Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 531.01

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ

Мархашов Л. М.

Указывается класс нелинейных обратимых замен канонических импульсов, приводящий гамильтонову систему к виду, мало отличающемуся от уравнений Пуанкаре [1] в канонической форме, найденной Н. Г. Четаевым [2]. Отличие состоит лишь в том, что компоненты операторов, формирующих правые части уравнений движения, могут зависеть от новых переменных (переменных Н. Г. Четаева). Обычная каноническая форма уравнений получается в том случае, если замены импульсов линейны и однородны.

Среди важных следствий полученных уравнений — теоремы Лиувилля (о полной интегрируемости), В. В. Козлова — Н. Н. Колесникова (об интегрируемости на интегральных многообразиях) [3] и теорема о классах эквивалентности гамильтоновых систем.

1. Исходные данные и соотношения. Рассмотрим s непрерывно дифференцируемых функций координат и канонических импульсов

$$y_i = \psi_i(x, p), \quad i = 1, \ldots, s \tag{1.1}$$

которые функционально независимы и однозначно разрешимы (в некоторой области) относительно переменных p, т. е. $\det(\partial\psi_i/\partial p_j) \neq 0$, $p_j = \varphi_j(x, y)$ (функции φ_j, естественно, определены не всюду), и порождают s-мерную алгебру Ли $((\cdot,\cdot)$ — скобка Пуассона)

$$(\psi_i, \psi_j) = c_{ij}{}^k\psi_k \quad i, j, k = 1, \ldots, s \tag{1.2}$$

При помощи операторов

$$X_k = \zeta_{x_i}^k \frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta_{p_i}^k \frac{\partial}{\partial p_i}; \quad \zeta_{x_i}^k = \frac{\partial\psi_k}{\partial p_i}, \quad \zeta_{p_i}^k = -\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

коммутационные соотношения (1.2) можно записать в форме

$$X_i\psi_j = c_{ij}^k\psi_k = c_{ij}^k y_k \tag{1.4}$$

в чем убеждаемся непосредственной проверкой.

Известно, что операторы X_k образуют базис некоторой алгебры Ли

$$[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k \tag{1.5}$$

что можно доказать и непосредственно, опираясь на определения (1.3).

Операторы (1.3) действуют в фазовом пространстве $\{x, p\}$. Найдем их форму в пространстве $\{x, y\}$. Рассмотрим произвольную дифференцируемую функцию $F(x, p) = F(x, \varphi(x, y)) = F^*(x, y)$.

Очевидно

$$X_kF = \left[\zeta_{x_i}^k \left(\frac{\partial F^*}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\frac{\partial F^*}{\partial y_j}\right) + \zeta_{p_i}^k \frac{\partial F^*}{\partial y_j}\frac{\partial\psi_j}{\partial p_i}\right]\Bigg|_{p_j=\varphi_j} = \left[\zeta_{x_i}^k \frac{\partial}{\partial x_i} + X_k\psi_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right]\Bigg|_{p_j=\varphi_j} \cdot F^*$$

Приняв во внимание равенства (1.4), получим

$$X_kF = X_k^*F^*, \quad X_k^* = \xi_i^k(x, y)\frac{\partial}{\partial x_i} + c_{ki}^\gamma y_\gamma \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\left(\xi_i^k(x, y) = \zeta_{x_i}^k\Big|_{p_i=\varphi_j}\right)$$

В соответствии с (1.5) имеют место коммутационные соотношения

$$[X_i^*, X_j^*] = c_{ij}^k X_k^* \tag{1.6}$$

2. Уравнения движения. Рассмотрим гамильтонову систему

$$(2.1)\qquad x_i^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i^{\bullet} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad H = H(x, p)$$

Имеем

$$x_i^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi_j}{\partial p_i}\bigg|_{p_j=\varphi_j} \cdot \frac{\partial H^*}{\partial y_j} = \xi_i^{\,j}(x, y)\frac{\partial H^*}{\partial y_j}$$

$$y_i^{\bullet} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} x_j^{\bullet} + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_j} p_j^{\bullet} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \psi_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} = -X_i H = -X_i^* H^*$$

$$(H^*(x, y) = H(x, \varphi(x, y)) = H(x, p))$$

Таким образом, уравнения движения приобретают вид

$$(2.2)\qquad x_i^{\bullet} = Y_i^* H^*, \quad y_i^{\bullet} = -X_i^* H^*, \quad Y_i^* = \xi_i^{\,j}(x, y)\,\partial/\partial y_j$$

При $\xi_i^{\,j} = \delta_i^{\,j}$ возвращаемся к гамильтоновой системе (2.1). Если функции ψ_i линейны и однородны по импульсам $y_i = \xi_j^{\,i}(x)\,p_j$, уравнения (2.2) переходят в каноническую форму уравнений Пуанкаре — Четаева. Система (2.2) во многом сохраняет черты этой классической формы. Кратко рассмотрим лишь важнейшее свойство оператора сдвига.

