УДК 532.5 : 534

К ВОПРОСУ О ДИФРАКЦИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА КРОМКЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛЕНКИ

Варламов В. В.

В продолжение исследований [1—4] дифракции волн, описываемых уравнением Клейна — Гордона, изучается дифракция внутренних волн на границе полубесконечной пленки, расположенной на поверхности стратифицированной жидкости. Среди многих работ, посвященных исследованию рассеяния акустических волн на прямолинейных объектах, отметим [5—7]. Необходимость учитывать свойства покрывающей жидкость поверхности приводила авторов этих работ к изучению краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями, содержащими производные более высокого порядка, чем само уравнение. К аналогичной ситуации ведет учет поверхностного натяжения полубесконечной пленки и в данной работе. Однако при этом распространение волн описывается уравнением гиперболического, а не эллиптического типа.

1. Для изучения двумерных движений несжимаемой идеальной жидкости введем декартову систему координат $\{x, O, z\}$. Рассмотрим бесконечный плоский слой $Q = \{(x, z): -\infty < x < \infty,\ -h < z < 0\}$ стратифицированной жидкости, ограниченный снизу (при $z = -h$) твердым дном. Сверху (при $z = 0$) граница жидкости состоит из двух участков: при $x < 0$ поверхность жидкости свободна, а при $x \geqslant 0$ жидкость покрыта тонкой пленкой, имеющей коэффициент поверхностного натяжения σ. Плотность жидкости в невозмущенном состоянии распределена по закону $\rho_0(z) = \rho_0^{\prime} e^{-2\beta z}$, $\beta > 0$.

Малые колебания жидкости описываются системой уравнений [8]

$$\begin{gathered}\rho_0(z)\partial \mathrm{V}/\partial t + \nabla p + \mathrm{e}_z\rho_1 g = 0\\ \partial/\partial t\rho_1 + (\mathrm{e}_z, \mathrm{V})\rho_0'(z) = 0, \quad \operatorname{div}\mathrm{V} = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathrm{V} = \{v_1, v_2\}$ — вектор скорости частиц жидкости, ρ_1 — изменение плотности, вызванное движениями жидкости, p — динамическое давление, e_z — орт оси Oz и g — ускорение силы тяжести.

Если ввести функцию тока Ψ по формулам $v_1 = \Psi_z$, $v_2 = -\Psi_x$, а затем функцию $u = \Psi e^{-\beta z}$, то интегрирование системы (1.1) можно свести к решению уравнения

$$\partial^2/\partial t^2\,[\Delta_2 u - \beta^2 u] + \omega_0^2 u_{xx} = 0 \tag{1.2}$$

где Δ_2 — оператор Лапласа по x и z и $\omega_0^2 = 2\beta g$ — квадрат частоты Брента — Вяйсяля.

Для установившихся волновых движений, зависящих от времени по закону $e^{-i\omega t}$, и $\omega < \omega_0$ уравнение (1.2) можно переписать как уравнение Клейна — Гордона:

$$u_{zz} - \beta^2 u = \frac{1}{a^2}u_{xx}, \quad \frac{1}{a^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 > 0 \tag{1.3}$$

Условие непротекания на твердом дне и граничное условие на свободной поверхности [2] имеют вид

$$u = 0, \quad z = -h, \quad x \in R^1 \tag{1.4}$$

$$u_z + \beta u + (g/\omega^2)u_{xx} = 0, \quad z = 0, \quad x < 0 \tag{1.5}$$

Условие при $z = 0$, $x > 0$ можно вывести из соотношений

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = v_2, \quad p = \rho_0 g\zeta - \sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \quad z = 0, \quad x > 0 \tag{1.6}$$

и уравнений (1.1) ($\zeta(x, t)$ — вертикальное смещение пленки). Исключив из (1.6) функцию ζ, запишем следующее краевое условие для функции тока Ψ:

$$\rho_0\frac{\partial^3\Psi}{\partial z\,\partial t^2} = \rho_0 g\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \sigma\frac{\partial^4\Psi}{\partial x^4}, \quad z = 0, \quad x > 0$$

Приняв во внимание выбранную временную зависимость, перепишем последнее соотношение в терминах функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u + \frac{g}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{\rho_0\omega^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad z = 0, \quad x > 0 \tag{1.7}$$

На кромке полубесконечной пленки должно выполняться гранично-контактное условие [5], соответствующее отсутствию на ней сосредоточенной силы: $\partial\zeta(+0)/\partial x$. Поскольку из первого соотношения (1.6) следует, что $\zeta(x) = (i\omega)^{-1} \times u_x(x, 0)$, то это условие можно переписать в виде

$$\lim_{x\to+0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) = 0 \tag{1.8}$$

Пусть в области $x < 0$, $-h < z < 0$ из бесконечности в сторону полубесконечной пленки распространяется в горизонтальном направлении волна $u_N = \sin b_N(z + h)e^{ik_N x}$ — одна из нормальных волн слоя жидкости, ограниченного сверху свободной поверхностью, а снизу — твердым дном. Здесь k_N, $b_N > 0$ — компоненты волнового вектора, причем b_N — один из корней дисперсионного уравнения [3] $b \operatorname{ctg} bh = -\beta + ga^2(b^2 + \beta^2)/\omega^2$ и $k_N{}^2 = a^2(b_N{}^2 + \beta^2)$ согласно (1.3). Требуется изучить возбуждаемые этой волной в жидкости волновые движения.

