

УДК 624.131+539.215

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНО СВЯЗНОЙ СРЕДЫ С ТРЕНИЕМ

Штейн М. Ш.

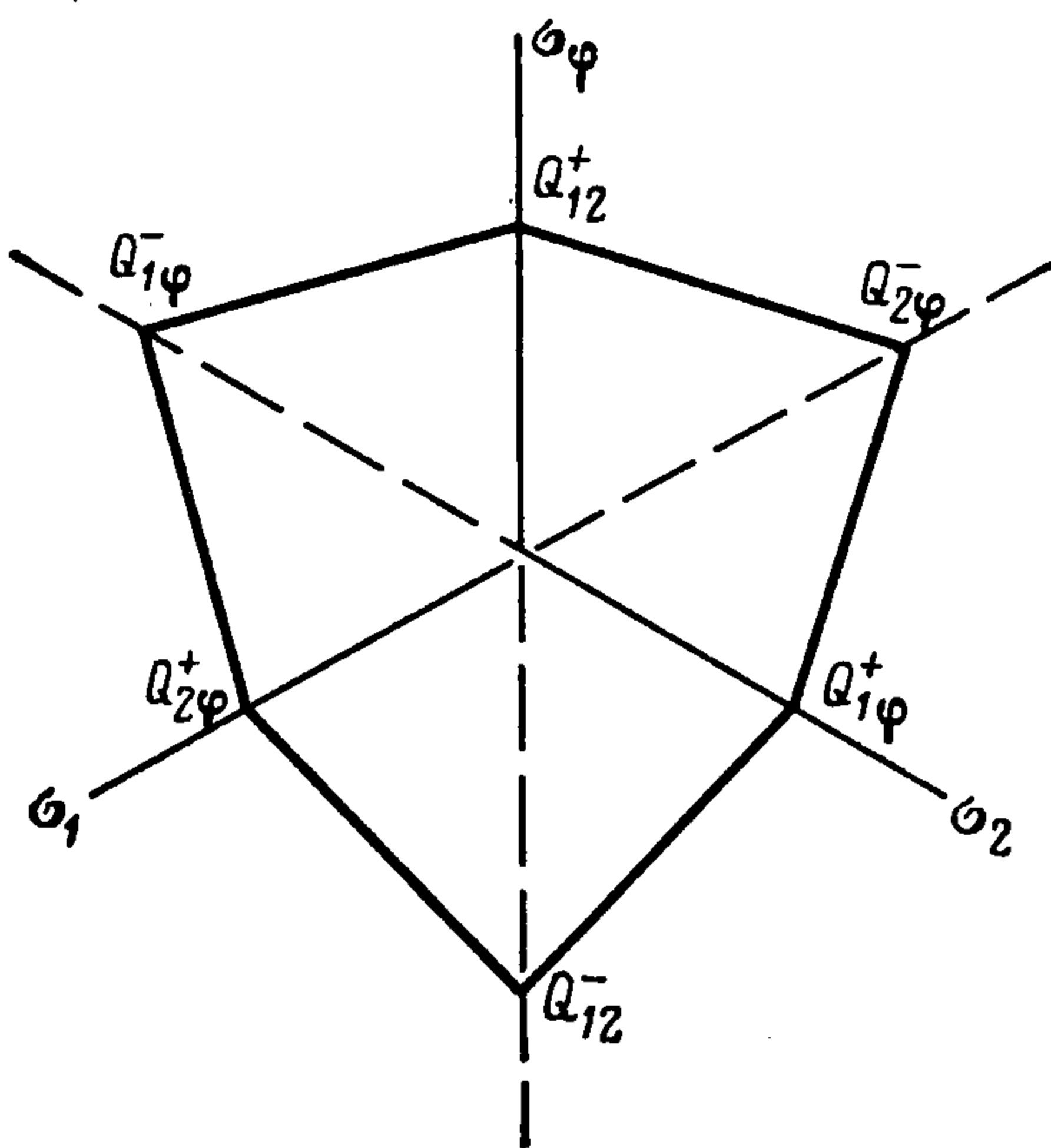
Предлагается новый подход к решению граничных задач течения, отвечающего границам кусочно-гладких условий пластичности, основанный на введении функции характеристических направлений, которая удовлетворяет квазилинейному гиперболическому уравнению второго порядка. Исследуются системы уравнений, описывающие пластическое течение идеально жесткопластической среды, следующей обобщенному условию Кулона — Мора. Установлено, что системы уравнений гиперболические, получены соотношения на характеристиках. Изучаются возможные разрывы напряжений и скоростей перемещений вдоль некоторых кривых в меридиональной плоскости. Получены аналоги вариационных принципов для рассматриваемой жесткопластической среды.