Перегруппировкой слагаемых, как и в работе [4], можно установить, что оператору дифференцирования по времени вдоль траекторий системы (2.2) можно придать форму

$$(2.3)\qquad \frac{d}{dt} \equiv S = -\frac{\partial H^*}{\partial x_j} Y_j^* + \frac{\partial H^*}{\partial y_j} X_j^*, \quad j = 1, \ldots, s$$

при его действии на функции, заданные в пространстве $\{x, y\}$ и

$$(2.4)\qquad S = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial H^*}{\partial x_j} Y_j^* + \frac{\partial H^*}{\partial y_j} X_j^*$$

при действии на функции, заданные в расширенном пространстве $\{t, x, y\}$.

Система операторов X_j^*, Y_j^* независима и замкнута. У них простая таблица умножения: кроме (1.6) она содержит коммутационные соотношения

$$(2.5)\qquad [Y_k^*, Y_l^*] = 0, \quad k, l = 1, \ldots, s$$

$$(2.6)\qquad [X_k^*, Y_l^*] = \frac{\partial \xi_l^{\,k}}{\partial x_i} Y_i^* - \frac{\partial \xi_l^{\,k}}{\partial y_i} X_i^*$$

Докажем их, использовав очевидные тождества

$$\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} = \delta_k^{\,\gamma}$$

Действительно

$$[Y_k^*, Y_l^*] = (Y_k^* \xi_l^{\,j} - Y_l^* \xi_k^{\,j})\frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$Y_k^* \xi_l^{\,j} - Y_l^* \xi_k^{\,j} = \left[\zeta_{x_k}^i \frac{\partial \zeta_{x_l}^j}{\partial p_\gamma}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_i} - \zeta_{x_l}^i \frac{\partial \zeta_{x_k}^j}{\partial p_\gamma}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_i}\right]\bigg|_{p_j=\varphi_j} =$$

$$= \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_l}\right)\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_i} - \frac{\partial \psi_i}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial p_\gamma}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial p_k}\right)\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_i}\right]\bigg|_{p_j=\varphi_j} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial p_l}\right) - \frac{\partial}{\partial p_l}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial p_k}\right)\right]\bigg|_{p_j=\varphi_j} = 0$$

Соотношения (2.5) доказаны. Докажем (2.6). Имеем

$$[X_k^*, Y_l^*] = -Y_l^* \xi_k^{\,j}\frac{\partial}{\partial x_j} + (X_k^* \xi_l^{\,j} - Y_l^* c_{kj}^{\gamma} y_\gamma)\frac{\partial}{\partial y_j}$$

Использовав (2.5), получим

$$-Y_l^* \xi_j^{\,k}\frac{\partial}{\partial x_j} = -Y_j^* \xi_l^{\,k}\frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{\partial \xi_l^{\,k}}{\partial y_i}\left(\xi_j^{\,i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

Далее

$$X_k{}^*\xi_l{}^j - Y_l{}^*c_{kj}^\gamma y_\gamma = X_k{}^*\xi_l{}^j - c_{kj}^\gamma\, \xi_l{}^i \frac{\partial y_\gamma}{\partial y_i} = X_k{}^*\xi_l{}^j - c_{kj}^\gamma \xi_l{}^\gamma = X_j{}^*\xi_l{}^k$$

Таким образом

$$[X_k{}^*, Y_l{}^*] = -\frac{\partial \xi_l{}^k}{\partial y_i}\left(\xi_j{}^i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \left(\xi_i{}^j \frac{\partial \xi_l{}^k}{\partial x_i} + c_{ji}^\gamma y_\gamma \frac{\partial \xi_l{}^k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial}{\partial y_j} =$$
$$= \frac{\partial \xi_l{}^k}{\partial x_i}\left(\xi_i{}^j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial \xi_l{}^k}{\partial y_i}\left(\xi_j{}^i \frac{\partial}{\partial x_j} + c_{ij}^\gamma y_\gamma \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

что совпадает с соотношениями (2.6).

