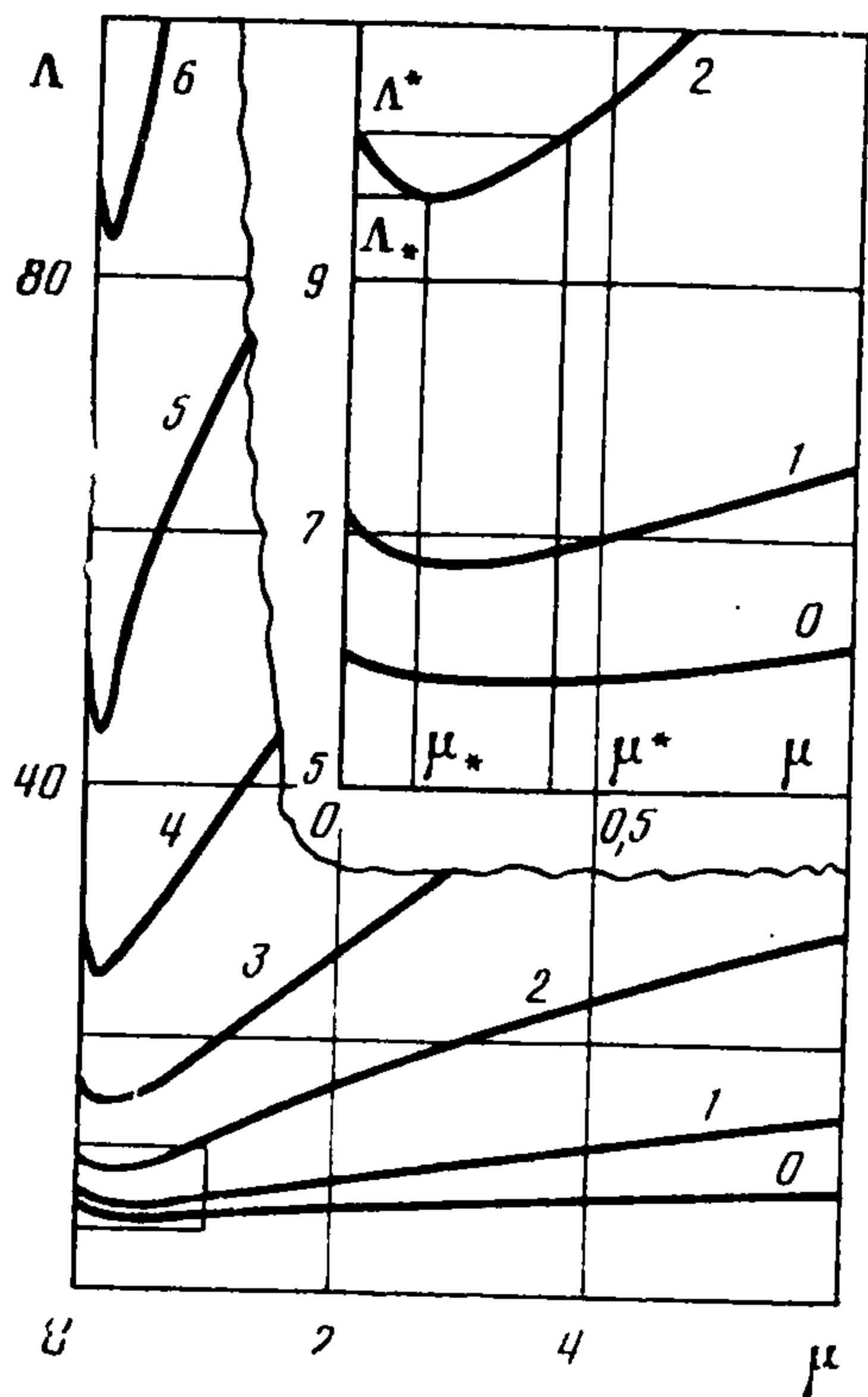
получим (8). При этом возмущения основного решения (5) имеют вид

$$\begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \exp(\lambda\tau + ik_x x + ik_y y)$$

