

## ГАШЕНИЕ ВОЛН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Вислоусов П. А., Потетюнко Э. Н.

На основании линеаризованных уравнений Эйлера для идеальной жидкости, занимающей нижнее полупространство, и уравнений Навье—Стокса для лежащего над ним слоя вязкой жидкости исчезающе малой толщины (вязкой пленки) строится решение задачи о гравитационно-капиллярных волнах на поверхности идеальной жидкости, вызванных действием поверхностных напряжений. Определены условия, при которых вязкая пленка существенно снижает амплитуду волны.

Согласно существующим теориям [1—3], гашение волн поверхностной пленкой происходит либо в результате уменьшения коэффициента трения на поверхности раздела фаз, за счет чего уменьшается передаваемая жидкости энергия извне, либо благодаря диссипации энергии при деформации поверхностной вязкой пленки, либо в результате появления на поверхности жидкости дополнительных сил трения, зависящих от скорости, за счет которых усиливается вихревая часть движения, а следовательно, и диссипация энергии всей нижней жидкости.

В данной работе вскрыто еще одно проявление гасящего действия пленки, не зависящее от диссипации энергии как в самой пленке, так и в нижней жидкости. А именно, действующие на внешнюю границу вязкой пленки касательные напряжения трансформируются в нормальные напряжения, передаваемые на нижнюю жидкость. При определенных условиях эти дополнительные нормальные напряжения вызывают на границе нижней жидкости волны, сдвинутые по фазе относительно волн, вызванных заданным нормальным напряжением. Интерференция волн может вызвать существенное ослабление суммарной волны.

1. Плоская задача о волновом движении двухслойного (без сдвига скоростей) потока, состоящего из слоя идеальной жидкости бесконечной глубины и слоя вязкой жидкости постоянной толщины  $h$ , сводится к следующей краевой задаче [4, 5]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} c \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_1} \nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{u}_1, & c \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_2} \nabla P_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \\ P_1 &= p_1 + \rho_1 g z, \quad P_2 = p_2 + (\rho_2 - \rho_1) g h + \rho_2 g z \\ -P_1 + \rho_1 g \zeta_1 - \alpha_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} + 2\rho_1 \nu \frac{\partial u_{12}}{\partial z} &= -P_* \\ \rho_1 \nu \left( \frac{\partial u_{11}}{\partial z} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x} \right) &= \tau_*, \quad c \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = u_{12}, \quad z = 0 \\ -P_2 + (\rho_2 - \rho_1) g \zeta_2 - \alpha_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2} &= -P_1 + 2\rho_1 \nu \frac{\partial u_{12}}{\partial z} \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial z} + \frac{\partial u_{12}}{\partial x} &= 0, \quad c \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = u_{22} = u_{12}, \quad z = -h \\ \Psi_1 &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty; \quad \Psi_2 \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \\ \left( \Psi_1 = \{P_2, \mathbf{u}_2\} \right. \\ \left. \Psi_1 = \left\{ P_j, \mathbf{u}_j, \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x}, \zeta_j, P_*, \tau_* \right\}, \quad j = 1, 2 \right) \end{aligned}$$

Здесь  $c$  — скорость потока жидкости,  $\alpha_1, \alpha_2$  — коэффициенты поверхностного натяжения на свободной поверхности и на границе раздела,  $\rho_1, \rho_2$  — плотности,  $\nu$  — кинематическая вязкость верхнего слоя,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{u}_1 = \{u_{11}, u_{12}\}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \{u_{21}, u_{22}\}$  — векторы скоростей,  $p_1, p_2$  — гидродинамические давления (индекс 1 соответствует верхней жидкости, индекс 2 — нижней). Начало координат взято на невозмущенной поверхности верхнего слоя; ось  $Oz$  направлена вертикально вверх.