Если представить полное волновое поле u_Σ в виде $u_\Sigma = u + u_N$, то задача для определения функции u примет следующий вид: найти всюду ограниченную функцию u, удовлетворяющую в области Q в обобщенном смысле уравнению (1.3), граничным условиям (1.4), (1.5) и вытекающим из (1.7) и (1.8) условиям

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u + \frac{g}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{\rho_0\omega^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = A_N e^{ik_N x}, \quad z = 0, \quad x > 0$$

$$\lim_{x\to+0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u + u_N)|_{z=0} = 0, \quad A_N = \frac{\sigma k_N{}^4 \sin b_N h}{\rho_0\omega^2}$$

Потребуем, чтобы функция u и ее первые производные были ограничены в начале координат, а производные более высокого порядка имели в этой точке особенность не выше указанной:

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \leqslant Cx^{-1/2}, \quad \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right| \leqslant Cx^{-3/2}, \quad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \leqslant Cx^{-5/2}, \quad x \to 0, \quad z = 0$$

Эти условия вытекают из равенства нулю потока энергии через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую ребро препятствия.

Условия излучения сформулируем в виде требования, чтобы возникшие в результате дифракции волны уносили энергию на бесконечность.

2. Решение поставленной задачи, удовлетворяющее всем сформулированным выше требованиям, строится методом Винера — Хопфа [9] и имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{iA_N\Omega_-(-k_N)}{\alpha + k_N} + C_0\right]\frac{\sin\gamma(z + h)/a}{\gamma h/a}\frac{\Omega_+(\alpha)}{\Omega_1(\alpha)}e^{-i\alpha x}\,d\alpha \tag{2.1}$$

Интегрирование в (2.1) ведется по вещественной оси плоскости α с обходом особых точек подынтегральной функции, причем отрицательные особые точки обходятся сверху, а положительные — снизу. Ветвь функции $\gamma(\alpha) = (\alpha^2 - a^2\beta^2)^{1/2}$ выбрана следующим образом. На плоскости α проведен разрез, соединяющий точки $-a\beta$ и $a\beta$ через бесконечно удаленную точку и идущий вертикально вверх в верхней полуплоскости и вертикально вниз в нижней. Выделена та ветвь функции $\gamma(\alpha)$, для которой $\gamma(0) = -ia\beta$.

При применении метода Винера—Хопфа возникает необходимость изучить функции

$$\Omega_1(\alpha) = \cos H - (BH^2 + C)H^{-1}\sin H \tag{2.2}$$

$$\Omega_2(\alpha) = \cos H - \{A[H^2 + (\beta h)^2] + BH^2 + C\}H^{-1}\sin H \tag{2.3}$$

$$\left(A = \frac{\sigma(1 + a^2)a^2}{h(\rho_0 gh)2\beta h}, B = \frac{1 + a^2}{2\beta h}, C = \frac{\beta h}{2}(a^2 - 1), H = \frac{\gamma h}{a}\right)$$

Функция $\Omega_+(\alpha)$ появляется при факторизации функции $\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha)/\Omega_2(\alpha)$, и для нее имеет место оценка $\Omega_+(\alpha) = O(|\alpha|^{-1})$ при $|\alpha| \to \infty$, $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$.

Можно показать, что функция (2.3) имеет счетное множество нулей $\pm\alpha_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), для которых при $n \gg 1$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\alpha_n = \pi a(n - 1)/h + O(1/n), \quad 0 < a < a_p \tag{2.4}$$

$$\alpha_n = \pi an/h + O(1/n), \quad a > a_p \tag{2.5}$$

$$a_p{}^2 = \{[(k + \beta h/2)^2 + 4k(\beta h/2 + 1)]^{1/2} - (k + \beta h/2)\}/2k$$

$$k = \sigma\beta(\beta h)^2/(2\rho_0 gh)$$

Заметим, что при $a > a_p$ у функции (2.3) появляются вещественные корни $\pm\alpha_p$, соответствующие чисто мнимому значению γ_p. Действительно, положив $\gamma h/a = -iy$ и переписав уравнение $\Omega_2(\alpha) = 0$ в виде