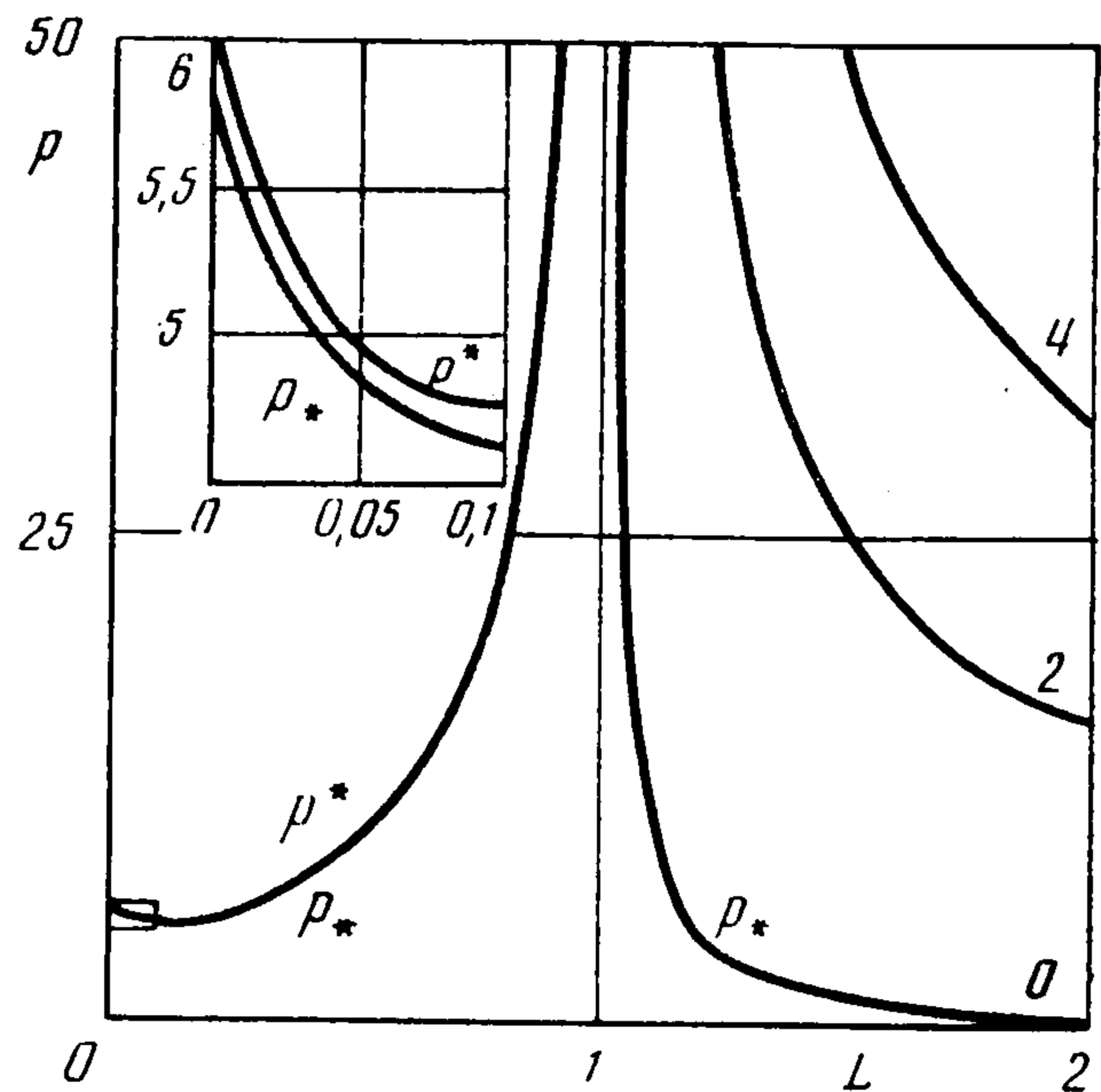
Таким образом, в задаче (8) кроме основных параметров задачи L, ρ появляется еще один параметр μ . Условие устойчивости стационарной волны определит в пространстве L, ρ, μ (или L, Λ, μ), где $L \geq 0, \mu \geq 0, \rho > 0$ ($\Lambda > 0$), нейтральную поверхность $\Lambda = \Lambda(\mu, L)$, по которой будет определяться граница устойчивости. В области, где $\Lambda > \Lambda(\mu, L)$, в правой полуплоскости λ есть собственные значения. Сечения поверхности $\Lambda = \Lambda(\mu, L)$ плоскостями $L = 0, 1, N$, где $N = 0, 1, \dots, 6$ — номер нейтральной кривой, изображены на фиг. 1. При $L > 1$ сечения поверхности $\rho(\mu, L)$, соответствующей $\Lambda(\mu, L)$ в силу (5), при $\mu = N$, где $N = 0, 2, 4$, изображены на фиг. 2.