Пусть активная нагрузка имеет вид

$$P_*(x) = \frac{4Q}{\pi} \frac{a_1}{a_1^2 + x^2}, \quad \tau_*(x) = \frac{T}{\pi} \frac{xf}{(f^2 + x^2)^2}$$

Введем безразмерные величины

$$y = \frac{x}{f}, \quad a = \frac{a_1}{f}, \quad \varepsilon = \frac{h}{f}, \quad \eta_2 = \frac{\zeta_2}{f}, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$F = \frac{c^2}{gf}, \quad R = \frac{cf}{v}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_1}{\rho_1 g f^2}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\rho_2 g f^2}$$

$$\lambda = \frac{Q}{\rho_2 g f}, \quad \delta = \frac{T}{\rho_2 g f^3}, \quad \beta = \gamma \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_3 = \beta_2 - \beta_1 (\gamma - 1)$$

где  $f$  — параметр, характеризующий размеры зоны приложения касательных напряжений. Тогда, применив к (1.1) интегральное преобразование Фурье по переменной  $x$ , найдем возвышение границы раздела сред в интегральной форме

$$\eta_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1}{v\Delta} \exp(-ivy) dv$$

$$\Delta = i|v|^3 R^{-1} F^{-2} \{FR^{-2} B_1 (4S_1 C_2 |v| b - C_1 S_2 B_4 \times \text{sign } v) - S_1 S_2 [ |v| B_1 B_2 + \gamma v^2 B_2^2 - \gamma F^2 R^{-4} (16v^2 b^6 + B_3^4)] + 8\gamma F^2 R^{-4} \times v^3 b B_4 (1 - C_1 C_2) \}$$

$$\Delta_1 = F^{-2} [2iS_1 v^3 b (2P_{**} v^2 FR^{-1} - \tau_{**} B_2) + 2\tau_{**} v^3 b FR^{-1} B_3 (C_2 - C_1) + iS_2 v^2 B_3 (P_{**} F \times R^{-1} B_3 + \tau_{**} B_2)]$$

$$B_1 = Fv^2 - \beta |v|^3 - |v|, \quad B_2 = 1 + \beta_1 v^2, \quad B_4 = (2v - iR)^2, \quad b^4 = v^2 B_4$$

$$B_3 = v^2 + b^2, \quad S_1 = \text{sh } \varepsilon v, \quad S_2 = \text{sh } \varepsilon b, \quad C_1 = \text{ch } \varepsilon v, \quad C_2 = \text{ch } \varepsilon b$$

$P_{**}, \tau_{**}$  — трансформанты Фурье  $P_*, \tau_*$ .

2. Дальнейший анализ проведем для случая исчезающей толщины верхнего слоя вязкой жидкости (вязкой пленки). Удерживая первые два члена разложения  $\Delta$  и  $\Delta_1$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ , получим

$$(2.1) \quad \eta_2 = \eta_{20} + \varepsilon \eta_{21} + O(\varepsilon^2)$$

$$(2.2) \quad \eta_{20} = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa dv - \frac{i\delta R}{2\pi F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_1 v^2 + 1}{4v - iR} \kappa dv$$

$$\kappa = \exp(-a|v| - ivy) (\beta v^2 - F|v| + 1 + \varepsilon f_2)^{-1}$$

$$f_2 = iRF^{-1} (\beta_1 \beta_2 v^4 - F\beta_1 |v|^3 + \beta_3 v^2 - F|v| - \gamma + 1) (4v - iR)^{-1} + \gamma F^2 R^{-1} v^2$$

Второй член разложения  $\eta_{21}$  не приводится, однако численный анализ проведен с учетом  $\eta_{21}$ . Отметим, что при  $\varepsilon = 0$  из (2.1) получается тот же результат, что и при решении задачи о движении идеальной жидкости, покрытой тонкой вязкой пленкой, если воспользоваться уравнениями теории длинных волн вязкой жидкости.

В (2.2) первый интеграл соответствует волне, возникающей за счет действия нормальных напряжений на поверхности идеальной жидкости (этот результат при  $\varepsilon = 0$  был получен в [2]). Вторым интегралом соответствует волне, возникающей за счет действия дополнительных нормальных напряжений, передаваемых на нижнюю жидкость от касательных напряжений, действующих на поверхности пленки. Амплитуда этой волны зависит от интенсивности касательных напряжений  $\tau_*$ . При определенных условиях, налагаемых на физические параметры, интерференция этих волн вызывает существенное снижение амплитуды суммарной волны.