1. Поверхность текучести. В качестве обобщения известных кусочно-гладких поверхностей текучести в пространстве главных напряжений [1—7] примем

$$(1.1) \quad \alpha (\sigma_i + \sigma_j) + \beta \sigma_k + |\sigma_i - \sigma_j| = 2k$$

$$i \neq j \neq k; i, j, k = 1, 2, \varphi$$

Можно показать, что выполнение неравенств $\alpha - 1 \leq \beta \leq \alpha + 1$ является достаточным условием того, что (1.1) соответствует выпуклой



Фиг. 1

шестигранной пирамиде с вершиной в точке $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\varphi = 2k/(2\alpha + \beta)$ и осью, равнонаклоненной к осям координат σ_i ($i = 1, 2, \varphi$) в пространстве главных напряжений. На фиг. 1 изображено сечение пирамидальной поверхности плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_\varphi = 0$. Коэффициент α следует связывать с $\sin \varphi^\circ$ (φ° — угол внутреннего трения); β — коэффициент бокового давления (отпора) [8], учитывающий влияние среднего главного напряжения на прочность среды (зависит от пористости, уплотненности); k — коэффициент сцепления среды.

Перейдем в (1.1) к компонентам тензора напряжений $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\varphi$ в осях r, φ, z

$$(1.2) \quad A (\sigma_r + \sigma_z) + B \sigma_\varphi + C \sqrt{\Sigma} = 2k$$

$$\Sigma = (\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2$$

где A, B, C определяются в зависимости от типа грани. Следуя обозначениям фиг. 1 имеем:

для граней $Q_{2\varphi}^+ Q_{1\varphi}^-$ ($\sigma_1 > \sigma_\varphi > \sigma_2$), $Q_{2\varphi}^- Q_{1\varphi}^+$ ($\sigma_2 > \sigma_\varphi > \sigma_1$)

$$(1.3) \quad A = \alpha, \quad B = \beta, \quad C = 1$$

для граней $Q_{1\varphi}^- Q_{12}^+$ ($\sigma_\varphi > \sigma_1 > \sigma_2$), $Q_{1\varphi}^+ Q_{12}^-$ ($\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_\varphi$)

$$(1.4) \quad A = (\alpha + \beta + \kappa)/2, \quad B = \alpha - \kappa, \quad C = [\kappa(\alpha - \beta) + 1]/2$$

$$\kappa = 1, \quad \sigma_2 > \sigma_\varphi; \quad \kappa = -1, \quad \sigma_2 < \sigma_\varphi$$

для граней $Q_{12}^+ Q_{2\varphi}^-$ ($\sigma_\varphi > \sigma_2 > \sigma_1$), $Q_{12}^- Q_{2\varphi}^+$ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_\varphi$) имеют место соотношения (1.4); лишь в выражениях для κ следует заменить σ_2 на σ_1 .

Произвольное из ребер Q_{12}^+ , $Q_{2\varphi}^-$, ..., $Q_{1\varphi}^-$ (фиг. 1) может быть записано в виде пересечения смежных граней

$$(1.5) \quad A(\sigma_r + \sigma_z) + B\sigma_\varphi + C\sqrt{\Sigma} = 2k$$

$$A_1(\sigma_r + \sigma_z) + B_1\sigma_\varphi + C_1\sqrt{\Sigma} = 2k$$

При этом A , A_1 , B , B_1 , C , C_1 определяются из (1.3), (1.4) согласно условию смежности.

Заметим, что условие (1.1) обобщает известные в теории идеальной пластичности кусочно-гладкие поверхности текучести в пространстве главных напряжений. Так, при $\alpha = \beta = 0$ имеем призму пластичности Треска — Сен-Венана [1, 5—7]; $\alpha = \sin \varphi^\circ$, $\beta = 0$ — условие Кулона — Мора [2]; $\alpha = \beta$ — правильная пирамида Друкера [3]; $\beta = \alpha \pm 1$ — трехгранные пирамиды Хейнторнтуэйта [4].