Определение нейтральной кривой $\Lambda = \Lambda(\mu, L)$ при $L = 0$ требует некоторых изменений в постановке задачи, так как при этом изменяется порядок уравнений (1). Однако, как показало изучение этого случая, уравнение для определения нейтральной кривой при $L = 0$ совпадает с уравнением, полученным из общего случая при $L \rightarrow 0$, поэтому в дальнейшем примем $L > 0$.

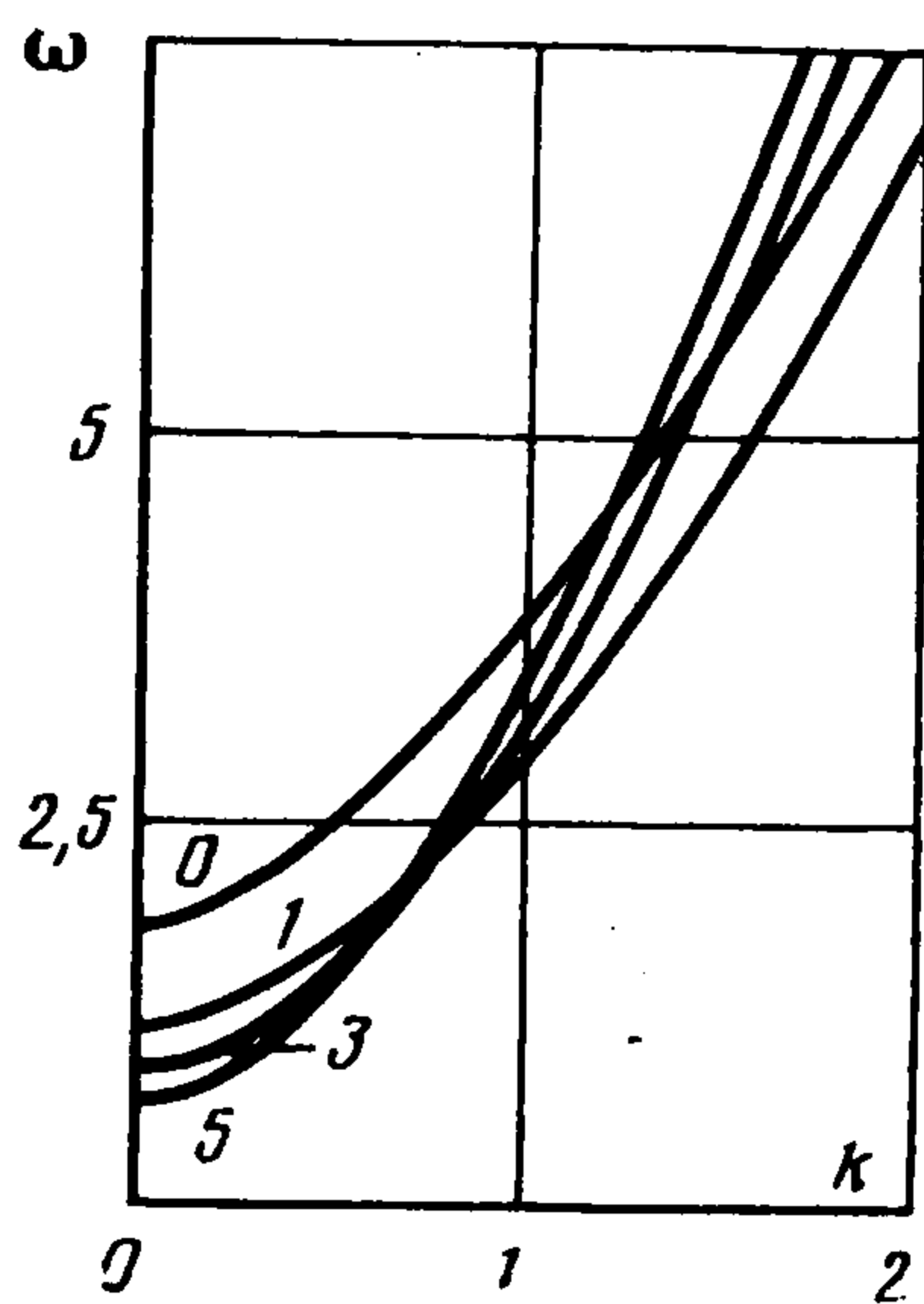
При $0 \leq L < 1$ все нейтральные кривые сначала убывают от значения $\Lambda^*(L)$ до $\Lambda_*(L)$ (при $\mu = \mu_*(L)$), а затем неограниченно возрастают