Для того чтобы проиллюстрировать этот факт, вычислим интеграл в (2.2). Интегрирование производится в четырех отдельных случаях:  $F^2 \geq 4\beta$  и  $y \geq 0$ . Техника вычисления интегралов описана в работе [2], табличные интегралы взяты из [6]. Имеем

$$(2.3) \quad \eta_{20} = \exp(-\varepsilon y v_*(v)) (\text{sign } y) [-\lambda (F^2 - 4\beta)^{-1/2} \times \exp(-va) \sin yv + \delta \Lambda (1 + \beta_1 v^2) \exp(-v) (4v \cos yv + R \sin yv)] + \eta_+$$

$$F^2 - 4\beta \geq \delta_* > 0, \quad v = \begin{cases} v_2, & y > 0 \\ v_1, & y < 0 \end{cases}$$

$$v_{1,2} = (F \pm \sqrt{F^2 - 4\beta}) / (2\beta), \quad v_*(v) = 4v(-\beta_1 \times \beta_2 v^4 + F\beta_1 v^3 - \beta_3 v^2 + Fv + \gamma - 1)\Lambda, \quad \Lambda = [RF(1 + 16v^2 R^{-2})\sqrt{F^2 - 4\beta}]^{-1}$$

$$(2.4) \quad \eta_+ = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda}{\pi \sqrt{F^2 - 4\beta}} [E((a + iy)v_1) - E((a + iy)v_2)] + \right. \\ \left. + \frac{i\delta R (\beta_1 R^2 - 16)}{4\pi F (\beta R^2 + 4iRF - 16)} E\left(\frac{R}{4}(y - i)\right) - \frac{i\delta R}{\pi F \sqrt{F^2 - 4\beta}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\beta_1 v_j^2 + 1}{4v_j - iR} E((1 + iy)v_j) \right\} \\ E(q) = \exp(-q) \operatorname{Ei}(q)$$

(Ei(x) — интегральная показательная функция).

Аналогично находим решение в случае  $4\beta - F^2 \geq \delta_* > 0$

$$(2.5) \quad \eta_{20} = \frac{\delta R}{s\gamma\beta (64F^2 + 2s - R\beta)} \left[ A \sin \frac{Fy - s}{2\beta} - B \cos \frac{Fy - s}{2\beta} \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{sy + F}{2\beta}\right) - \frac{\lambda}{s} \exp\left(-\frac{sy + Fa}{2\beta}\right) \cos \frac{Fy - sa}{2\beta} + \eta_+ \\ A = s(\beta + \gamma\beta_1)(R\beta - 2s) - 8M \\ B = F^{-1}[(R\beta - 2s)M + 8F^2s(\beta + \gamma\beta_1)] \\ s = \operatorname{sign} y \sqrt{4\beta - F^2}, \quad M = 2F^2\gamma\beta_1 - 4\gamma\beta(\beta_1 - \beta)$$

Величина деформации границы раздела уменьшается по экспоненциальному закону с ростом  $s$  или  $|y|$ .

Будем рассматривать волновое движение жидкости на больших расстояниях от области возмущения. В этом случае остаются в силе формулы (2.3)–(2.5), где для  $\eta_+$  воспользуемся асимптотическим разложением в ряд интегральной экспоненты. Удерживая первый член, получим

$$\eta_+ \sim -\frac{\lambda a}{\pi(a^2 + y^2)} - \frac{\delta}{\pi F(1 + y^2)} \{ \gamma^{-1} - R\beta^{-2} [4F\beta y(\beta_1 R^2 - 16) + \\ + R^3\beta(\beta + \beta_1) + 8RF^2 + 16R\beta_1 + R^{-1}(16 - \beta_1 R^2)(4RFy - R^2 + 16)] \times \\ \times (\beta^2 R^4 + 16R^2 F^2 + 256)^{-1} \}$$

Из полученных результатов следует, что при стремлении вязкости пленки  $\nu$  к нулю вклад касательных напряжений в значение деформации границы раздела остается конечной величиной. При  $F^2 - 4\beta \geq \delta_* > 0$  имеем

