Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

УДК 531.36 : 534

О СИНХРОНИЗАЦИИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧЕРЕЗ СРЕДУ

Шноль Э. Э.

Рассматривается система из N (нелинейных) осцилляторов, влияющих друг на друга только за счет воздействия на общую среду. Обсуждается устойчивость периодических колебаний в такой системе, носящих синхронный или частично синхронный характер. Специальное внимание уделяется случаю $N \gg 1$.

Проблема синхронизации осцилляторов, не взаимодействующих непосредственно и влияющих друг на друга только за счет воздействия на среду, не является новой (см., например, [1, 2]). При этом обычно предполагается, что взаимодействие осцилляторов слабое, так что они лишь слегка изменяют темп и форму колебаний. Термином «синхронизация» обозначают большей частью одно из двух явлений: 1) установление одинаковых колебаний (по форме и фазе) в системе идентичных осцилляторов; 2) установление общего периода колебаний в системе идентичных или близких по устройству осцилляторов.

Биологические задачи, приводящие к проблеме синхронизации колебаний, рассмотрены в [3, 4].

1. Изучаемая система и особенности постановки задачи. Рассматривается N объектов одинаковой природы, имеющих в некотором диапазоне (неизменных) внешних условий устойчивый автоколебательный режим. Эти объекты («осцилляторы») помещены в среду, влияют на нее и в силу этого влияют друг на друга. Предполагается, что воздействие осцилляторов на среду аддитивно.

В биологических приложениях число объектов N обычно очень велико, а влияние отдельного осциллятора на среду очень мало. Например, если речь идет о биологических колебаниях, свойственных живой клетке, то воздействие отдельной клетки на среду пропорционально отношению объема клетки v к объему среды V, свободному от клеток.

Уравнения, описывающие подобную систему, в простейшем случае идентичных осцилляторов могут быть записаны в виде (точкой обозначено дифференцирование по времени t)

$$s^{\cdot} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(s, x_k); \quad x_k^{\cdot} = h(s, x_k); \quad k = 1, \ldots, N \tag{1.1}$$

$$g(s, x) = g^{(0)}(s) + \gamma g^{(1)}(s, x), \quad \gamma = Nv/V \tag{1.2}$$

Здесь вектор s отвечает среде, x — осцилляторам (вообще говоря, $\dim s \neq \dim x$), $g^{(0)}(s)$ описывает изменение среды вне зависимости от ее «наполнения», $g^{(1)}(s, x)$ — влияние осцилляторов на среду. Ниже предполагается, что (при фиксированной «плотности» γ) функция $g(s, x)$ не зависит от N.

В биологических приложениях (в отличие от технических) синхронизация интересна обычно тогда, когда она наступает достаточно быстро (за относительно небольшое число периодов колебаний) и сохраняется при заметных различиях параметров осцилляторов. Это возможно, если взаимодействие не слишком слабое. В частности, колебания глобальной пере-

Необходимость устанавливается столь же просто: из (4.6) для s, y, ξ вытекают (4.4) и (4.5), представляющие собой формульную запись условий теоремы.

Замечание 2. Из теоремы 1 вытекает, очевидно, справедливость утверждения 1 п. 3.

Замечание 3. (см. утверждение 2 п. 3). В условиях теоремы 1 существует такое δ_*, не зависящее от N что при

$$\delta < \delta_*, \quad |s(0) - s^\circ(0)| < \delta, \quad |x_k(0) - X^\circ(0)| < \delta$$

выполнены неравенства

$$|s(t) - s^\circ(t+\tau)| \leqslant B\delta e^{-\alpha t}, \quad |x_k(t) - X^\circ(t+\tau)| \leqslant B\delta e^{-\alpha t}, \; k = 1, \ldots, N$$

Аналог теоремы 1 для двухкомпонентного режима дает

Теорема 1а.

Для устойчивости периодического решения типа (2.2) системы (1.1) при любых $N_1 > 1$ и $N_2 = N - N_1 > 1$ необходимы и достаточны: а) устойчивость решения $(s^\circ(t), X_1^\circ(t), X_2^\circ(t))$ системы (2.3); б) асимптотическая устойчивость по линейному приближению периодических решений $X_1^\circ(t)$ и $X_2^\circ(t)$ системы (4.1).

5. Устойчивость синхронного режима в расширенном смысле. *Определение 1.* Синхронное (периода T) решение $z^\circ(t)$ системы (1.1) ($s = s^\circ(t)$, $x_k = X^\circ(t)$; $k = 1, \ldots, N$) N-устойчиво, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ (не зависящее от N) со следующими свойствами. Пусть $|s(0) - s^\circ(0)| < \delta$ и $|x_k(0) - X^\circ(0)| < \delta$ для $k \leqslant \nu$, $\nu \geqslant N(1-\delta)$. Тогда на любом участке $(t_*, t_* + T)$ для решения $z(t)$ $|s(t) - s^\circ(t+\tau)| < \varepsilon$, $|x_k(t) - X^\circ(t+\tau)| < \varepsilon$, $k = 1, \ldots, \nu$.