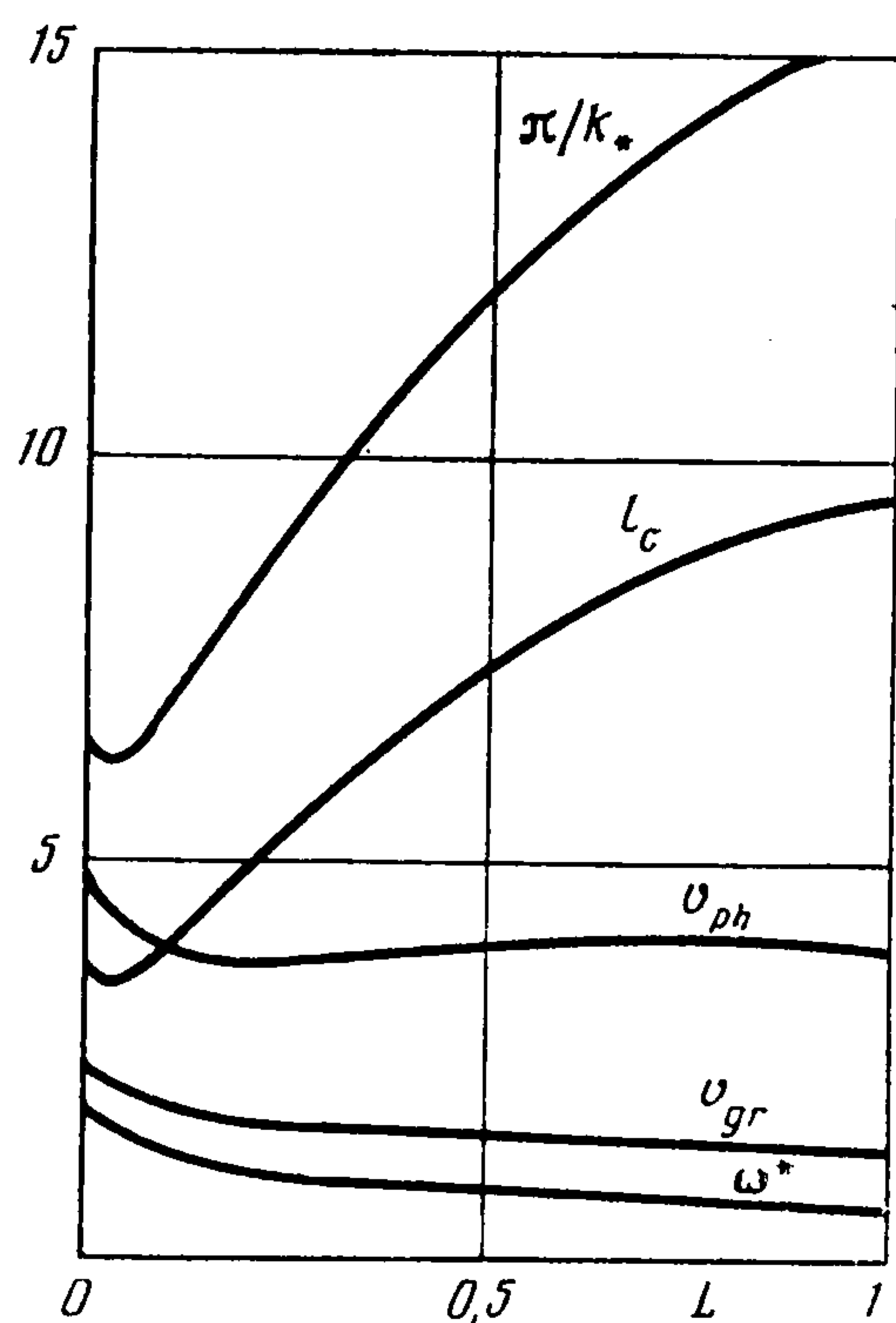
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

(фиг. 1). При пересечении нейтральной поверхности в плоскости λ пара комплексно-сопряженных собственных значений пересекает мнимую ось, значения $\lambda = \pm i\omega$ определяют функцию на нейтральной поверхности $\omega = \omega(k, L)$, где $k = \sqrt{\mu}$. Сечения этой зависимости при $L = 0, 2N$, где $N = 0, 1, 3, 5$, представлены на фиг. 3, последнее из них следует рассматривать как предельное при $L \rightarrow 1 - 0$. Сечения легко различать значениями ω при $k = 0$, эта зависимость $\omega^*(L)$ монотонно убывает с увеличением L (фиг. 4) и определяет частоту автоколебаний при потере устойчивости в одномерной задаче. Значение $\Lambda_*(L)$ определяет границу устойчивости стационарной волны, распространяющейся в неограниченном пространстве, а $\Lambda^*(L)$ — границу одномерной устойчивости стационарной волны.

