4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
5. *Чернина В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.
6. *Марков Г. Т., Бодров В. В., Зайцев А. В.* Алгоритм и численные результаты расчета периодической структуры из излучателей в виде ступенчатых рупоров при различных способах возбуждения.— В кн.: Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. М.: Высш. школа, 1980, № 4, с. 132—163.
7. *Марков Г. Т.* К вопросу о теореме эквивалентности.— Научн. докл. высш. школы. Радиотехника и электроника, 1958, № 4, с. 22—31.
8. *Garabedian P. R.* Partial differential equations with more than two independent variables in the complex domain.— J. Math. and Mech., 1960, v. 9, No. 2, p. 241—271.

Москва

Поступила в редакцию
30.VII.1985

УДК 539.3 : 534.1

ВИБРАЦИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ НА ЕГО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Подгаецкий Э. М.

Исследуются установившиеся продольные колебания в полуограниченном упругом стержне с учетом «сухого» трения на его боковой поверхности. Приближенное решение строится методом гармонической линеаризации [1], приводящим к краевой задаче для системы двух нелинейных уравнений. Последняя сводится обращением переменных к задаче Коши. Приводятся результаты численного расчета.

Рассматриваются продольные колебания невесомого одномерного упругого стержня постоянного поперечного сечения с учетом сухого трения на его боковой поверхности. Обсуждаются установившиеся колебания, в отличие от [2], где решалась задача с начальными значениями для частных законов нагружения торца стержня. Задавая на одном его конце гармоническое возмущение деформации и считая другой (удаленный на бесконечность) покоящимся, получим систему

$$\rho S\partial^2u/\partial t^2 = ES\partial^2u/\partial x^2 - q\,\mathrm{sign}\,(\partial u/\partial t) \tag{1}$$
$$x=0,\ u=u_0\cos\omega t;\ x\to\infty,\ u\to 0\ (u_0\equiv\mathrm{const}>0)$$

где u, S — смещение и площадь поперечного сечения, ω — частота, ρ, E — плотность и модуль Юнга, q — величина силы трения на боковой поверхности на единицу длины стержня.

Приближенное решение задачи (1) будем искать в форме

$$u = u_0v\,(x)\cos[\omega t+\varphi\,(x)] \tag{2}$$

причем

$$v\equiv 0,\ 0<x_*\leqslant x \tag{3}$$

(x_* — неизвестная величина), а в области $0\leqslant x<x_*$ применим метод гармонической линеаризации [1], в котором используется представление (2). Тогда из (1) — (3) получим систему уравнений и граничных условий

$$v\varphi''+2v'\varphi'=1/p,\ v''+[1-(\varphi')^2]\,v=0 \tag{4}$$
$$v\,(0)=1,\ v\,(z_*)=0,\ v'\,(z_*)=0,\ \varphi\,(0)=0 \tag{5}$$
$$z=\sqrt{\rho/E}\,\omega x,\ z_*=\sqrt{\rho/E}\,\omega x_*,\ p={}^1\!/_4\pi\rho su_0\omega^2/q$$

Аргументом у функций v, φ служит новая безразмерная координата z, а штрих означает дифференцирование по z. Третье условие в (5) следует из (3) и непрерывности при $x=x_*$ величины напряжения силы, пропорциональной в упругом теле производной $\partial u/\partial x$. Недостающее краевое условие к уравнениям (4) следует из требования ограниченности $\partial u/\partial x$

$$|\,v'\,(z)\,|<\infty,\quad |\,v\,(z)\,\varphi'\,(z)\,|<\infty,\ 0\leqslant z\leqslant z_* \tag{6}$$

При выводе уравнений (4) предполагалось, что

$$v\,(z)>0,\ 0\leqslant z<z_* \tag{7}$$

Приведем вначале асимптотически точное при $p \ll 1$ решение задачи (4)–(7)

(8) $$v = (1 - z/z_*)^2,\quad \varphi = \sqrt{2}\ln(1 - z/z_*),\quad z_* = (\sqrt{18p})^{1/3}$$

Таким образом, учет третьего условия в (7) делает существенным отличие функций v и φ от их приближенных линейных представлений в [3].

Обращаясь к случаю произвольных p, можно убедиться, что первое уравнение (4) имеет интеграл

(9) $$-\varphi' = \frac{g}{(pv)^2}\quad \left(g = \mathrm{const} - \int_0^z pv\,dt\right)$$

