

Кроме величин, содержащихся в таблице, по уравнениям (13) вычисляются координаты некоторой совокупности точек свободной границы  $CD$ , а при частичном перехвате потока — также и точек разделяющей линии тока  $RR_0$ ; к последней процедуре привлекается соотношение (14). Рассчитанные таким образом кривые представлены на фиг. 2 сплошными линиями для первого варианта и штриховыми — для второго; цифры на графике и в таблице относятся к одним и тем же значениям  $Q$ .

Сопоставляя картину течения и его характеристики, видим, что заглубление дрен в первом варианте обеспечивает захват ими той же части нисходящего потока, что и во втором варианте, при меньшем вакуумировании. Вместе с тем глубокий дренаж гораздо в меньшей степени усиливает фильтрацию и нарушает ее равномерность в подповерхностном слое почвы.

Если же второй расчетный вариант привести к одинаковому с первым значению  $\beta = 2,0$ , то, сообразуясь с равенствами (1), будем иметь  $l = 2,0$ ; вдвое увеличатся при этом все линейные и связанные с ними величины, включая фильтрационные расходы. На фиг. 2 следует подвергнуть соответствующему преобразованию подобия штриховые кривые. Отмеченные выше различия между обоими расчетными вариантами должны быть отнесены теперь на счет изменения расстояния между дренами. При сохранении неизменной величины  $\beta_1$  в случае  $l = 2,0$  имеем: —  $p_{B_1} = 0,5847; 1,1447; 1,6793; 2,1652; 2,6004$  соответственно при  $Q/Q^* = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ . Из сравнения с величинами  $-p_{B_1}$  для первого варианта следует, что при двукратном разрежении дрен перехват ими той же части фильтрационного потока с поверхности достигается примерно трехкратным усилением вакуума давления на контуре дрены.

Автор благодарит Н. С. Колодея за помощь при вычислениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Эмих В. Н. О нескольких гидродинамических моделях дренажа. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1046—1057.
3. Эмих В. Н. Анализ двумерной установившейся фильтрации в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 857—868.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
27.1.1986