2. Определяющие уравнения течения для грани. Введем в рассмотрение переменные Леви $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $\tau = |\sigma_1 - \sigma_2|/2$, Ψ

$$(2.1) \quad \sigma_r = \sigma + \tau \cos 2\Psi, \quad \sigma_z = \sigma - \tau \cos 2\Psi, \quad \tau_{rz} = \tau \sin 2\Psi$$

(Ψ — угол между первым главным направлением в плоскости r, z и осью r ; σ_1, σ_2 — главные компоненты напряжений в меридиональной плоскости). Используя далее (1.2) в качестве пластического потенциала, будем иметь для скоростей деформаций $\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\varphi, \gamma_{rz}$ выражения

$$(2.2) \quad \varepsilon_r = \partial u / \partial r = \lambda (A + C \cos 2\Psi), \quad \varepsilon_z = \partial v / \partial z = \lambda (A - C \cos 2\Psi)$$

$$\varepsilon_\varphi = u/r = \lambda B, \quad \gamma_{rz} = 2\lambda C \sin 2\Psi$$

Здесь u, v — скорости перемещений вдоль осей r, z соответственно, λ — неотрицательный множитель.

Если далее исключить λ из (2.2), а σ_φ при помощи (1.2) — из уравнений равновесия и воспользоваться переменными (2.1), то получим квазилинейную систему пяти уравнений для определения неизвестных функций σ, τ, Ψ, u, v в виде

$$(2.3) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \cos 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial r} + \sin 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial z} -$$

$$- 2\tau \left(\sin 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \cos 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{f_1}{r}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \sin 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial r} - \cos 2\Psi \frac{\partial \tau}{\partial z} +$$

$$+ 2\tau \left(\cos 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \sin 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{f_2}{r}$$

$$f_1 = \frac{2k}{B} + \frac{2A+B}{B} \sigma - \left(\cos 2\Psi + \frac{2C}{B} \right) \tau, \quad f_2 = -\tau \sin 2\Psi$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2A}{B} \frac{u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2C}{B} \frac{u}{r} \sin 2\Psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos 2\Psi - \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \sin 2\Psi = 0$$

Наряду с соотношениями (2.4) следует рассматривать и условия ассоциируемости главных скоростей деформаций главным напряжениям, что приводит к необходимости выполнения следующих функциональных и диф-

дифференциальных неравенств:

$$(2.5) \quad u < 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 < 4 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z}$$

для граней $Q_{1\varphi}^+ Q_{12}^-$, $Q_{12}^- Q_{2\varphi}^+$ и неравенства противоположного знака для граней $Q_{2\varphi}^- Q_{1\varphi}^+$, $Q_{2\varphi}^+ Q_{1\varphi}^-$, $Q_{1\varphi}^- Q_{12}^+$ и $Q_{2\varphi}^+ Q_{1\varphi}^-$.

Система (2.3), (2.4), являющаяся прямым следствием ассоциированного закона течения с условием (1.2), не подлежит классификации [9]. Характеристический определитель (2.3), (2.4) тождественно равен нулю из-за вырожденности матриц при производных по r и z от искомых функций. Следовательно, допустимо предположение о существовании отдельных дифференциальных зависимостей, следующих из (2.2) для u , v и их производных и функции Ψ и ее производных. Связь между скоростями u , v устанавливается исключением $\cos 2\Psi$, $\sin 2\Psi$ из (2.4), что приводит к нелинейной гиперболической системе

$$(2.6) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 = \left(\frac{2C}{B} \frac{u}{r} \right)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2A}{B} \frac{u}{r}$$

с характеристиками

$$(2.7) \quad dz/dr = \operatorname{tg} \Psi, \quad dz/dr = -\operatorname{ctg} \Psi$$

Соотношения (2.7) определяют в плоскости r, z главные направления тензора напряжений (они же в силу соосности являются и главными траекториями тензора скоростей деформаций). Для условия Кулона — Мора ($\alpha = \sin \varphi^\circ$, $\beta = 0$), Треска — Сен-Венана ($\alpha = \beta = 0$) соответствующие следствия системы (2.6) были выведены в [2, 6]. Однако постановка краевых задач для системы (2.6) предполагает кинематическую определенность, что нереализуемо при решении конкретных прикладных осесимметричных задач в жесткопластической постановке. Поэтому представляется важным установить зависимость для функции $\Psi(r, z)$ и ее производных.