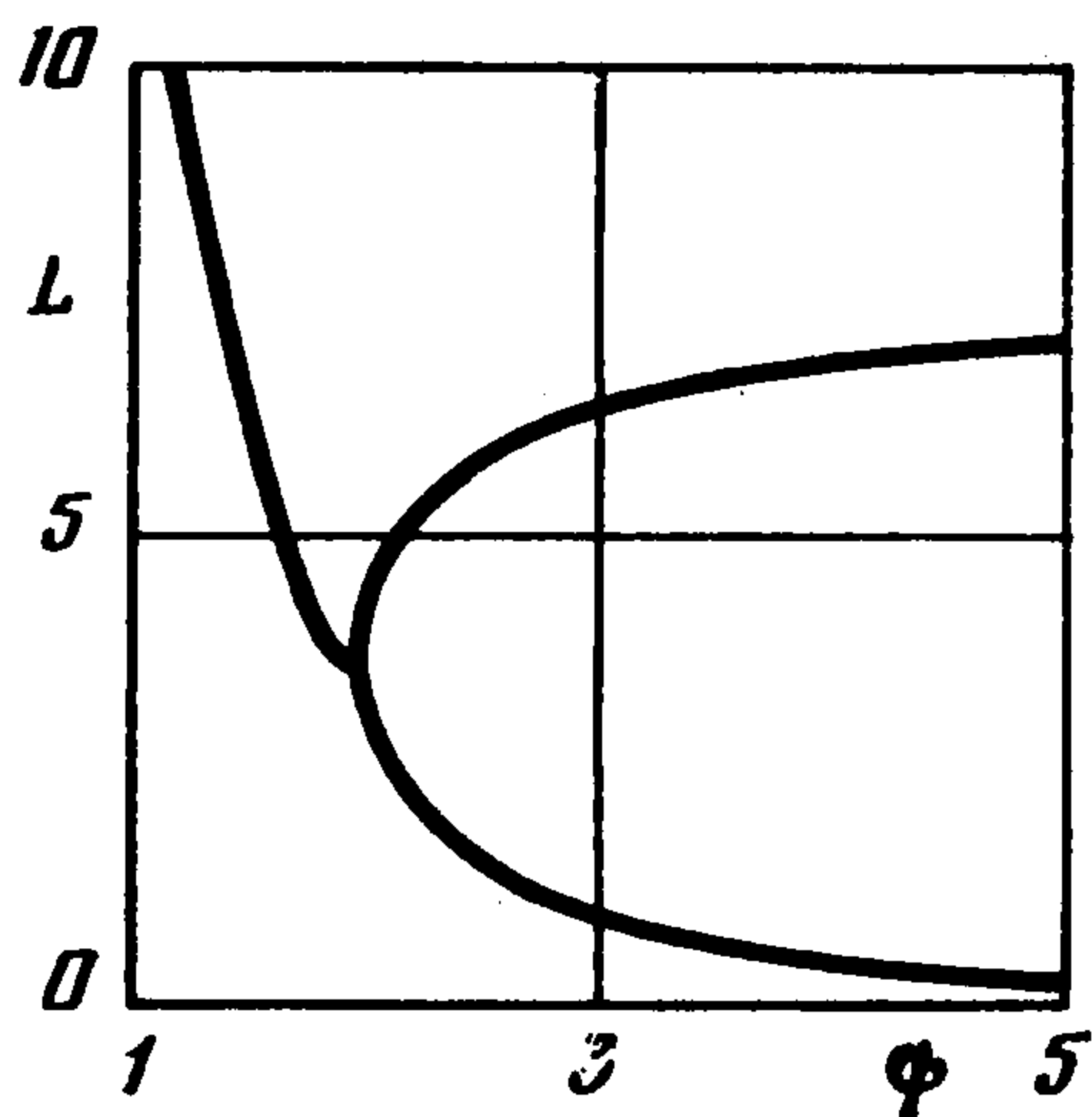
$$(2.6) \quad \eta_{20} \sim \begin{cases} \eta(v_2), & y > 0 \\ \eta(v_1), & y < 0 \end{cases} \\ \eta(v) = [\delta F^{-1}(1 + \beta_1 v^2) \exp(-v) - \lambda \exp(-va)] \times \\ \times \frac{\sin yv}{\sqrt{F^2 - 4\beta}} - \frac{\lambda a}{\pi(a^2 + y^2)} - \frac{\delta(\beta_2 - \gamma\beta)}{\pi\gamma\beta F(1 + y^2)}$$

Следует отметить, что полученный результат (2.6) не зависит от малой толщины пленки  $h$  и от малой вязкости  $\nu$ . Таким образом, слабо вязкая тонкая пленка существенно уменьшает амплитуду волны и деформирует поверхность раздела. Если  $F^2 < 4\beta$ , то возникает одна система волн, локализованных в области действия внешней нагрузки, амплитуда которых экспоненциально уменьшается с расстоянием. Для жидкости без пленки аналогичный результат был получен в [1].

