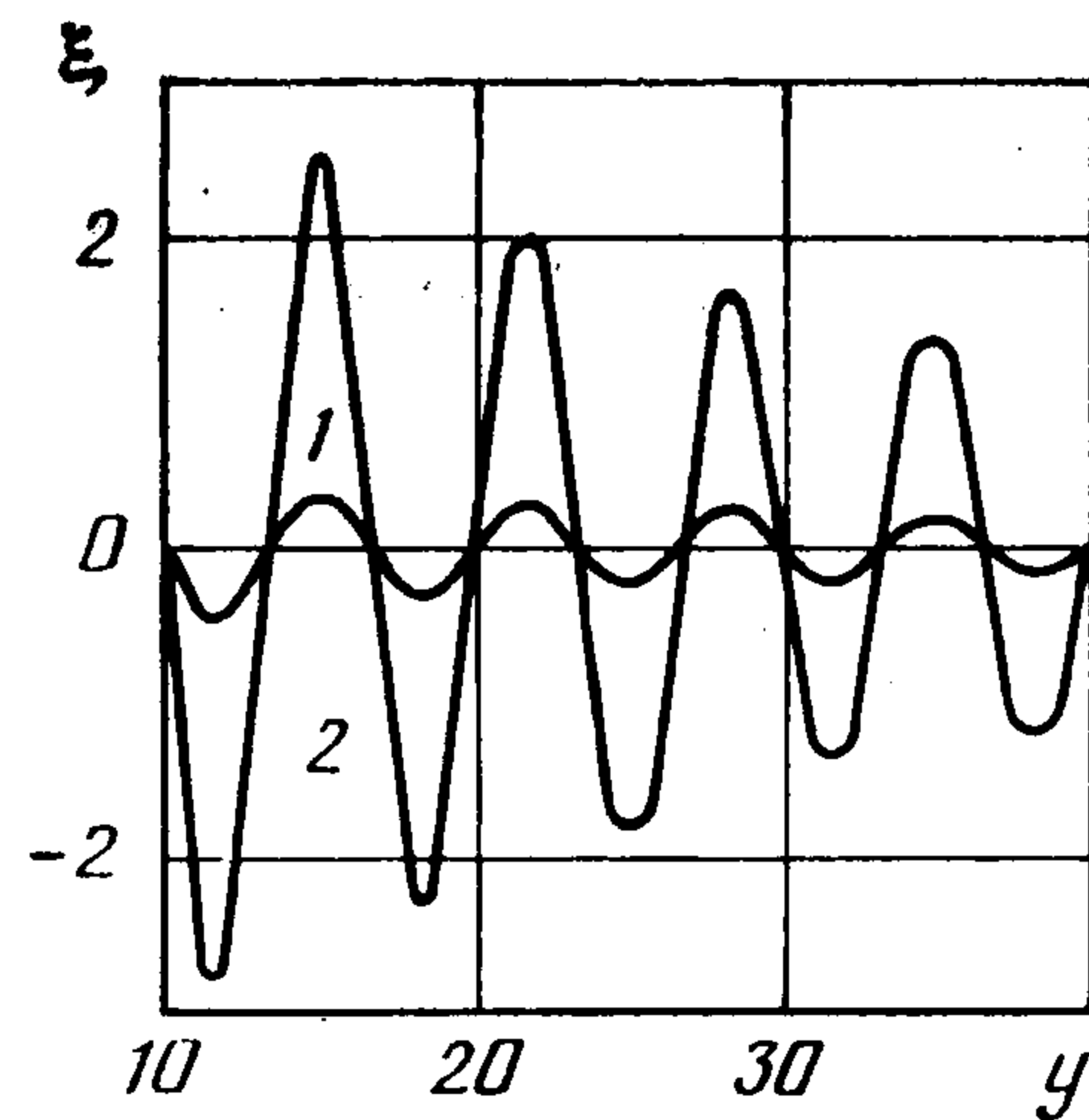


Фиг. 1



Фиг. 2

к величине амплитуды суммарной волны A_1 при разложении ее в ряд по малому параметру ε ($A_1 = A_{10} + \varepsilon A_{11} + O(\varepsilon^2)$, $A_{11} = \max_y |\eta_{21}|$), ε_* — наибольшая допустимая верхняя граница ε . Величина ε_* в расчетных данных выбиралась из требования, чтобы выполнялось соотношение $|\varepsilon_* A_{11}/A_{10}| = 10^{-2}$. Видно, что учет касательных напряжений на поверхности пленки приводит к уменьшению амплитуды волны на три порядка. Величины A_{10} и A_{20} рассчитаны по формуле (2.4) при $\varepsilon = 0$.