Обратимся к соотношениям (2.2), откуда имеем

$$(2.8) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u}{r} \left(\frac{A}{B} + \frac{C}{B} \cos 2\Psi \right), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{u}{r} \left(\frac{A}{B} - \frac{C}{B} \cos 2\Psi \right)$$

Следовательно, можно записать

$$(2.9) \quad u = \Phi(r, z) r^\delta, \quad v = r^\delta \int \left(\frac{\delta \Phi}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) dz + g(r), \quad \delta = \frac{A}{B}$$

$$(2.10) \quad \Phi(r, z) = f(z) \exp \left(\frac{C}{B} \int \frac{\cos 2\Psi}{r} dr \right)$$

где $f(z)$, $g(r)$ — произвольные функции своих аргументов из C^1 .

Если теперь подставить явные выражения для скоростей перемещений (2.8) во второе уравнение (2.1) и проделать ряд последовательных преобразований, то приходим к уравнению для функции (2.10)

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - E \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \delta(\delta - 1) \frac{\Phi}{r^2} = 0$$

$$G = \frac{4r}{F} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad E = \frac{4C}{B} \frac{\Phi}{rF}, \quad F = \left[\left(\frac{2C}{B} \Phi \right)^2 - \left(2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Заметим, что из (2.10) следует

$$(2.12) \quad \Psi(r, z) = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{B}{C} \frac{r}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad G = 2 \operatorname{ctg} 2\Psi, \quad E = \frac{2}{r \sin 2\Psi}$$

Применяя стандартную процедуру исследования типа уравнения второго порядка [10], получаем, что квазилинейное уравнение (2.11) гипер-

болическое, характеристики которого — главные направления тензора напряжений в плоскости r, z (2.7). В соответствии с (2.12) будем называть (2.10) функцией характеристических направлений.

Таким образом, вырожденная система уравнений (2.3), (2.4) тождественно преобразуется: в уравнение (2.11) для определения функции $\Phi(r, z)$ и, следовательно, $\Psi(r, z)$; линейную систему (2.3) относительно функций σ, τ ; нелинейную систему (2.5) относительно скоростей u, v (последняя тривиально линеаризуется при известной функции Ψ или для определения скоростей перемещений используются соотношения (2.9)).

Введем далее в плоскости r, z криволинейную ортогональную систему координат, связанную с главными направлениями тензора напряжений (2.9) $r = r(\alpha, \beta), z = z(\alpha, \beta)$ (не путать с постоянными среды α, β в п. 1). При этом первое уравнение (2.7) пусть определяет α -линию ($\beta = \text{const}$), а второе — β -линию ($\alpha = \text{const}$) и тогда операторы дифференцирования вдоль α -, β -линий примут вид

$$(2.13) \quad \frac{d}{dr_\alpha} = \frac{\partial}{\partial r} + \text{tg } \Psi \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{d}{dr_\beta} = \frac{\partial}{\partial r} - \text{ctg } \Psi \frac{\partial}{\partial z}$$

Переходя в (2.3), (2.4) к дифференцированию вдоль характеристик в соответствии с (2.13) будем иметь

$$(2.14) \quad \frac{d(\sigma + \tau)}{dr_\alpha} = 2\tau \text{tg } \Psi \frac{d\Psi}{dr_\beta} + \frac{f_1 + \text{tg } \Psi f_2}{r}$$

$$\frac{d(\sigma - \tau)}{dr_\beta} = 2\tau \text{ctg } \Psi \frac{d\Psi}{dr_\alpha} + \frac{f_1 - \text{ctg } \Psi f_2}{r}$$

$$(2.15) \quad \frac{dU}{dr_\alpha} - V \frac{d\Psi}{dr_\alpha} = \frac{U \cos \Psi - V \sin \Psi}{r} \frac{A + C}{B \cos \Psi}$$

$$\frac{dV}{dr_\beta} + U \frac{d\Psi}{dr_\beta} = \frac{U \cos \Psi - V \sin \Psi}{r} \frac{A - C}{B \cos \Psi}$$

(U, V — скорости перемещений вдоль характеристик (2.7) соответственно). К соотношениям (2.15) вдоль траекторий максимального удлинения следует присоединить условие равенства нулю скорости сдвига

$$(2.16) \quad \sin \Psi \frac{dU}{dr_\beta} + \frac{V}{R_\beta} + \cos \Psi \frac{dV}{dr_\alpha} + \frac{U}{R_\alpha} = 0$$

где R_α, R_β — радиусы кривизн α - и β -линий.

Из сказанного следует, что конструктивный алгоритм решения осесимметричных задач для жесткопластического тела, следующего грани кусочно-гладкого условия (1.1), сводится, по существу, к решению краевых задач для уравнения (2.11), после чего системы (2.14) и (2.15) можно рассматривать как соотношения вдоль характеристик напряженного и деформированного состояния и определять компоненты тензора напряжений и скорости перемещений.