В случае цилиндра сечением Ω граница устойчивости определяется из соотношения

$$(10) \quad \Lambda_{\Omega}(L) = \min_n \Lambda(\mu_n, L)$$

и всегда заключена между $\Lambda_*(L)$ и $\Lambda^*(L)$. Эти же границы $\rho_*(L)$, $\rho^*(L)$, используя (5), можно рассматривать в плоскости ρ, L . Верхние и нижние

границы устойчивости почти сливаются (фиг. 2) и имеют асимптотику $p^* \approx 5,46/(1-L) - 2,7$, $p_* \approx 5,33/(1-L) - 2,6$ при $L \rightarrow 1 - 0$.

Точные значения коэффициентов при отрицательных степенях $(1-L)$ равны соответственно $2(1+\sqrt{3})$ и $16/3$. Нижняя граница устойчивости $\Lambda_*(L)$ имеет минимум $\Lambda_{**} \approx 5,790$ при $L \approx 0,0137$. Значение n , при котором достигается минимум в (10), определяет наиболее «опасные» моды возмущений, длины полуволны π/k , фазовую и групповую скорости этих возмущений $v_{ph}(L) = \omega/k$, $v_{gr}(L) = d\omega/dk$ при $k = k_n(L)$, $k_n = \sqrt{\mu_n}$. При вычислении этих же величин для волны, распространяющейся в неограниченном пространстве, следует положить $k = k_*(L)$, $k_* = \sqrt{\mu_*(L)}$ (фиг. 4).

При $L > 1$ потеря устойчивости происходит при пересечении мнимой оси вещественным собственным значением λ , и так как $\Lambda(\mu, L)$ возрастает с увеличением μ , то минимум в (10) достигается при $n = 1$, т. е. $\Lambda_\Omega(L) = \Lambda(\mu_1, L)$. Здесь значение $\mu_0 = 0$ не учитывается, так как при этом собственному значению $\lambda = 0$ соответствуют нейтральные возмущения, приводящие лишь к смещению фронта волны вдоль оси s (см. [6]). Границы устойчивости при $\mu_1 = 2,4$ в переменных L, p представлены на фиг. 2. При $p > p(\mu_1, L)$ стационарная волна неустойчива.

Таким образом, при $L > 1$ граница устойчивости представляется поверхностью в пространстве параметров L, p, μ_1 и не зависит от значения других μ_n . Возмущение основного решения (5) в данном случае

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \exp(\lambda\tau) w_1(x, y)$$

где $\xi(s)$ и $\eta(s)$ — решения задачи (8) при $\lambda = 0$, $\mu = \mu_1$. Граница устойчивости стационарной волны, распространяющейся в неограниченном пространстве $p_*(L) = p(+0, L)$, имеет следующие асимптотики: $p_* \approx 1/(L-1) - 0,5$ при $L \rightarrow 1 + 0$ и $p_* \approx 1/L^2$ при $L \rightarrow \infty$ (фиг. 2). При $p < p_*(L)$ волна устойчива. Отметим, что в соответствующей одномерной задаче при $L > 1$ решение (5) устойчиво для любых p (конечно, нужно факторизовать возмущения по отношению к нейтральным сдвигам).

Перейдем к решению задачи (8). Собственные значения задачи (8) образуют комплексно-сопряженные пары, поэтому далее всюду принято ограничение $\text{Im } \lambda \geq 0$. Обозначим решения задачи (8) $\varphi = (\xi, \eta, \zeta, \rho)^T$ (T — символ транспонирования). Аналогично [6] определим два базиса решений (8): $\varphi^- = (\varphi_0^-, \varphi_1^-, \varphi_2^-, \varphi_3^-)$ и $\varphi^+ = (\varphi_0^+, \varphi_1^+, \varphi_2^+, \varphi_3^+)$, заданные своими асимптотиками