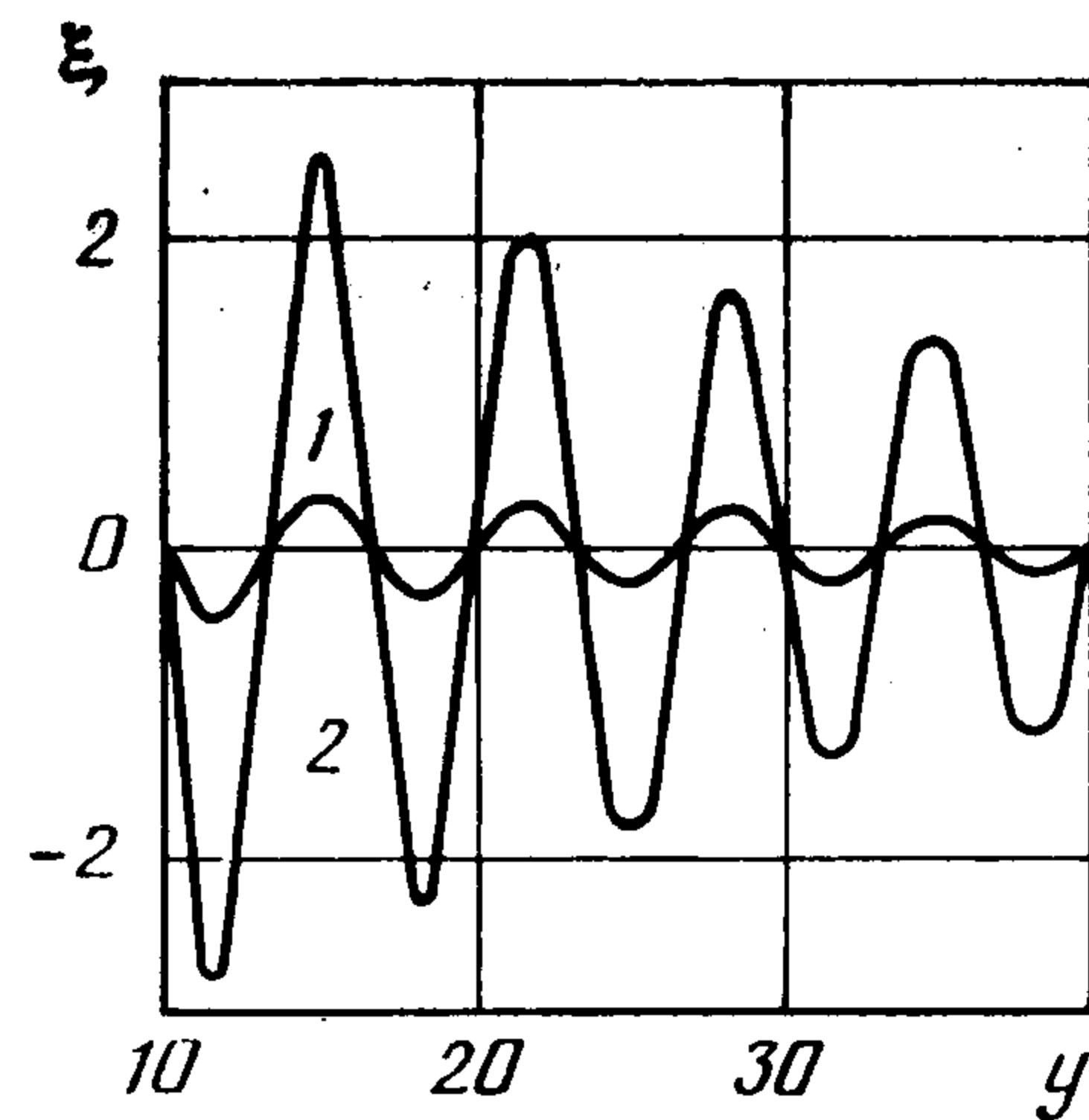
Зависимость длины волны  $L$  от параметра  $\psi = F/\sqrt{\beta}$  представлена на фиг. 1. При  $\psi > 2$  (что соответствует  $F^2 > 4\beta$ ) верхняя и нижняя ветви описывают изменение длины гравитационной и капиллярной волн. Видно, что с увеличением параметра  $\psi$  длина гравитационной волны увеличивается, а длина капиллярной волны уменьшается. При  $\psi < 2$  длины гравитационной и капиллярной волн совпадают и с уменьшением параметра  $\psi$  растут [2].