3. Постановка краевых задач для уравнения (2.11). Рассмотрим возможность формулировать граничную задачу для уравнения относительно функции характеристических направлений Φ , исходя из задания на некоторой кривой в плоскости r, z (фиг. 2) напряжений, скоростей перемещений и их комбинаций. Будем считать, что кривая ab задана параметрически: $r = r(t), z = z(t); t \in [t_1, t_2]$, причем $r(t), z(t) \in C^1_{[t_1, t_2]}$, а значения функции на ab будем отмечать индексом $^\circ$. Не ограничивая общности, остановимся на следующих трех случаях постановок задач, сводящихся к задаче Коши для уравнения (2.11).

1°. На дуге ab заданы компоненты тензора напряжений

$$(3.1) \quad \sigma_n|_{ab} = \sigma_n^\circ, \quad \sigma_s|_{ab} = \sigma_s^\circ, \quad \tau_{ns}|_{ab} = \tau_{ns}^\circ$$

Тогда (штрих означает производную по t)

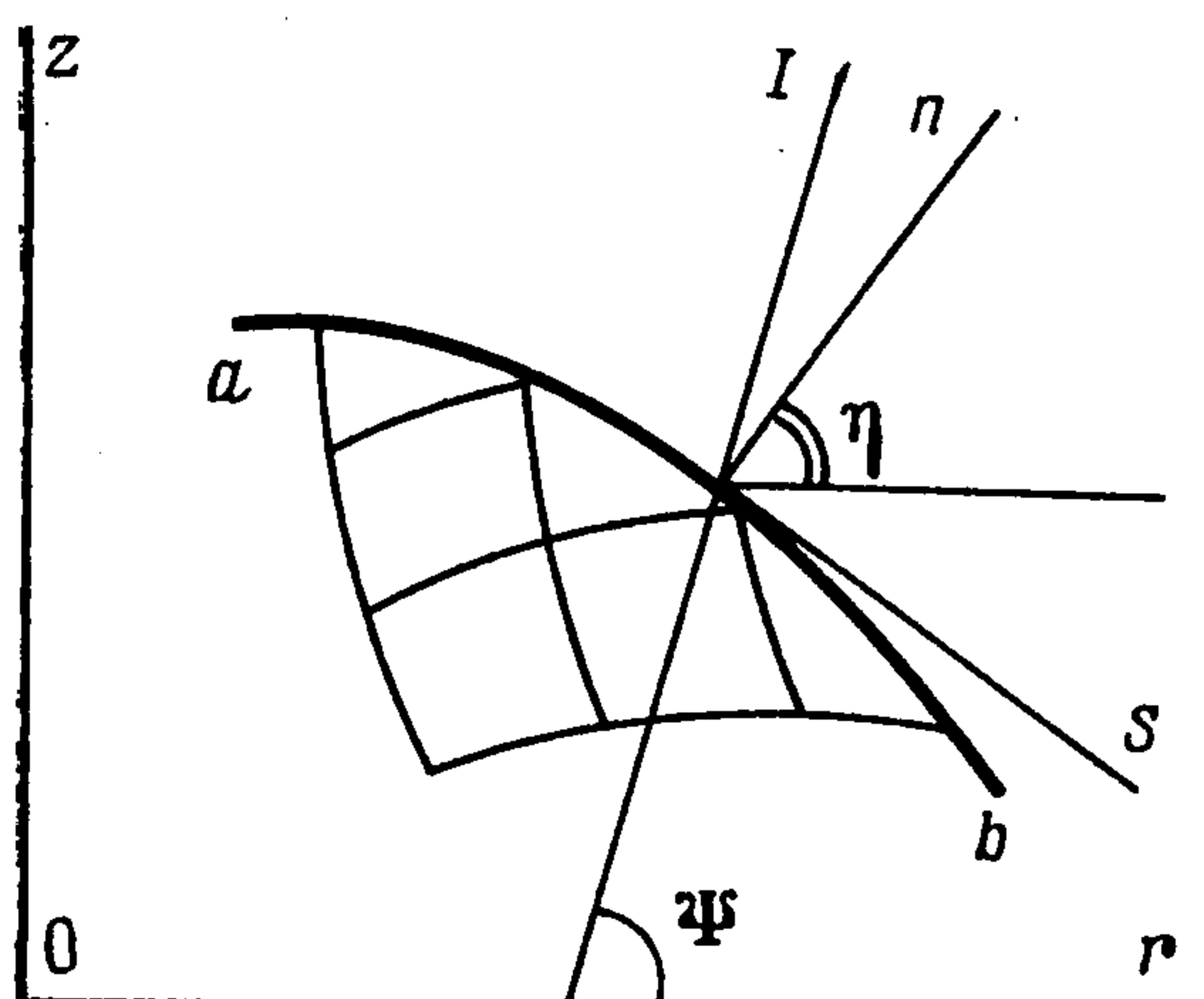
$$(3.2) \quad \Psi^\circ = \eta + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2\tau_{ns}^\circ / (\sigma_n^\circ - \sigma_s^\circ); \operatorname{tg} \eta = -r'(t)/z'(t)$$