На фиг. 2 представлен один из результатов расчета гашения волн при помощи вязкой пленки (изображена только волновая часть деформации границы раздела): 1 — суммарная волна, возникающая под действием на поверхности пленки нормальных и касательных напряжений; 2 — волна, возникающая под действием только нормальных напряжений; $\eta_{20} = 0,01\xi$. Значения параметров задачи следующие: $\delta = 0,93$; $\lambda = 4,99$, $a = 5$, $\beta_1 = 12,3$, $\beta_2 = 0,0025$, $\gamma = 0,0037$, $R = 500$, $F = 1,09$. В этом случае тонкая вязкая пленка уменьшает амплитуду волны на порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка, 1976. 364 с.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.—Л. Гостехиздат, 1948. 612 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
22.IV.1986

УДК 532.546

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВАКУУМНОГО ПЕРЕХВАТЫВАЮЩЕГО ДРЕНАЖА В НИСХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

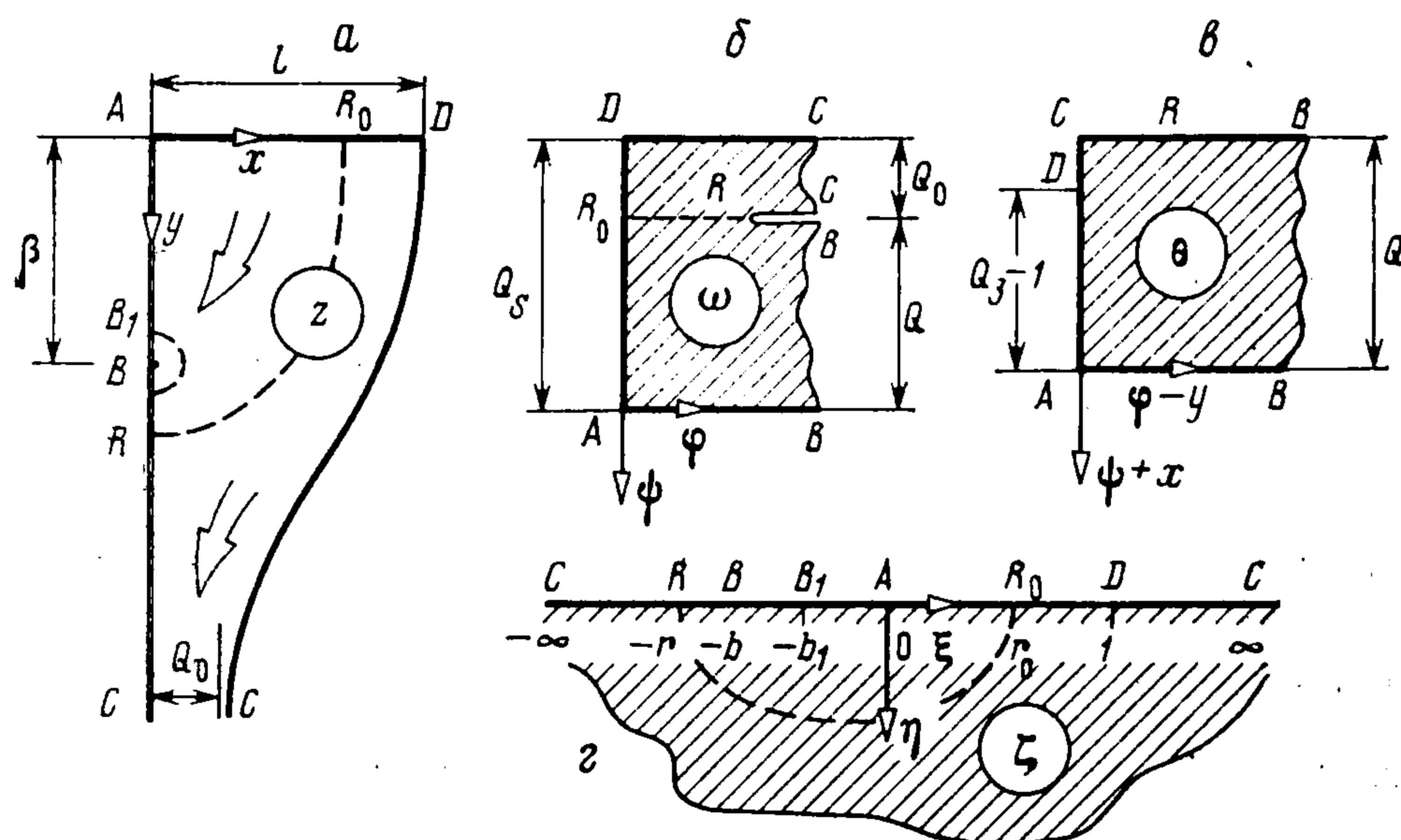
Эмих В. Н.