$$y \operatorname{cth} y = A\,[y^2 - (\beta h)^2]^2 - By^2 + C \tag{2.6}$$

можно показать, что при $a > a_p$ оно имеет положительный корень $y_p < \beta h$, которому соответствуют корни $\pm\alpha_p$, где $\alpha_p = (a/h)[(\beta h)^2 - y_p{}^2]^{1/2}$. Кроме того, при любом $a > 0$ функция (2.3) имеет чисто мнимые корни $\pm\bar\alpha$, $\bar\alpha = -i(a/h)[\bar y^2 - (\beta h)^2]^{1/2}$ ($\bar y > \beta h$ — корень уравнения (2.6)), соответствующие чисто мнимому значению $\bar\gamma$.

Функция (2.2), как показано в [3], имеет счетное множество нулей $\pm\alpha_n{}^1$ ($n = 1, 2, \ldots$), определяемых асимптотической формулой вида (2.4) при $0 < a < a_s$ и вида (2.5) при $a > a_s$, где $a_s{}^2 = 1 + 2/(\beta h)$. Можно установить, что $a_p > a_s$ при любых β, h, $k > 0$. Кроме того, при $a > a_s$ у функции (2.2) появляются вещественные корни $\pm\alpha_0$, соответствующие чисто мнимому значению γ_0.

Из сказанного выше и теоремы Адамара о разложении целой функции на множители следует, что факторизация функции $\Omega(\alpha)$ имеет вид

$$\Omega(\alpha) = \Omega_+(\alpha)\Omega_-(\alpha), \quad \Omega_-(\alpha) = \Omega_+(-\alpha)$$

$$\Omega_+(\alpha) = \begin{cases} \Pi(\alpha)/(1+\alpha/\bar\alpha), & 0 < a < a_p \\ \Pi(\alpha)/[(1+\alpha/\alpha_p)(1+\alpha/\bar\alpha)], & a_p < a < a_s \\ \Pi(\alpha)(1+\alpha/\alpha_0)/[(1+\alpha/\alpha_p)(1+\alpha/\bar\alpha)], & a > a_s \end{cases}$$

$$\Pi(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+\alpha/\alpha_n{}^1}{1+\alpha/\alpha_n}$$

где $\pm\alpha_0$, $\pm\alpha_n{}^1$ — корни функции (2.2).

Представим полученное решение в ином виде. Разобъем область Q на две области: $Q_1 = \{(x, z) : x < 0,\ -h < z < 0\}$ и $Q_2 = \{(x, z) : x > 0,\ -h < z < 0\}$. Применив теорему Коши к интегралу (2.1), получим в области Q_2 следующее представление для полного волнового поля:

$$\begin{aligned} u_\Sigma(x, z) &= D(-\alpha_p)\frac{\operatorname{sh}|\gamma_p|(z+h)/a}{|\gamma_p|h/a}\exp(i\alpha_p x) + \\ &+ D(-\bar\alpha)\frac{\operatorname{sh}|\bar\gamma|(z+h)/a}{|\bar\gamma|h/a}\exp(-|\bar\alpha|x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} D(-\alpha_n)\frac{\sin\gamma_n(z+h)/a}{\gamma_n h/a}\exp(i\alpha_n x), \quad \gamma_n = \gamma(\alpha_n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$E(\alpha) = \frac{\sigma k_N{}^4 \sin b_N h\Omega_-(-k_N)}{\rho_0\omega^2(k_N+\alpha)} - iC_0, \quad D(\alpha) = \frac{E(\alpha)}{\Omega_-(\alpha)\,\Omega_2{}'(\alpha)}$$

Постоянная C_0 определяется из гранично-контактного условия (1.8). Ввиду громоздкости соответствующего выражения оно здесь не приводится.

Аналогично в области Q_1 имеем

$$\begin{aligned} u_\Sigma(x, z) &= \sin b_N(z+h)\exp(ik_N x) + \\ &+ F(\alpha_0)\frac{\operatorname{sh}|\gamma_0|(z+h)/a}{|\gamma_0|h/a}\exp(-i\alpha_0 x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n{}^1)\frac{\sin\gamma_n{}^1(z+h)/a}{\gamma_n{}^1 h/a}\exp(-i\alpha_n{}^1 x) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\gamma_n{}^1 = \gamma(\alpha_n{}^1), \quad F(\alpha) = -E(\alpha)\frac{\Omega_+(\alpha)}{\Omega_1{}'(\alpha)}$$

Выражения (2.7) и (2.8) записаны для случая $a > a_s$. При $0 < a < a_s$ следует опустить второе слагаемое в формуле (2.8), а при $0 < a < a_p$ наряду с этим — первое слагаемое в формуле (2.7).