$$(12) \quad \begin{aligned} s \rightarrow -\infty, \quad \varphi_k^- &\sim (\Lambda, p_k(1+p_k) - (\lambda + \mu), \Lambda p_k, \\ &p_k^2(1+p_k) - p_k(\lambda + \mu))^T \exp(p_*s), \\ \varphi_m^- &\sim (1, 0, p_m, 0)^T \exp(p_ms) \\ s \rightarrow +\infty, \quad \varphi_k^+ &\sim (0, 1, 0, q_k)^T \exp(q_ks), \\ \varphi_m^+ &\sim (1, 0, p_m, 0)^T \exp(p_ms) \\ (k &= 0, 1; \quad m = 2, 3) \\ p_{0,1} &= (-1 \mp [1 + 4L(\Lambda + \lambda + L\mu)]^{1/2})/(2L) \\ p_{2,3} &= -1/2 \pm (1/4 + \lambda + \mu)^{1/2}, \quad q_{0,1} = p_{0,1} |_{\Lambda=0} \end{aligned}$$

(выбирается ветвь квадратного корня с разрезом по положительной части вещественной полуоси: $\sqrt{-1} = i$). Выражения (12) получены решением задачи (8) при формальной замене $\partial\Phi/\partial X$ и $\partial\Phi/\partial Y$ соответствующими постоянными значениями на $\pm \infty$. Формулы (12) справедливы в случае не кратных корней характеристических уравнений.

Следующие условия, получаемые из (8), позволяют по заданным асимптотикам (12) продолжить φ^- и φ^+ на всю ось s :

$$(13) \quad [\xi] = [\eta] = 0, \quad [\zeta] = [L\rho] = -(1+p)\xi_*$$

$$\xi_* = \xi(s_*), \quad [f] = f(s_* + 0) - f(s_* - 0)$$

Два базиса φ^- и φ^+ линейно зависимы, поэтому

$$(14) \quad \varphi^- = S(\lambda)\varphi^+$$

где $S(\lambda)$ — постоянная матрица 4×4 . Задача определения собственных значений λ формулируется при помощи условий на S или на матрицу P , обратную к ней.

Изучая вопрос о возможной потере устойчивости решения (5), ограничимся исследованием возможности появления собственных значений в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, а так как ранее ограничились верхней полуплоскостью, то далее считаем величину λ принадлежащей первому квадранту. В первом квадранте φ_1^- , φ_2^- ограничены при $s \rightarrow -\infty$. Поэтому собственная функция φ должна быть линейной комбинацией как φ_1^- , φ_2^- , так и φ_0^+ , φ_3^+ . С другой стороны, из (14)

$$\varphi_j^- = S_{0j}\varphi_0^+ + S_{1j}\varphi_1^+ + S_{2j}\varphi_2^+ + S_{3j}\varphi_3^+, \quad j=1, 2$$

и комбинация $\varphi = c_1\varphi_1^- + c_2\varphi_2^-$ не должна содержать φ_1^+ и φ_2^+ . Для этого нужно, чтобы строки $(S_{11}\varphi_1^+, S_{21}\varphi_2^+)$ и $(S_{12}\varphi_1^+, S_{22}\varphi_2^+)$ были пропорциональны, т. е.

$$(15) \quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение (15) служит для определения собственных значений λ , лежащих в первом квадранте. Вычисления матрицы S с использованием (12), (13) дают

$$(16) \quad S_{11} = [(p_1 - q_0) [p_1(1 + p_1) - (\lambda + \mu)] - \Lambda(1 + p)/L] (q_1 - q_0)^{-1} \exp[(p_1 - q_1)s_*]$$

$$S_{12} = (1 + p) [L(q_0 - q_1)]^{-1} \exp[(p_2 - q_1)s_*]$$

$$S_{21} = \Lambda(p_1 - p_3 - p - 1)(p_2 - p_3)^{-1} \exp[(p_1 - p_2)s_*]$$

$$S_{22} = (p_2 - p_3 - p - 1)(p_2 - p_3)^{-1}$$

Подстановка (16) в (15) приводит к уравнению для λ

$$(p_1 - q_0)(p_2 - p_3 - p - 1)[p_1(1 + p_1) - (\lambda + \mu)] - \Lambda(1 + p)(p_2 - p_1)/L = 0$$

которое, используя тождество $p_1(1 + p_1) - (\lambda + \mu) = (p_1 - p_2)(p_1 - p_3)$, можно сократить на $(p_1 - p_2)$, $(p_1 - q_0)$; окончательно получим

$$(17) \quad \Delta(\lambda, p, \mu, L) \equiv (p_1 - p_3)(p_2 - p_3) + (1 + p)(p_3 + q_0 + 1/L) = 0$$