Формулируется краевая задача, описывающая двумерную стационарную фильтрацию в почвенном слое неограниченной мощности к горизонтальной вакуумной дрене, которая частично, а при определенной интенсивности дренирования — полностью перехватывает грунтовые воды, просачивающиеся вниз с поверхности почвы. Посредством конформных отображений строится решение задачи, содержащее два неизвестных параметра отображения. Относительно последних выводится система уравнений, однозначная разрешимость которых устанавливается аналитически. При этом выявляется ограничение на фильтрационный расход дрены, соответствующее критическому режиму (полный перехват потока). Запрограммирован для ЭВМ ал-

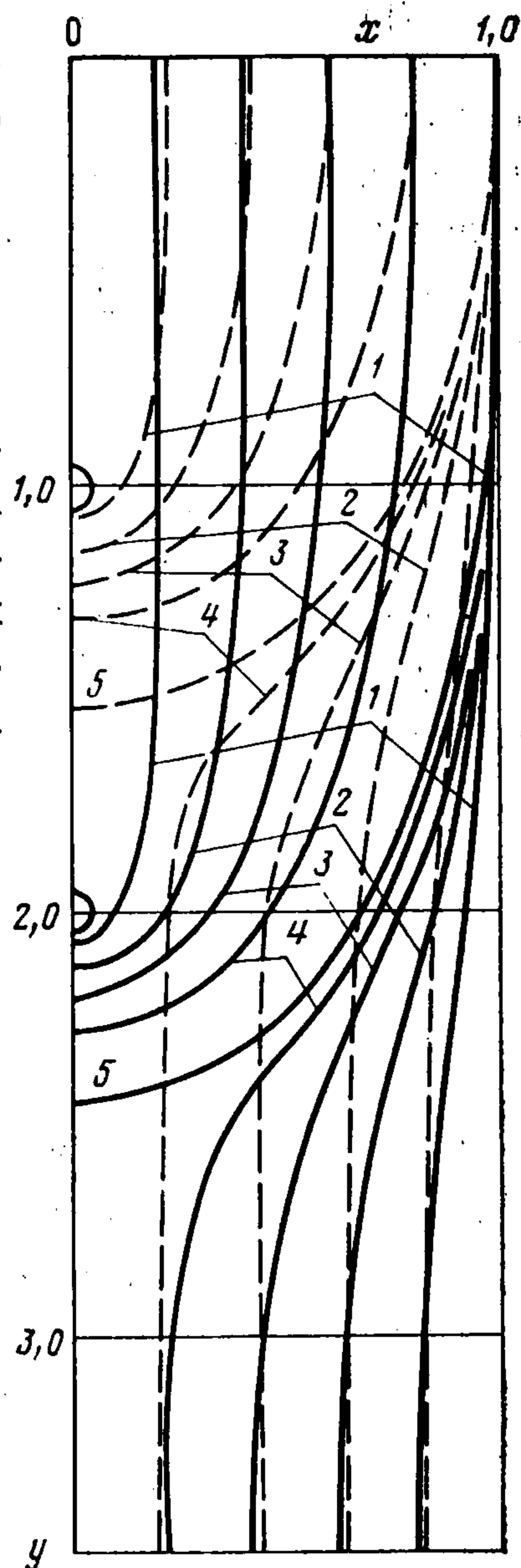
горитм, по которому при заданных геометрических параметрах схемы вычисляются характеристики течения в критическом режиме и при некоторой величине дренажного расхода, произвольно выбираемой в интервале ее допустимых значений. Приводятся примеры расчетов.