Комментарии. 1°. В определении ничего не говорится о переменных x_k с $k > \nu$: они могут быть сильно изменены при $t = 0$ и как-то изменяться при $t > 0$.

2°. Рассматривать промежутки времени, равные периоду колебаний, необязательно; можно выбрать любое (фиксированное) T.

3°. Величина τ зависит не только от решения $z(t)$, но и от t_*.

Теорема 2. Пусть $|g(s, x)| \leqslant B$ (при всех s и x) и синхронное периодическое решение $z^\circ(t)$ системы (1.1) асимптотически орбитально устойчиво по линейному приближению. Тогда это решение устойчиво и в смысле определения 1.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме, приводимой без доказательства.

Лемма. В предположениях теоремы существует функция Ляпунова $L(z)$, удовлетворяющая при $\rho(z) \leqslant M$ следующим оценкам с постоянными, не зависящими от N:

$$c_0\rho(z) \leqslant L(z) \leqslant C_0\rho(z), \quad \left|\frac{\partial L}{\partial z_j}\right| \leqslant C_1, \quad L^\cdot|_{(1.1)} \leqslant -\rho(z) \tag{5.1}$$

Здесь $\rho(z)$ — расстояние от точки z до замкнутой траектории $l = \{z^\circ(t)\}$ в смысле нормы

$$\|z\| = \max(|s|; \; |x_1|, \ldots, |x_N|) \tag{5.2}$$

Отметим, что любое устойчивое (в том же смысле) периодическое решение $z(t)$ произвольной системы допускает функцию Ляпунова с оценками (5.1). Содержание леммы в том, что для системы (1.1) константы c_0, C_0, C_1, M не зависят от N.

Доказательство теоремы 2. Систему (1.1) для n объектов назовем системой S_n. Зададим $\delta > 0$ и $\nu \geqslant N(1-\delta)$. Обозначим $z = (s; x_1, \ldots, x_N)$,

$\zeta = (s; x_1, \ldots, x_\nu)$. На любом решении системы S_N переменные s и x_k с $k \leqslant \nu$ удовлетворяют уравнениям

$$(5.3) \qquad s^\cdot = \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} g(s, x_k) + r(t), \quad x_k^\cdot = h(s, x_k), \quad k = 1, \ldots, \nu$$

Здесь остаточный член $r(t)$ зависит от выбранного решения, но в любом случае $|r(t)| \leqslant 2B\delta$.

Пусть $L(\zeta)$ — функция Ляпунова системы S_ν, построенная по лемме. Вычисляя производную L в силу системы S_N (или, что то же, в силу системы (5.3)), получим

$$L^\cdot|_{S_N} = L^\cdot|_{S_\nu} + \frac{\partial L}{\partial s} r(t) \leqslant -\rho(\zeta) + C_2\delta \quad (C_2 = 2C_1B)$$

Здесь $\rho(\zeta)$ — расстояние от точки ζ до периодического решения $\zeta^\circ(t)$ системы S_ν $(s = s^\circ(t),\ x_k = X^\circ(t),\ k = 1, \ldots, \nu)$.

Таким образом, $L^\cdot \leqslant 0$ при $C_2\delta \leqslant \rho(\zeta) \leqslant M$, или

$$(5.4) \qquad L^\cdot|_{(5.3)} \leqslant 0 \text{ при } C_3\delta \leqslant L \leqslant M_1 \ (C_3 = C_0C_2,\ M_1 = c_0M)$$

Выберем начальную точку $z(0)$ для решения системы S_N так, чтобы $\|\zeta(0) - \zeta^\circ(0)\| \leqslant \delta$; тогда $\rho(\zeta(0)) \leqslant \delta$ и $L(\zeta(0))| \leqslant C_0\delta$. В силу (5.4) $L(\zeta(t)) \leqslant C_4\delta$ при всех $t \geqslant 0$ $(C_4 = \max(C_0, C_3))$ и $\rho(\zeta(t)) \leqslant C_5\delta$, $C_5 = C_4/c_0$. Фиксируем t_*; для некоторого τ будет $\|\zeta(t_*) - \zeta^\circ(t_* + \tau)\| \leqslant C_5\delta$. Чтобы оценить $w(t) = \zeta(t) - \zeta^\circ(t + \tau)$ при $t_* \leqslant t \leqslant t_* + T$, заметим, что $\zeta(t)$ и $\zeta^\circ(t)$ удовлетворяют системе (5.3) ($\zeta(t)$ с неким $r(t)$, а $\zeta^\circ(t)$ — с $r(t) \equiv 0$). Как обычно

$$w^\cdot = A(t)w + R(t), \quad \|A(t)\| \leqslant \max\|df/d\zeta\| = D,$$
$$\|R\| \leqslant 2B\delta$$

Здесь $f(\zeta)$ — правая часть системы S_ν, матричная норма соответствует векторной норме (5.2) и максимум берется по ограниченной области, содержащей область $\rho(\zeta) \leqslant M$.

Для системы S_N D не зависит от n. Отсюда следует, что $\|w(t)\| \leqslant C_6\delta$ для $t_* \leqslant t \leqslant t_* + T$, или $|s(t) - s^\circ(t + \tau)| \leqslant C_6\delta$, $|x_k(t) - X^\circ(t + \tau)| \leqslant C_6\delta$, $k = 1, \ldots, \nu$ (C_6 зависит от T, но не зависит от N).