При $L \rightarrow 0$ уравнение (17) дает

$$(18) \quad (\Lambda + 2\lambda)[1 + 4(\lambda + \mu)]^{1/2} = 2\lambda(\Lambda - 1) + \Lambda - 4\mu$$

Возведя (18) в квадрат, получим

$$(19) \quad \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

$$a_1 = 3/2\Lambda - 1/4\Lambda^2 + \mu, \quad a_2 = 1/2\Lambda + (2\Lambda - 1)\mu, \quad a_3 = (1/2\Lambda + 1/4\Lambda^2)\mu - \mu^2$$

Собственные значения λ , лежащие в первом квадранте, это корни уравнения (19), удовлетворяющие уравнению (18). Исследуем (19) при помощи

критерия Гурвица. Линии, задаваемые уравнениями

$$a_1 = 0, \quad a_1 a_2 - a_3 = 0, \quad a_3 (a_1 a_2 - a_3) = 0$$

разбивают плоскость параметров Λ, μ на области с разным числом корней уравнения (19) в правой полуплоскости λ . Для областей

$$0 < \Lambda \leq \sigma - 1, \quad \sigma - 1 < \Lambda < 2/\sigma + 3 + \sigma, \quad 2/\sigma + 3 + \sigma \leq \Lambda \\ (\sigma = (1 + 4\mu)^{1/2}, \quad \Lambda > 0, \quad \mu \geq 0)$$

корни в правой полуплоскости λ соответственно: один вещественный, нет корней, пара комплексно-сопряженных; в последнем случае представляет интерес только корень с $\text{Im } \lambda \geq 0$, потому что уравнение (18) было получено для первого квадранта.

Можно показать, что вещественный корень не удовлетворяет уравнению (18), а корень из комплексно-сопряженной пары ему удовлетворяет. Задача (8) имеет в качестве решения также корень, комплексно-сопряженный найденному, пересечение рассматриваемой парой мнимой оси связывается с потерей устойчивости. Граница устойчивости

$$(20) \quad \Lambda(\mu) = 3 + (3 + 4\mu)(1 + 4\mu)^{-1/2}$$

при больших μ асимптотически приближается к параболе $4\mu = (\Lambda - 3)^2 - 5$. Для точек (Λ, μ) кривой (20) корни уравнения (19) легко вычислить, один из них $\lambda = -a_1$, поэтому для пары других имеем

$$\lambda = \pm i\omega, \quad \omega = 1/2 (1 + 4\sigma + 5\sigma^2 + 2\sigma^3)^{1/2} \\ \sigma = (1 + 4\mu)^{1/2}, \quad \mu = k^2$$

Для значений $0 < L < 1$ проводилось численное исследование: методом Ньютона из уравнения $2L\Delta(i\omega, p, \mu, L) = 0$ определялись корни ω, p как функции параметров $\mu = k^2, L$. Сечения этих функций при фиксированных L представлены на фиг. 1, 3.

При $L = 1$ уравнение (17) имеет корни $\lambda = -\mu, \lambda = -\mu - 1/4$, которые не попадают в первый квадрант, поэтому решение (5) устойчиво.

При $L > 1$ граница устойчивости вычисляется следующим образом. В уравнении (17) полагаем $\lambda = 0$, перегруппировка частей уравнения с последующим возведением в квадрат приводит к квадратному относительно p уравнению

$$(21) \quad Q_0 p^2 + Q_1 p + Q_2 = 0 \\ Q_0 = 2(1 - L - L^2) - 8L^2\mu + 2L(L - 1)\sigma + 2(L - 1)r + 2L\sigma r \\ Q_1 = 4(1 - L) - 2r^2\sigma + 2(L - 4L\mu - 2)r + 2(1 + L)\sigma r \\ Q_2 = -8L\mu - 8L(2 - L + 2L^2)\mu^2; \quad r = (1 + 4L^2\mu)^{1/2}$$

При $\mu = 0$ это уравнение тождественно удовлетворяется для любых p, L . Действительно, из уравнения (17) следует, что $\lambda = 0$ при $\mu = 0$ — собственное значение для любых L, p . Как и в [6], это связано с наличием однопараметрического семейства решений уравнений (4), получаемых из (5) сдвигом вдоль s . Нейтральная гиперповерхность $p = p(\mu, L)$ получается как решение уравнения (21) со знаком плюс перед радикалом, другое значение отрицательно. Соответствующая $\lambda = 0$ собственная функция $\Phi = S_{22}\Phi_1^- - S_{21}\Phi_2^-$ определит $\xi(s)$ и $\eta(s)$ в (11). Предельное сечение $p_*(L) = p(+0, L)$ можно вычислить, если разделить (21) на μ и перейти к пределу $\mu \rightarrow +0$, тогда получим

$$p_*(L) = (-2L^2 + 3L + 1 + [(2L - 1)(2L^3 - 5L^2 + 8L - 1)]^{1/2}) \times \\ \times [4L(L - 1)]^{-1}$$

Найденное решение подвергалось численной проверке.