На орошаемом массиве в однородном почвенном слое неограниченной мощности заложены горизонтальные вакуумные дрены. Их назначение — перехват поливных вод, просочившихся сквозь корневую систему с поверхности, затопленной слоем малой толщины. Предполагается, что каждый из потоков, связанных с действием той или иной дрены, симметричен относительно вертикальной линии, проходящей через центр дрены. Боковые границы потоков являются свободными границами, вдоль которых сохраняется атмосферное давление. Вследствие этого потоки к отдельным дренам разобщены так что говорить о системе дрен в принятой модели можно только условно.

Правая половина зоны действия одной из дрен, представленной точечным стоком B , схематично изображена в плоскости переменной $z = x + iy$ в качестве области течения на фиг. 1, а для случая, когда из общего (в пределах указанной области) поступления Q_0 поверхностных вод некоторое их количество Q захватывается дренаем, а остальная



Фиг. 1



Фиг. 2

часть Q_0 уходит вниз на бесконечность. Соответствующая область комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$ представлена на фиг. 1, б. Исследование выполняется в терминах приведенных величин z и ω , связанных с одноименными реальными величинами z_r и ω_r соотношениями (κ — коэффициент фильтрации)

$$(1) \quad z = z_r/l, \quad \omega = \omega_r/(\kappa l)$$

Введем в рассмотрение функцию Н. Е. Жуковского $\theta = \omega + iz$ [1], область которой изображена на фиг. 1, в. Конформно отображая области ω и θ на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 1, г), получим

$$(2) \quad \omega = -i \frac{Q}{\pi} \frac{\sqrt{b(1+b)}}{r-b} \int_0^{\xi} \frac{(r+u) du}{(b+u)\sqrt{u(1-u)}} =$$

$$= -i \frac{2Q}{\pi} \left[\text{arctg} \sqrt{\frac{(1+b)\xi}{b(1-\xi)}} + \frac{\sqrt{b(1+b)}}{r-b} \arcsin \sqrt{\xi} \right]$$

$$\theta = -i \frac{Q\sqrt{b}}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{du}{(b+u)\sqrt{u}} = -\frac{2Q}{\pi} \text{arctg} \sqrt{\frac{\xi}{b}}, \quad z = i(\omega - \theta)$$

$$(3) \quad \frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} = -i \frac{d\theta}{d\omega} + i = -i \frac{r-b}{\sqrt{1+b}} \frac{\sqrt{1-\xi}}{\xi+r} + i$$

Здесь $w = w_x - iw_y$ — комплексная скорость фильтрации [1].

В точке D , где $\zeta = 1$, $\omega = -iQ_s$, $z = 1$ (фиг. 1, а, б, в), зависимости (2) приводят к соотношениям

$$(4) \quad Q_s = Q + Q_0, \quad Q_0 = \frac{\sqrt{b(1+b)}}{r-b} Q = 1 - \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{b}$$