Подставляя (9) во второе уравнение (4), получим

(10) $$g''' + g' - g^2/(g')^3 = 0$$

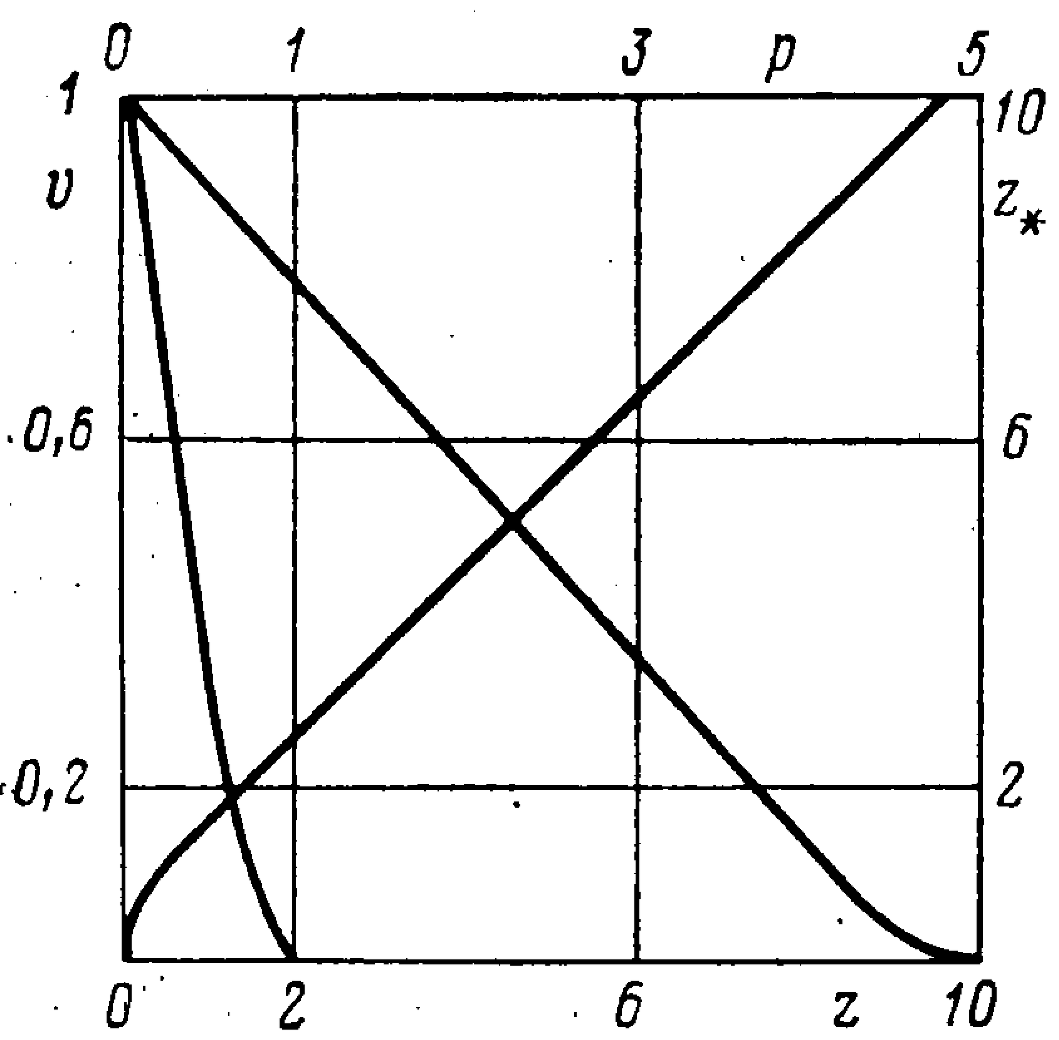
Чтобы удовлетворить краевым условиям (5), (7), потребуем

(11) $$g(z_*) = 0,\ g'(z_*) = 0,\ g''(z_*) = 0,\ g'(0) = -p$$

(12) $$g'(z) < 0,\ 0 \leqslant z < z_*$$

Условия (6) при этом выполняются независимо.

Главной целью будем считать построение зависимости z_* от p. Для ее расчета сделаем обращение постановки (11), т. е. будем считать z_* заданным, а p неизвестным, и заменим третье условие в (11) на $g''(z_*) = w$, где w — положительная произвольная постоянная. Тогда вместо (11) получим



(13) $$g(z_*) = 0,\ g'(z_*) = 0,\ g''(z_*) = w,\quad w > 0$$

Задача Коши (10), (12), (13) удобна для счета на ЭВМ. При этом в качестве параметра p следует, очевидно, брать $-g'(0)$. Для возвращения к условиям (11) надо сделать переход $w \to 0$.

Счет выполнялся по библиотечной программе с автоматическим выбором шага сведением уравнения (10) к системе трех уравнений первого порядка. Разлагая $g(z)$ в степенной ряд в окрестности $z = z_*$, имеем $g^2/(g')^3 \to 0$ при $z \to -z_*$, поэтому в численном алгоритме эта дробь при $z = z_*$ приравнивалась нулю. При $p \ll 1$ асимптотическое и численное значения $z_*(p)$ в (8) практически совпали.

На фигуре представлены зависимости $z_*(p)$ и $v(z)$. Очевидно, что полученное решение справедливо и для стержня конечной длины l при тех p, пока $x_* < l$.

Автор благодарит О. В. Воинова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коловский М. З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966. 317 с.
2. *Никитин Л. В.* Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения. — Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 1, с. 126—130.
3. *Миронов М. В.* О распространении в стержнях продольных колебаний с медленно меняющимися параметрами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4, с. 91—96.

Москва

Поступила в редакцию 11.V.1985

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 25.11.86 Подписано к печати 20.01.87 Т-06016 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 36,1 Уч.-изд. л. 15,8 Бум. л. 5,5
Тираж 2317 экз. Зак. 3169

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6