Из равенств (1.8), (2.6) следует: если от переменной x_s не зависит гамильтониан H^* и функции $\xi_1{}^k, \ldots, \xi_{s-1}^k$ $(k = 1, \ldots, s)$, система операторов $X_1{}^*, \ldots, X_s{}^*, Y_1{}^*, \ldots$ $\ldots, Y_{s-1}^*$ замкнута; тогда система уравнений

$$X_1{}^*\omega = \ldots = X_s{}^*\omega = Y_1{}^*\omega = \ldots = Y_{s-1}^*\omega = 0$$

совместна. Из формулы (2.4) для оператора сдвига вытекает, что единственное решение ω этой системы — интеграл уравнений (2.2). Он представляет собой (в некотором смысле) нелинейный аналог циклического интеграла, отвечающего координате x_s.

3. Ближайшие следствия уравнений движения. Рассмотрим один из важных частных случаев, когда $\psi_i(x, p) = c_1, \ldots, \psi_s(x, p) = c_s$ — первые интегралы движения системы (2.1).

Из второй подсистемы уравнений (2.2) получаем

(3.1) $$X_i{}^*H^*\,|_{y_j=c_j} = 0$$

Изменение координат x_i будет описываться в этом случае первой подсистемой уравнений (2.2)

(3.2) $$x_i{}^\cdot = Y_i{}^*H\,|_{y_j=c_j} = \xi_i{}^j(x, c)\,\frac{\partial H^*(x, c)}{\partial c_j}$$

Согласно коммутационным соотношениям (1.8), операторы

(3.3) $$X_k{}^* = \xi_i{}^k(x, c)\frac{\partial}{\partial x_i} + c_{ki}^\gamma c_\gamma \frac{\partial}{\partial c_i}$$

образуют базис алгебры Ли, которой отвечает локальная группа преобразований G действующая в пространстве $\{x, c\}$. Покажем, что преобразования группы G преобразуют уравнения (3.2) в уравнения

(3.4) $$x_i'^{\cdot} = \xi_i{}^j(x', c')\,\partial H^*(x', c')/\partial c_j'$$

Для этого рассмотрим оператор сдвига вдоль траекторий системы (3.2)

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \xi_i{}^j(x, c)\,\frac{\partial H^*(x, c)}{\partial c_j}\,\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Учитывая соотношения (2.6) и (3.1), получим

$$[S_1, X_k{}^*] = (S_1\xi_i{}^k - X_k{}^*Y_i{}^*H^*)\,|_{y_j=c_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} = \Bigg[Y_j{}^*H^*\,\frac{\partial \xi_i{}^k}{\partial x_j} - Y_i{}^*X_k{}^*H^* +$$
$$+ \frac{\partial \xi_i{}^k}{\partial c_j} X_j{}^*H^* - \frac{\partial \xi_i{}^k}{\partial x_j} Y_j{}^*H^*\Bigg]\Bigg|_{y_j=c_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, \ldots, s$$

1°. Из вида операторов (3.3) следует, что при $c_{ij}{}^k = 0$ группа G коммутативна и является группой симметрий системы (3.2). Согласно (1.2), $\psi_i = c_i$ — первые интегралы в инволюции уравнений (2.2). Система уравнений

(3.5) $$S_1\omega_i = 0,\ X_k{}^*\omega_i = \delta_k{}^i;\quad i, k = 1, \ldots, s$$

совместна при каждом $i = 1, \ldots, s$. Она определяет s первых интегралов системы (3.2) в квадратурах. Это теорема Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем. Квадратуры получаются по формулам

$$\omega_i = tf_0^{(i)}(x, c) + \int f_j^{(i)}(x, c)\,dx_j = k_i = \text{const}$$

Здесь $f_0{}^{(i)} = \partial\omega_i/\partial t$, $f_j{}^{(i)} = \partial\omega_i/\partial x_j$ — результат разрешения системы (3.5) относительно производных от ω_i (разрешимость имеет место, так как $\det(\xi_j{}^i) \neq 0$).

2°. **Если группа G некоммутативна, но разрешима ([5], с. 208), а постоянные интегрирования c_j стеснены условиями**

(3.6) $$c_{ij}{}^k c_k = 0$$

то, согласно виду операторов (3.3), группа G действует на множестве (3.6) как группа симметрий уравнений (3.2). По известной теореме Ли система (3.2) интегрируется в квадратурах. Это теорема В. В. Козлова — Н. Н. Колесникова.