Исходя из соотношений (2) и полагая $z = i\beta$, $\zeta = -b$, имеем

$$(5) \quad \beta = (Q/\pi) \ln(1+b) + (2Q_0/\pi) \operatorname{arsh} \sqrt{b}$$

Ориентируясь на прямую постановку, будем считать заданными в каждом конкретном случае геометрические параметры схемы l , β и фильтрационный расход дрен Q . Как и в работе [2], исследуем картину течения при варьировании Q с фиксированием величин l и β . Узловым является при этом вопрос о характере зависимости $b(Q)$, определяемой равенством (5). На его основе получаем

$$(6) \quad \frac{db}{dQ} = \frac{4}{\pi} f(\sqrt{b}) \left[\frac{Q}{1+b} \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{arsh} \sqrt{b}}{\sqrt{b}} \right) + \frac{Q_0}{\sqrt{b(1+b)}} \right]^{-1}$$

$$f(x) = \operatorname{arsh} x \cdot \operatorname{arctg} x - (\pi/4) \ln(1+x^2)$$

При захвате дренажной части профильтровавшихся с поверхности вод имеем $Q > 0$, $Q_0 > 0$. Поскольку также $\operatorname{arsh} \sqrt{b} < \sqrt{b}$ при $b > 0$, то положительно и все выражение в квадратных скобках правой части равенства (6).

Для выявления знака $f(\sqrt{b})$ рассмотрим следующую систему вспомогательных функций:

$$(7) \quad f(x), \quad f_1(x) = \frac{1+x^2}{x} f'(x), \quad f_2(x) = x^2 \sqrt{1+x^2} f_1'(x), \quad f_3(x) =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} f_2'(x)$$

Из определения функции $f(x)$ и равенств (7) вытекает, что $f(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$, $f_{1,2,3}' < 0$ при $x > 0$. Далее, так как $f_1(0) = 2 - \pi/2 > 0$, $f_1(\infty) = 0$, то $f_1(x) > 0$, $f'(x) > 0$ и, наконец, $f(x) > 0$ при $x > 0$. В итоге заключаем

$$(8) \quad db/dQ > 0$$

Итак, параметр b , определяемый при фиксировании величины β зависимостью (5) как функция расхода Q , монотонно возрастает с увеличением последнего. По достижении величиной Q некоторого значения Q^* получаем

$$(9) \quad 1 - (2Q^*/\pi) \operatorname{arctg} \sqrt{b^*} = 0, \quad b^* = b|_{Q=Q^*}$$

При выполнении равенства (9) из соотношений (4) следует $r = \infty$, $Q_0 = 0$, $Q = Q_s$: происходит полный перехват потока дренажной с совмещением точек R и C (фиг. 1, а, в). Зависимость (3) примет вид

$$(10) \quad 1/w = i(1-\mu), \quad \mu = [(1-\zeta)/(1+b^*)]^{1/2}$$

С учетом (10) и соотношения $w = d\omega/dz$ [1] в обсуждаемом предельном случае имеем под дренажным стоком B , где $z = iy$ ($y > \beta$), $w = -iw_y$, $\omega = \varphi + iQ = -p/\gamma + iy + iQ$ (p — давление, γ — удельный вес воды)

$$(11) \quad w_y = -\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dy} + 1 = \frac{1}{1-\mu}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{\gamma}{1-\mu^{-1}}$$

На выделенном участке $\zeta < -b$ и согласно (11) получаем $w_y \geq 0$, $dp/dy \geq \gamma$, причем равенства выполняются только в точке R ($\zeta = -\infty$). В ней градиент давления уравнивает силу тяжести, преодолевая ее на остальной части отрезка BR , где поток направлен вверх. Дополнительное, сколь угодно малое усиление вакуумирования должно нарушить динамическое равновесие потока с атмосферой и вызвать прорыв воздуха в дренаж снизу, поэтому рассматриваемый режим течения — критический. Сходные фильтрационные модели с подвешенным потоком исследовались в работах [2, 3], в последней из которых была намечена изучаемая здесь схема течения.