Перейдем к задаче (9). Воспользуемся формулой Вейля для спектра [7]

$$(22) \quad \mu_n = 4\pi |\Omega|^{-1} n, \quad n \rightarrow \infty$$

(здесь $|\Omega|$ — площадь сечения цилиндра в безразмерных координатах (1)). Если деформировать контур Ω так, чтобы нормали ν мало изменились, то спектр $\{\mu_n\}$ мало изменится, если же при близости контуров Ω , нормали будут не близкими, то точки спектра можно пошевелить на конечную величину. Можно изготовить образец той же площади сечения, что и исходный, с близкой к исходной, но сильно изломанной границей, и благодаря конечному изменению μ_n это может привести к конечному изменению границы устойчивости $\Lambda_\Omega(L)$ (см. (10)). При этом в силу (22) $\Lambda_\Omega(L)$ зависит только от конечного числа μ_n с малыми номерами.

Если $\mu_1 > \mu^*(L)$ (фиг. 1), то $\Lambda_\Omega(L) = \Lambda^*(L)$ и потеря устойчивости при $0 \leq L < 1$ происходит как в одномерной задаче. В остальных случаях для вычисления $\Lambda_\Omega(L)$ следует пользоваться формулой (10), принимая во внимание лишь конечную часть спектра, для которой $\Lambda(\mu_n, L) < \Lambda^*(L)$. Условие $\mu_1(\Omega) = \mu^*(L)$ при $0 \leq L < 1$ и соответствующее сечение цилиндра из семейства подобных сечений, на котором оно выполнено, назовем критическим. Все сечения семейства меньшего размера, чем критические, имеют одну и ту же границу устойчивости $\Lambda_\Omega(L) = \Lambda^*(L)$, и потеря устойчивости происходит как в одномерной задаче. Для квадрата со стороной, $l_c = \pi/\sqrt{\mu^*(L)}$ (фиг. 4) сечение будет критическим, а для круга критический радиус $R_c \approx 0,5861 l_c(L)$.

При $L > 1$, если $p < p_*(L)$, стационарная волна устойчива независимо от формы цилиндра. При $p > p_*(L)$ определим критический размер квадрата как $l_c = \pi/\sqrt{\mu^*(L, p)}$, где $\mu^*(L, p)$ — обращение формулы для нейтральной гиперповерхности $p = p(\mu, L)$. При заданном L и $p > p_*(L)$ стационарная волна в цилиндре квадратного сечения со стороной квадрата $l < l_c$ устойчива. При $l = l_c$ происходит потеря устойчивости, причем при «мягком» возбуждении неустойчивости ответвившееся решение представляет собой стационарную волну, но уже неоднородную по переменным x, y .

Автор благодарен Г. Г. Черному за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А. М., Берцун В. Н., Агранат В. М. Исследование диффузионно-тепловой неустойчивости ламинарных пламен.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 3, с. 550—553.
2. Гришин А. М., Агранат В. М., Берцун В. Н. Диффузионно-тепловая неустойчивость ламинарных пламен в трубах.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 4, с. 773—776.
3. Максимов Ю. М., Пак А. Т., Лавренчук Г. В. и др. Спиновое горение безгазовых систем.— Физика горения и взрыва, 1979, т. 15, № 3, с. 156—159.
4. Струнина А. Г., Дворянкин А. В. Влияние тепловых факторов на закономерности неустойчивого горения безгазовых систем.— Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 5, с. 1185—1188.
5. Шкадинский К. Г., Хайкин В. И., Мержанов А. Г. Распространение пульсирующего фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе.— Физика горения и взрыва, 1971, т. 7, № 1, с. 19—28.
6. Авдеев П. А. Исследование устойчивости стационарного фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе.— Изв АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 115—118.
7. Baltes H. P., Hilf E. R. Spectra of Finite Systems. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1976. 116 p.

Москва

Поступила в редакцию
22.VII.1985