3°. Рассмотрим теперь случай, когда условия (3.6) не выполнены. Пусть R^s — евклидово пространство постоянных c_i. Каждому фиксированному набору этих постоянных отвечает точка $c = (c_1, \ldots, c_s) \in R^s$. Определим область Q как множество всех точек пространства $\{x, c\}$, в которых выполнено условие $\det(\xi_j{}^i) \neq 0$. В дальнейшем полагаем, что в каждой рассматриваемой точке $c \in R^s$ переменные x не выходят за пределы Q. Тогда эффективность действия в R^s группы G будет зависеть от ранга матрицы $K_s = (c_{ij}{}^\gamma c_\gamma)$.

Так, если $\det K_s \neq 0$ (что возможно лишь при четном s), действие группы будет локально транзитивным. Это означает, что, каковы бы ни были достаточно близкие между собой точки $c \in R^s$ и $c' \in R^s$, можно указать непрерывное (или даже гладкое) преобразование $g \in G$, переводящее соответствующие системы (3.2) и (3.4) одна в другую. Фазовые портреты этих систем оказываются, таким образом, топологически (или гладко) эквивалентными.

Обратимся к более детальному анализу. Обозначим Γ_μ максимально широкую область, в которой обращаются в нуль все миноры матрицы K_s порядка μ. В последовательности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s, R^s$ каждая из областей Γ_μ либо содержится в ближайшей последующей $\Gamma_\mu \subset \Gamma_{\mu+1}$, либо совпадает с ней: $\Gamma_\mu = \Gamma_{\mu+1}$. Для четных s, вообще говоря $\Gamma_s \subset R^s$, для нечетных s $\det K_s = 0$ и, следовательно, $\Gamma_s = R^s$. В цепочке вложений определяемых последовательностью $\Gamma_1, \ldots, R^s$, наиболее типичное звено имеет вид $\Gamma_\mu \subset \Gamma_{\mu+1} = \ldots = \Gamma_{\mu+\nu} \subset \Gamma_{\mu+\nu+1}$. Очевидно, в области $\Gamma_{\mu+\nu}$ система уравнений

(3.7) $$c_{ij}{}^\gamma c_\gamma \partial\Omega/\partial c_j = 0, \quad i = 1, \ldots, s$$

имеет общий ранг μ и допускает $\nu - 1$ функционально независимых решений

(3.8) $$\Omega_1(c) = I_1, \ \ldots, \ \Omega_{\nu-1}(c) = I_{\nu-1}$$

представляющих собой инварианты действия группы G в пространстве R^s. Для $s = 3$, например, существует по одному инварианту (3.8) для каждой некоммутативной группы G. Все они вычислены в явном виде ([4], с. 52).

На пересечении множества (3.8) при фиксированных числовых значениях $I_1, \ldots, I_{\nu-1}$ с областью $\Gamma_{\mu+\nu} \setminus \Gamma_\mu$ преобразования группы G действуют локально транзитивно.

Таким образом, справедлива

Теорема. Для достаточно близких точек $c, c' \in \Gamma_{\mu+\nu} \setminus \Gamma_\mu$, отвечающих одним и тем же численным значениям инвариантов $I_1, \ldots, I_{\nu-1}$, фазовые портреты систем (3.2) и (3.4) непрерывно (или гладко) эквивалентны в области Q.

Прозрачную иллюстрацию к теореме доставляет случай Эйлера движения твердого тела.

В качестве переменных y_1, y_2, y_3 могут быть приняты постоянные проекции кинетического момента на неподвижные оси. Эквивалентность фазовых портретов для одной и той же величины k кинетического момента реализуется группой вращений. Наличие этой группы обычно фактически и используется, когда ради упрощения задачи с самого начала принимается специальный выбор неподвижных осей: $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = k$.

Для других механических задач ситуация может оказаться не такой простой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mecanique.— C. r. Acad. sci, 1901, v. 132, p. 369—371.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Козлов В. В.*, *Колесников Н. Н.* Об интегрируемости гамильтоновых систем.— Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, 1979, № 6, с. 88—91.
4. *Мархашов Л. М.* Об уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре — Четаева.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 1, с. 43—55.
5. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли. М.: Гостехтеориздат, 1940. 396 с.

Москва

Поступила в редакцию 20.II.1986