Методами минимизации производился поиск таких физических параметров жидкости, при которых амплитуда суммарной волны мала по сравнению с амплитудой волны, возникающей под действием только нормальных напряжений. Ниже приведен пример расчета, наглядно показывающий, как происходит гашение волн при введении внешних касательных напряжений:  $A_{10} = 1,03 \cdot 10^{-3}$ ,  $A_{20} = 1,15$ ,  $\delta = 0,93$ ,  $\lambda = 1$ ,  $a = 1$ ,  $\beta_1 = 0,489$ ,  $\beta_2 = 0,275$ ,  $\gamma = 0,551$ ,  $R = 5000$ ,  $F = 1,5$ ,  $A_{11} = 1,31$ ,  $\varepsilon_* = 7,88 \cdot 10^{-5}$ .

Здесь  $A_{10}$  — амплитуда суммарной волны,  $A_{20}$  — амплитуда волны, возникающей под действием только нормальных внешних напряжений.  $A_{11}$  — первая поправка



Фиг. 1



Фиг. 2

к величине амплитуды суммарной волны  $A_1$  при разложении ее в ряд по малому параметру  $\varepsilon$  ( $A_1 = A_{10} + \varepsilon A_{11} + O(\varepsilon^2)$ ,  $A_{11} = \max_y |\eta_{21}|$ ),  $\varepsilon_*$  — наибольшая допустимая верхняя граница  $\varepsilon$ . Величина  $\varepsilon_*$  в расчетных данных выбиралась из требования, чтобы выполнялось соотношение  $|\varepsilon_* A_{11}/A_{10}| = 10^{-2}$ . Видно, что учет касательных напряжений на поверхности пленки приводит к уменьшению амплитуды волны на три порядка. Величины  $A_{10}$  и  $A_{20}$  рассчитаны по формуле (2.4) при  $\varepsilon = 0$ .

На фиг. 2 представлен один из результатов расчета гашения волн при помощи вязкой пленки (изображена только волновая часть деформации границы раздела): 1 — суммарная волна, возникающая под действием на поверхности пленки нормальных и касательных напряжений; 2 — волна, возникающая под действием только нормальных напряжений;  $\eta_{20} = 0,01\xi$ . Значения параметров задачи следующие:  $\delta = 0,93$ ;  $\lambda = 4,99$ ,  $a = 5$ ,  $\beta_1 = 12,3$ ,  $\beta_2 = 0,0025$ ,  $\gamma = 0,0037$ ,  $R = 500$ ,  $F = 1,09$ . В этом случае тонкая вязкая пленка уменьшает амплитуду волны на порядок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка, 1976. 364 с.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.—Л. Гостехиздат, 1948. 612 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
22.IV.1986

УДК 532.546

### ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВАКУУМНОГО ПЕРЕХВАТЫВАЮЩЕГО ДРЕНАЖА В НИСХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД

Эмих В. Н.

Формулируется краевая задача, описывающая двумерную стационарную фильтрацию в почвенном слое неограниченной мощности к горизонтальной вакуумной дрене, которая частично, а при определенной интенсивности дренирования — полностью перехватывает грунтовые воды, просачивающиеся вниз с поверхности почвы. Посредством конформных отображений строится решение задачи, содержащее два неизвестных параметра отображения. Относительно последних выводится система уравнений, однозначная разрешимость которых устанавливается аналитически. При этом выявляется ограничение на фильтрационный расход дрены, соответствующее критическому режиму (полный перехват потока). Запрограммирован для ЭВМ ал-