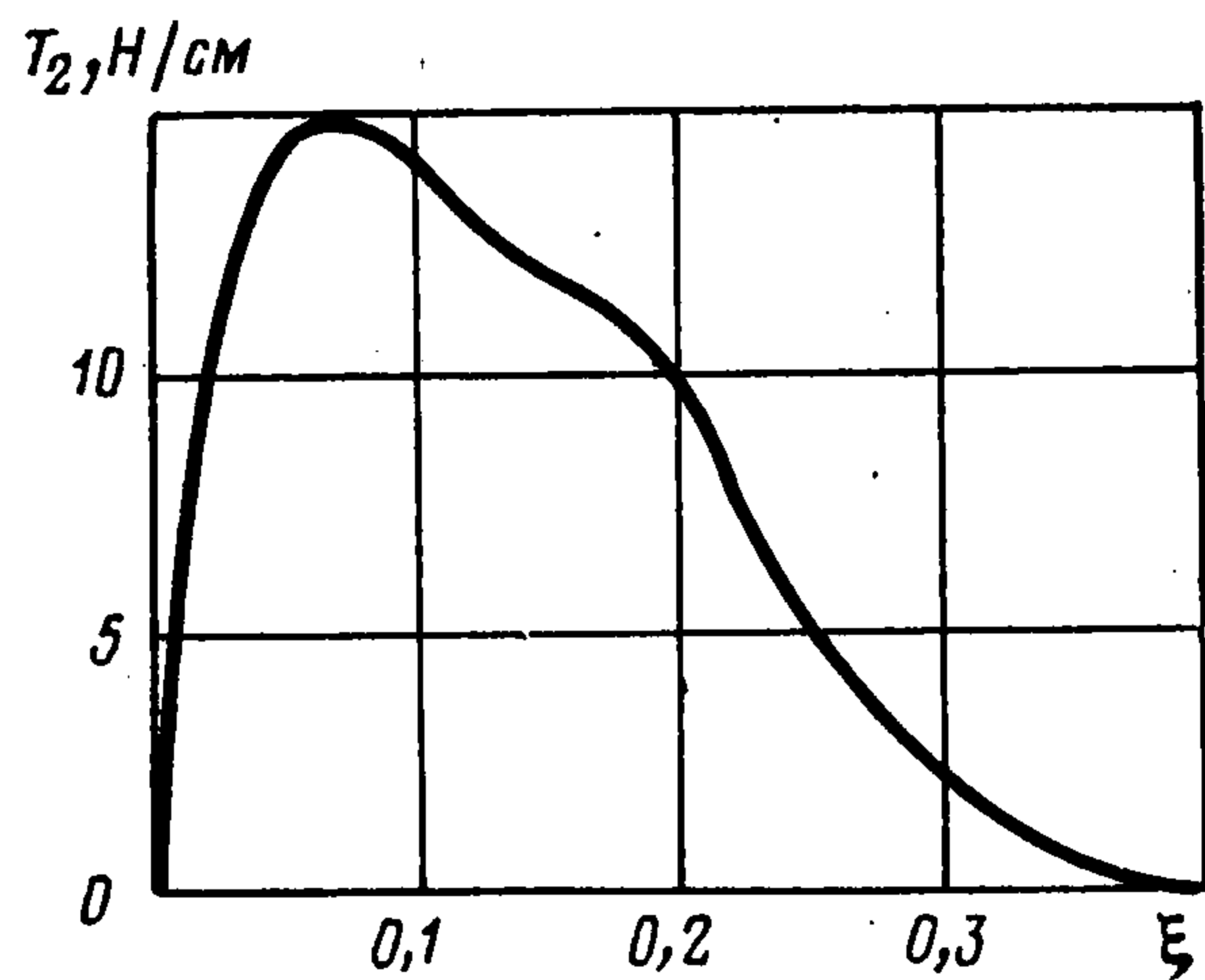
УДК 539.3

#### К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

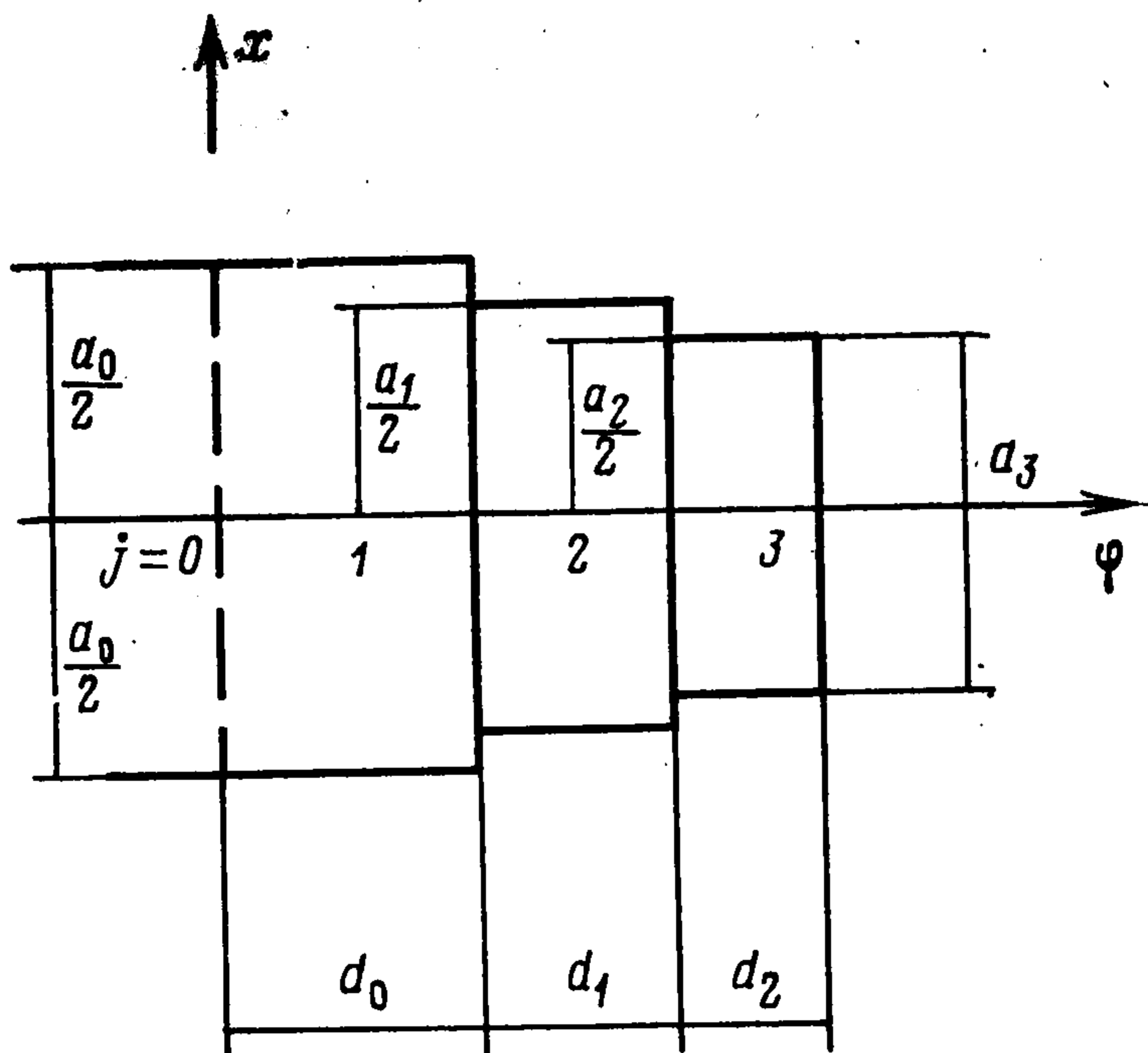
Богомольный В. М.,

Для решения эллиптической краевой задачи с неизвестной свободной границей используется аналитическое продолжение в область комплексных независимых переменных, при этом оценка неизвестной области решения получена методом характеристик на основании принципа отображения Шварца и соответствия между решениями задачи Коши в эллиптической и гиперболической областях. Численное решение поставленной задачи получено также методом Галеркина с использованием функций Грина.

Задачи теории упругости с неизвестной границей области решения рассматривались в [1, 2]. Зона влияния отверстия в растянутой пластине определена в [2] из условия аналитичности правой части характеристического уравнения на контуре единичной окружности, полученной после конформного преобразования. Метод характеристик и условия существования решения, определяемые теоремой Коши—Римана, были использованы для нахождения области решения гиперболического уравнения торообразной оболочки [3]. Ниже решается аналогичная краевая задача в эллиптической области.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим сегмент тора с меридиональным разрезом малой ширины, ограниченный координатами  $0 \leq \theta \leq \pi/6$  и  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ( $\theta, \varphi$  — угловые координаты в меридиональном и окружном направлениях). К краю  $\theta_0 = 0$  через подвижный диск приложена сила  $P_z$ , край  $\theta_1 = \pi/6$  жестко закреплен и остается неподвижным. Края  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  свободны от внешних усилий. Зона влияния края  $\varphi = 0$ , определяющая область решения основного уравнения в частных производных, неизвестна и находится для тонких оболочек по безмоментной теории, при этом основное уравнение имеет вид [4]