Итак, можно выбрать $\delta = \varepsilon/C_6$, и теорема доказана.

6. Добавления и примечания. 1°. При малом γ (см. 1.1)) осцилляторы взаимодействуют слабо и вступают в действие теоремы, восходящие к Пуанкаре (см. литературные указания в [1, 2]). Предположим, что: а) система $s^\cdot = g^{(0)}(s)$ имеет асимптотически устойчивое положение равновесия s_*; б) система $x^\cdot = h(s_*, x)$ имеет асимптотически устойчивый предельный цикл l. Тогда при $\gamma \ll 1$ в системе (1.1): 1) существует синхронный режим (в котором $s(t)$ близко к s_*, а $\{x(t)\}$ — к l; 2) существует двухкомпонентный режим (2.2) периода T, для которого $N_1 = N/2$, $X_2(t) = X_1(t + T/2)$. Оба эти режима могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Отметим, что при $\beta = 1/2$ бывает и существенное отличие $X_1(t)$ от $X_2(t)$ (а при $\beta \neq 1/2$ такое отличие становится обязательным).

2°. Утверждения 2 и 4 из п. 3 (и лемма из п. 5) отличаются от стандартных лишь независимостью от N и не требуют для своего доказательства никаких новых идей. Обычные доказательства для системы $z^\cdot = f(z)$ (см., например, [5]) приводят к цели, если использовать то, что для системы (1.1):

а) $\|df(\xi)\| = \|\Sigma(\partial f/\partial z_j)\xi_j\| \leqslant C_1\|\xi\|$ (аналогично d^2f)

б) для общего решения $z = \Phi(t, \zeta)$ $(\Phi(0, \zeta) = \zeta)$

$$\|d_\zeta\Phi\| = \|\Sigma(\partial\Phi/\partial\zeta_j)\xi_j\| \leqslant B_1\|\xi\| \quad (\text{аналогично } d^2\Phi)$$

Здесь C_k и B_k не зависят от N при использовании нормы (5.2).

3°. Поясним сказанное выше на примере аналога утверждения 2 для (более простого) случая положения равновесия.

Теорема. Пусть $z_* = (s_*; X_*, \ldots, X_*)$ — симметричное положение равновесия системы (1.1), асимптотически устойчивое по линейному приближению. Тогда при $\| z(0) - z_* \| < \delta$

$$\| z(t) - z_* \| \leqslant B \| z(0) - z_* \| e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0$$

(δ, α и B не зависят от N).

Эскиз доказательства. Пусть $z_* = 0$. Запишем систему (1.1) в виде (ср. с п. 4):

$$s^{\cdot} = as + by + r_0(z), \quad x_k^{\cdot} = ps + qx_k + r_k(z)$$

или $z^{\cdot} = Az + R(z)$, $\| R \| \leqslant C_2 \| z \|^2$. По условию, собственные значения матриц q и $\begin{Vmatrix} a & b \\ p & q \end{Vmatrix}$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda \leqslant -\alpha < 0$. Отсюда $\exp(tA) \| \leqslant \leqslant C \exp(-\alpha t)$ (C не зависит от N). После чего из тождества

$$z(t) = e^{tA} z(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} R(z(\tau))\, d\tau$$

получим $\| z(t) \| \leqslant 2C \| z(0) \| \exp(-\alpha t)$ при $\| z(0) \| < \delta_*$ (δ_* зависит от C_2, но не зависит от N).

4°. При $N \gg 1$ малым возмущением системы является изъятие (или добавление) небольшой части осцилляторов. Устойчивость относительно таких действий, изменяющих размерность фазового пространства системы, в теории дифференциальных уравнений обычно не рассматривается. Эта традиция соблюдена в п. 5, но по существу теорема 2 справедлива и для таких возмущений.

5°. Аналог теоремы 2 справедлив и для двухкомпонентных режимов. При этом они уже явно выступают в виде целого семейства. Сильное начальное уклонение небольшой части осцилляторов может перебросить их из одной подсистемы в другую: малое возмущение β есть частный случай того, что разрешает теорема 2.

6°. Вместо определения 1 из п. 5 можно использовать следующее, звучащее более традиционно'

Определение 2. Синхронное решение $z^\circ(t)$ системы (1.1) N-устойчиво, если оно орбитально устойчиво равномерно по N при использовании нормы

$$\| z \| = | s | + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} | x_k |$$

Определения 1 и 2 формально не эквивалентны. Однако для рассматриваемых здесь задач они равноправны, если запретить неограниченный рост x_k (например, положить $h(s, x) \equiv 0$ вне ограниченной области Ω). С задачей, математическое извлечение из которой обсуждается в этой работе, автора познакомил Е. Е. Сельков. Многочисленные обсуждения с ним были автору весьма полезны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
2. *Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
3. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975. 343 с.
4. *Pavlidis T.* Biological Oscillators: Their Mathematical Analysis. N. Y.— L. Acad. Press, 1973. 207 p.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.1985