Исключая из (5) величину Q посредством равенства (9), получим уравнение для нахождения значения b^* параметра b в критическом режиме

$$(12) \quad F(b^*) = \frac{\ln(1+b^*)}{2 \operatorname{arctg} \sqrt{b^*}} = \beta$$

Дифференцированием устанавливается монотонное возрастание функции $F(b^*)$, причем $F(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$. Отсюда следует, что при любом фиксированном значе-

нии ординаты β дренажного стока B параметр b^* и предельно допустимое значение фильтрационного расхода дрены $Q^* = Q(b^*)$ однозначно определяются из соотношений (12) и (9). Далее заключаем на основании (8), что при том же значении β параметры b и r единственным образом вычисляются из равенств (5) и (4) для любого $Q \in (0, Q^*)$. Заметим, что $b(Q) \in (b_0, b^*)$; значение $b_0 = \text{sh}^2(\pi\beta/2)$ найдем из (5) при $Q = 0$.

Определение параметров отображения позволяет рассчитать на базе полученных аналитических зависимостей характеристики течения, а также положение свободной границы CD . Ее комплексно-параметрическое уравнение можно представить, исходя из соотношений (2) и используя равенства (4), в записи

$$(13) \quad z = Q_0 + \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{\zeta}} + i \frac{2}{\pi} v, \quad v = Q \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{b(\zeta-1)}{b+\zeta}} + Q \operatorname{arch} \sqrt{\zeta}, \quad \zeta \geq 1$$

При частичном перехвате потока равенство (13) может служить и для расчета разделяющей линии тока R_0R , вдоль которой $\psi = -Q$. Развернутая на основе первого равенства (2) запись этого равенства приводит к соотношению

$$(14) \quad (\pi/2) Q_0 - \operatorname{Im} v = 0$$

Выбирая некоторую совокупность значений комплексной переменной ζ , удовлетворяющих уравнению (14), и подставляя их затем в правую часть равенства (13), вычислим координаты соответствующих точек линии R_0R . Положение ее конечных точек R_0 и R определяется следующими формулами, вытекающими из зависимостей (2) и (4):

$$(15) \quad x_{R_0} = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{r_0}}, \quad y_R = \frac{2}{\pi} \left[Q \ln \frac{\sqrt{b(1+r)} + \sqrt{r(1+b)}}{\sqrt{b} + \sqrt{r}} + Q_0 \operatorname{arsh} \sqrt{r} \right], \quad y_{R_0} = x_R = 0$$

Параметр r_0 вычисляется из соотношения $\omega(R_0) = -iQ$; на базе первой зависимости (2) оно выразится равенством, использованным в первой формуле (15)

$$(16) \quad Q \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1+b)r_0}{b(1-r_0)}} + Q_0 \operatorname{arcsin} \sqrt{r_0} = \frac{\pi}{2} Q$$

В критическом режиме линия R_0R совмещается со свободной границей CD , уравнение которой получается из (13) при $Q = Q^*$, $b = b^*$, $Q_0 = 0$.

На основе полученных аналитических зависимостей составлен и запрограммирован алгоритм вычисления некоторых характеристик исследуемого течения с предварительным нахождением из уравнения (5) параметра b . В таблице приведены результаты таких расчетов для двух вариантов: 1) $\beta = 2,0$ и 2) $\beta = 1,0$. В каждом случае течение рассчитывается вначале в критическом режиме при значении $Q = Q^*$, которое определяется попутно с параметром b^* из соотношений (9) и (12). Затем вычисления производятся при нескольких значениях $Q \in (0, Q^*)$, по которым сгруппированы табличные данные; при этом верхние строки соответствуют первому расчетному варианту, нижние — второму. Величину p_{B_1} можно условно трактовать как понижение давления на контуре дрены, который моделируется эквипотенциалью, проходящей через точку B_1 с ординатой $\beta_1 = \beta - 0,05$ в обоих вариантах.