$$(1) \quad \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

где  $U = -T_2 R_1 \sin^2 \theta$ ,  $T_2$  — растягивающие усилия в окружном направлении,  $R_1, R_2$  — радиусы главных кривизн срединной поверхности оболочек. В случае торообразной оболочки уравнение (1) примет вид

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \xi = A^{-1/2} \xi_1$$

$$A = \frac{1}{\theta_1 - \theta_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin^3 \theta}{(\lambda + \sin \theta)^3} d\theta, \quad \xi_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin \theta}{(\lambda + \sin \theta)^2} d\theta, \quad \lambda = \frac{d}{R_1},$$

( $d$  — расстояние от оси симметрии торообразной оболочки до центра ее меридионального сечения).

С учетом осесимметричности и непрерывности напряженного состояния вне зоны влияния края  $\varphi = 0$  принимаем для (2) следующие граничные условия:

$$(3) \quad U|_{\varphi=0} = 0, \quad U|_L = f(\xi), \quad \partial U / \partial \varphi|_L = 0$$

Здесь  $L$  — неизвестная граница,  $f(\xi)$  — функция  $T_2$ , известная из решения аналогичной задачи для замкнутой по  $\varphi$  оболочки [5]; для сегмента тора  $D \leq \theta \leq \pi/6$ , при  $R_1 = 20$  см,  $h = 0,02$  см,  $\lambda = 3,3$  и  $P_z = 98$  Н функция  $T_2(\xi)$  приведена на фиг. 1.

Преобразуем уравнение (2), вводя замену

$$(4) \quad Y(\xi, \varphi) = f(\xi) - U(\xi, \varphi)$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = F(\xi), \quad F(\xi) = \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

Область решения уравнения (5) аппроксимируем набором прямоугольных элементов (ПЭ) с размерами  $a_j, d_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) (фиг. 2).