Как показывает анализ выражений (2.7) и (2.8), построенное решение непрерывно-дифференцируемо в областях Q_2 и Q_1. Вторые производные функции u_Σ имеют логарифмическую особенность вблизи ребра полубесконечной пленки. Эта особенность «распространяется» по характеристикам рассматриваемого уравнения и «отражается» от границ жидкости по законам геометрической оптики. Действительно, подобно тому, как это было сделано в работе [3], можно установить, что вторые производные u_Σ имеют логарифмическую особенность на отрезках характеристик уравнения (1.3), определяемых выражениями: $z - ax = 2mh$, $z + ax = -2(m+1)h$, $m = 0, 1, \ldots$. Третьи производные решения имеют особенность порядка обратного расстояния, а четвертые — порядка квадрата обратного расстояния до соответствующего отрезка характеристики.

Заметим, что при $z = 0$ происходит улучшение сходимости рядов (2.7) и (2.8). Это приводит к тому, что функция $\partial^2 u_\Sigma / \partial x^2$ становится ограниченной при $z = 0$. Чтобы убедиться в этом, продифференцируем ряды (2.7) и (2.8) дважды по x и положим $z = 0$ в полученных выражениях. Приняв во внимание, что $\sin \gamma_n h/a = (-1)^n O(1/n)$ при $n \gg 1$ согласно (2.4) и (2.5) (аналогичное соотношение имеет место для $\sin \gamma_n^1 h/a$), придем к заключению, что рассматриваемые ряды сходятся абсолютно и равномерно относительно x. Аналогично можно показать, что функция $\partial^3 u_\Sigma (x, 0)/\partial x^3$ в точках $x_m = 2mh/a$, $m = 0, \pm 1, \ldots$ имеет логарифмическую особенность, а функция $\partial^4 u_\Sigma (x, 0)/\partial x^4$ особенность порядка обратного расстояния.

Построенное решение удовлетворяет уравнению (1.3) в обобщенном смысле. Краевое условие (1.5) и гранично-контактное условие (1.8) выполняются в классическом смысле, а краевое условие (1.7) — в обобщенном.

3. Обсудим полученные результаты. Как видно из (2.7), падающая волна, испытав рассеяние на ребре полубесконечной пленки, возбуждает бесконечное число нормальных внутренних волн в волноводе, образованном твердым дном и полубесконечной пленкой. Эти волны переносят энергию в положительном направлении оси Ox без затухания. Их амплитуды убывают при возрастании номера волнового числа n как C_1/n^3 при $n \gg 1$, а длины волн равны $\lambda_n = 2\pi/\alpha_n$, где α_n определяются асимптотикой (2.4), (2.5). При $a > a_p$ в формуле (2.7) появляется первое слагаемое, описывающее волну изгиба пленки и поверхностную волну в жидкости под пленкой. Амплитуда этой волны максимальна у поверхности и экспоненциально убывает в направлении дна. Второе слагаемое в (2.7) имеет неволновой характер, экспоненциально убывая по x и по z при удалении от ребра.

В области Q_1 при $0 < a < a_s$ присутствует бесконечное число отраженных нормальных внутренних волн, энергия которых распространяется в отрицательном направлении оси Ox без затухания (см. (2.8)). Амплитуды этих волн убывают с ростом номера волнового числа как C_2/n^3 при $n \gg 1$, а длины волн описаны в [3].

При $a > a_s$ в формировании волновой картины наряду с этим участвует поверхностная волна, представленная вторым слагаемым в формуле (2.8). Эта волна появляется при бóльших частотах возбуждения, чем волна изгиба пленки.

Автор благодарит А. Г. Свешникова и С. А. Габова за полезные обсуждения и искренне признателен В. В. Румянцеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габов С. А.* Дифракция внутренних волн, описываемых уравнением Клейна — Гордона, на полуплоскости.— Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 1, с. 73—75.
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* О дифракции внутренних волн на кромке ледового поля.— Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 1, с. 16—20.
3. *Варламов В. В., Габов С. А., Свешников А. Г.* О рассеянии внутренних волн кромкой ледового поля. Случай конечной глубины.— Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 12, с. 2088—2095.
4. *Варламов В. В.* О рассеянии внутренних волн краем упругой пластины.— Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1985, т. 25, № 3, с. 413—421.
5. *Коузов Д. П.* Дифракция плоской гидроакустической волны на границе двух упругих пластин.— ПММ, 1963, т. 27, № 3, с. 541—546.
6. *Коузов Д. П.* Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине.— ПММ, 1963, т. 27, № 6, с. 1037—1043.
7. *Коузов Д. П.* Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин.— ПММ, 1969, т. 33, № 2, с. 240—250.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
9. *Нобл Б.* Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.VI.1985