| № | Q/Q^* | Q | Q_s | Q_0 | $-p_{B_1}$ | x_{R_0} | y_R | $-p_R$ | $ w_A $ |
|---|---------|-------|-------|-------|------------|-----------|-------|--------|---------|
| 1 | 0,2 | 0,206 | 1,010 | 0,804 | 0,206 | 0,203 | 2,066 | 0,188 | 1,016 |
| | | 0,243 | 1,060 | 0,817 | 0,239 | 0,221 | 1,077 | 0,206 | 1,101 |
| 2 | 0,4 | 0,412 | 1,018 | 0,606 | 0,398 | 0,402 | 2,133 | 0,269 | 1,029 |
| | | 0,486 | 1,112 | 0,626 | 0,572 | 0,415 | 1,154 | 0,294 | 1,191 |
| 3 | 0,6 | 0,619 | 1,024 | 0,405 | 0,576 | 0,599 | 2,200 | 0,291 | 1,038 |
| | | 0,729 | 1,155 | 0,426 | 0,840 | 0,599 | 1,232 | 0,319 | 1,268 |
| 4 | 0,8 | 0,825 | 1,028 | 0,203 | 0,728 | 0,798 | 2,276 | 0,251 | 1,045 |
| | | 0,972 | 1,190 | 0,218 | 1,083 | 0,790 | 1,318 | 0,277 | 1,331 |
| 5 | 1,0 | 1,031 | 1,031 | 0 | 0,858 | 1 | 2,455 | 0 | 1,050 |
| | | 1,215 | 1,215 | 0 | 1,300 | 1 | 1,521 | 0 | 1,378 |

Кроме величин, содержащихся в таблице, по уравнениям (13) вычисляются координаты некоторой совокупности точек свободной границы CD , а при частичном перехвате потока — также и точек разделяющей линии тока RR_0 ; к последней процедуре привлекается соотношение (14). Рассчитанные таким образом кривые представлены на фиг. 2 сплошными линиями для первого варианта и штриховыми — для второго; цифры на графике и в таблице относятся к одним и тем же значениям Q .

Сопоставляя картину течения и его характеристики, видим, что заглубление дрен в первом варианте обеспечивает захват ими той же части нисходящего потока, что и во втором варианте, при меньшем вакуумировании. Вместе с тем глубокий дренаж гораздо в меньшей степени усиливает фильтрацию и нарушает ее равномерность в подповерхностном слое почвы.

Если же второй расчетный вариант привести к одинаковому с первым значению $\beta = 2,0$, то, сообразуясь с равенствами (1), будем иметь $l = 2,0$; вдвое увеличатся при этом все линейные и связанные с ними величины, включая фильтрационные расходы. На фиг. 2 следует подвергнуть соответствующему преобразованию подобия штриховые кривые. Отмеченные выше различия между обоими расчетными вариантами должны быть отнесены теперь на счет изменения расстояния между дренами. При сохранении неизменной величины β_1 в случае $l = 2,0$ имеем: — $p_{B_1} = 0,5847; 1,1447; 1,6793; 2,1652; 2,6004$ соответственно при $Q/Q^* = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$. Из сравнения с величинами $-p_{B_1}$ для первого варианта следует, что при двукратном разрежении дрен перехват ими той же части фильтрационного потока с поверхности достигается примерно трехкратным усилением вакуума давления на контуре дрены.

Автор благодарит Н. С. Колодея за помощь при вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Эмих В. Н. О нескольких гидродинамических моделях дренажа. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1046—1057.
3. Эмих В. Н. Анализ двумерной установившейся фильтрации в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 857—868.

Новосибирск

Поступила в редакцию
27.1.1986

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Богомольный В. М.,

Для решения эллиптической краевой задачи с неизвестной свободной границей используется аналитическое продолжение в область комплексных независимых переменных, при этом оценка неизвестной области решения получена методом характеристик на основании принципа отображения Шварца и соответствия между решениями задачи Коши в эллиптической и гиперболической областях. Численное решение поставленной задачи получено также методом Галеркина с использованием функций Грина.

Задачи теории упругости с неизвестной границей области решения рассматривались в [1, 2]. Зона влияния отверстия в растянутой пластине определена в [2] из условия аналитичности правой части характеристического уравнения на контуре единичной окружности, полученной после конформного преобразования. Метод характеристик и условия существования решения, определяемые теоремой Коши—Римана, были использованы для нахождения области решения гиперболического уравнения торообразной оболочки [3]. Ниже решается аналогичная краевая задача в эллиптической области.