Краевые условия (3) с учетом (4) запишем в виде

$$(6) \quad Y|_{\varphi=0} = f(\xi), \quad Y|_L = 0$$

На сторонах ПЭ, параллельных оси  $\varphi$

$$(7) \quad dY/d\varphi = 0$$

В математическом описании задача (5)—(7) аналогична задаче распространения электромагнитных волн в замкнутой системе прямоугольных волноводов. На границе в поперечном сечении волновода, показанном штриховой линией на фиг. 2, задается источник возмущения и рассматриваются распространение и отражение волн в продольном направлении [6].

Решения уравнения (5) методом Галеркина для каждого из ПЭ имеют вид

$$(8) \quad Y(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_m^j (\gamma_j \operatorname{sh} \gamma_j d_j)^{-1} \sin \frac{n\pi}{a_j} \left( x + \frac{a_j}{2} \right), \quad \gamma_j = \frac{n\pi}{a_j}$$

$$(9) \quad F_m^j = \frac{\varepsilon_n}{2a_j} \int \int_{G(x, \varphi)} S_j(x) \sin \frac{n\pi}{a_j} \left( x + \frac{a_j}{2} \right) H dx d\varphi$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0, \end{cases} \quad H = \begin{cases} \operatorname{ch} \gamma_j (d - \varphi') \operatorname{ch} \gamma_j \varphi^0, & \varphi^0 < \varphi' \\ \operatorname{ch} \gamma_j \varphi' \operatorname{ch} \gamma_j (d - \varphi^0), & \varphi^0 > \varphi' \end{cases}$$

$$S_j(x) = \frac{d^2 f_{0j}(x)}{dx^2}, \quad f_{0j}(x) = \sum_{\alpha=1}^m B_{j\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{a_j} \left( x + \frac{a_j}{2} \right)$$

Здесь  $x$  — новая переменная, выбранная таким образом, чтобы ось  $\varphi$  была осью симметрии ПЭ,  $S_j(x)$  — функция Грина,  $B_{j\alpha}$  — неизвестные коэффициенты,  $\varphi'$  — координата плоскости сопряжения ПЭ,  $\varphi^0$  — координата плоскости интегрирования функций влияния, характеризующих электромагнитные поля в отдельных ПЭ. Выбор функции  $\eta(\varphi^0, \varphi')$  определяется теоремой эквивалентности, на основании которой действительные источники электромагнитного поля заменяются эквивалентными поверхностными токами и формируются интегральные уравнения типа (9) [7].

Из условий сопряжений решений (8) на границах ПЭ, параллельных оси  $x$  (фиг. 2), получим систему уравнений, после интегрирования которой из системы алгебраических уравнений находим коэффициенты  $B_{j\alpha}$ .

В известной задаче электродинамики первое краевое условие (6) соответствует заданию источника возмущения, а условие минимума поля отраженной волны, определяющее зону влияния источника, сводится к нахождению минимума интеграла

$$I_0 = \int_{-a_0/2}^{a_0/2} \frac{d^2}{dx^2} \left[ B_{0\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{a_0} \left( x + \frac{a_0}{2} \right) \right] dx$$

Задаваясь последовательным набором значений  $a_j, d_j$ , начиная от минимально возможных и проводя их дискретное увеличение, вычисляем  $I_0$ . Из условия минимума функции  $I_0$  определяем форму и размеры неизвестной границы  $L$ . Как следует из числовых расчетов при ранее приведенных параметрах, максимальный размер области решения (в направлении  $\varphi$ ) равен  $\varphi_0^{(1)} = 0,41$  (фиг. 2).

Оценку максимального размера области решения уравнения (5) получим аналитическим продолжением функции  $Y$  в область комплексных переменных  $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ . При этом (5) соответствует волновому уравнению [8]  $\partial^2 Y / \partial \varphi_1^2 - \partial^2 Y / \partial \xi_2^2 = F(\xi)$ . Его характеристики определяются выражением  $d\xi_2/d\varphi_1 = \pm 1$ , образуя семейство параллелей к биссектрисам координатных углов, вершины которых удовлетворяют соотношению  $\xi_2 \pm \varphi_1 = \text{const}$ . Из первого краевого условия (6), приравнявая  $\xi_2$  величине отрезка известной части границы (фиг. 1, 2) и проводя через нее характеристику до пересечения с осью  $\varphi_1$ , находим приближенную оценку максимального размера неизвестной области решения уравнения (5):  $\varphi_0^{(2)} = 0,396$ , т. е. отличие от ранее полученного методом интегральных уравнений результата не превышает 3,5%. Проведенное сравнение показывает возможность использования метода характеристик для решения эллиптических краевых задач с неизвестной границей в теории тонких оболочек.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача. — ПММ, 1946, т. 10, вып. 3, с. 366—386.
2. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963—979.
3. Богомольный В. М., Степанов Р. Д. Решение однородной краевой задачи для сектора сегмента торообразной оболочки. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 4, с. 755—759.

4. Носов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. 344 с.
5. Чернина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.
6. Марков Г. Т., Бодров В. В., Зайцев А. В. Алгоритм и численные результаты расчета периодической структуры из излучателей в виде ступенчатых рупоров при различных способах возбуждения. — В кн.: Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. М.: Высш. школа, 1980, № 4, с. 132—163.
7. Марков Г. Т. К вопросу о теореме эквивалентности. — Научн. докл. высш. школы. Радиотехника и электроника, 1958, № 4, с. 22—31.
8. Garabedian P. R. Partial differential equations with more than two independent variables in the complex domain. — J. Math. and Mech., 1960, v. 9, No. 2, p. 241—271.

Москва

Поступила в редакцию  
30.VII.1985.

УДК 539.3 : 534.1

## ВИБРАЦИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ НА ЕГО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Подгаецкий Э. М.

Исследуются установившиеся продольные колебания в полуограниченном упругом стержне с учетом «сухого» трения на его боковой поверхности. Приближенное решение строится методом гармонической линеаризации [1], приводящим к краевой задаче для системы двух нелинейных уравнений. Последняя сводится обращением переменных к задаче Коши. Приводятся результаты численного расчета.

Рассматриваются продольные колебания невесомого одномерного упругого стержня постоянного поперечного сечения с учетом сухого трения на его боковой поверхности. Обсуждаются установившиеся колебания, в отличие от [2], где решалась задача с начальными значениями для частных законов нагружения торца стержня. Задавая на одном его конце гармоническое возмущение деформации и считая другой (удаленный на бесконечность) покоящимся, получим систему

$$(1) \quad \rho S \partial^2 u / \partial t^2 = E S \partial^2 u / \partial x^2 - q \operatorname{sign} (\partial u / \partial t)$$

$$x = 0, u = u_0 \cos \omega t; \quad x \rightarrow \infty, u \rightarrow 0 \quad (u_0 \equiv \text{const} > 0)$$

где  $u$ ,  $S$  — смещение и площадь поперечного сечения,  $\omega$  — частота,  $\rho$ ,  $E$  — плотность и модуль Юнга,  $q$  — величина силы трения на боковой поверхности на единицу длины стержня.

Приближенное решение задачи (1) будем искать в форме

$$(2) \quad u = u_0 v(x) \cos [\omega t + \varphi(x)]$$

причем

$$(3) \quad v \equiv 0, \quad 0 < x_* \leq x$$

( $x_*$  — неизвестная величина), а в области  $0 \leq x < x_*$  применим метод гармонической линеаризации [1], в котором используется представление (2). Тогда из (1) — (3) получим систему уравнений и граничных условий

$$(4) \quad v \varphi'' + 2v' \varphi' = 1/p, \quad v'' + [1 - (\varphi')^2] v = 0$$

$$(5) \quad v(0) = 1, \quad v(z_*) = 0, \quad v'(z_*) = 0, \quad \varphi(0) = 0$$

$$z = \sqrt{\rho/E} \omega x, \quad z_* = \sqrt{\rho/E} \omega x_*, \quad p = 1/4 \pi \rho s u_0 \omega^2 / q$$

Аргументом  $u$  функций  $v$ ,  $\varphi$  служит новая безразмерная координата  $z$ , а штрих означает дифференцирование по  $z$ . Третье условие в (5) следует из (3) и непрерывности при  $x = x_*$  величины напряжения силы, пропорциональной в упругом теле производной  $\partial u / \partial x$ . Недостающее краевое условие к уравнениям (4) следует из требования ограниченности  $\partial u / \partial x$

$$(6) \quad |v'(z)| < \infty, \quad |v(z) \varphi'(z)| < \infty, \quad 0 \leq z \leq z_*$$

При выводе уравнений (4) предполагалось, что

$$(7) \quad v(z) > 0, \quad 0 \leq z < z_*$$