Из (2.10) определим $\Phi|_{ab}$ как

$$(3.3) \quad \Phi^\circ(t) = f^\circ(t) \exp\left(\frac{C}{B} \int \frac{\cos 2\Psi^\circ}{r(t)} r'(t) dt\right)$$

Затем из (2.10) и производной (3.3) по t находим

$$(3.4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{ab} = \frac{C}{B} \frac{\Phi^\circ}{r} \cos 2\Psi^\circ, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{ab} = \frac{df^\circ}{dt} \frac{\Phi^\circ}{f^\circ}$$



Фиг. 2

2°. На ab заданы компоненты скорости перемещений

$$(3.5) \quad u|_{ab} = u^\circ, \quad v|_{ab} = v^\circ$$

Воспользуемся равенствами (2.2) и продифференцируем u°, v° вдоль ab , тогда

$$(3.6) \quad \cos 2(\Psi^\circ - \eta) = \frac{A}{C} + \frac{Br}{Cu^\circ} \times \\ \times (v^{\circ'} \cos \eta - u^{\circ'} \sin \eta)$$

Следовательно, значение функции Φ и ее первых производных на ab определяются соотношениями

$$(3.7) \quad \Phi|_{ab} = u^\circ r^{-\delta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{ab} = \frac{C}{B} u^\circ r^{-(\delta-1)} \cos 2\Psi^\circ \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{ab} = \frac{r^{-\delta} r'}{z'} \left[\frac{u^{\circ'}}{z'} - \frac{u^\circ}{Br} (A + C \cos \Psi^\circ) \right], \quad \delta = \frac{A}{B}$$

3°. На дуге ab заданы смешанные условия

$$(3.8) \quad \sigma_n|_{ab} = \sigma_n^\circ, \quad \tau_{ns}|_{ab} = \tau_{ns}^\circ, \quad u|_{ab} = u^\circ$$

Из (2.9) и дифференцирования u° вдоль ab получаем

$$(3.9) \quad \cos 2\Psi^\circ = \frac{B}{C} \frac{r}{r'} \left(\frac{u^{\circ'}}{u^\circ} - \frac{r'}{Br} - \frac{f^{\circ'}}{f^\circ} \right)$$

после чего имеем значения для функции Φ и ее производных вдоль дуги ab в виде

$$(3.10) \quad \Phi|_{ab} = u^\circ r^{-\delta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{ab} = \frac{u^\circ r^{-\delta}}{z'} \frac{f^{\circ'}}{f^\circ} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{ab} = u^\circ r^{-\delta} \left(\frac{u^{\circ'}}{u^\circ} - \frac{\delta r'}{r} - \frac{f^{\circ'}}{f^\circ} \right)$$

Значения функции f° и ее производной в выражениях (3.4) и (3.10) определяются через значения напряжений (3.1) и (3.8). Кроме того, правые части равенств (3.6), (3.9) по абсолютной величине не должны превышать единицы, что накладывает соответствующие ограничения в виде неравенств на скорости u°, v° и их первые производные. В случае, когда дуга ab имеет характеристические направления ($\Psi^\circ = \eta$), из (3.2), (3.6), (3.9) имеем зависимости для начальных условий вдоль характеристик.

Итак, используя соотношения (3.3), (3.4), (3.7) и (3.10), приходим к задаче Коши для уравнения (2.11), теоремы единственности и существования решений которой для квазилинейного уравнения второго порядка приведены в [10].

4. Определяющие уравнения для ребра. Следуя фиг. 1, рассмотрим ребра $Q_{1\varphi}^+, Q_{1\varphi}^-, Q_{2\varphi}^+$ и $Q_{2\varphi}^-$, которым в пространстве напряжений $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{rz}$ отвечают соотношения (1.5). Принимая (1.5) в качестве пластического потенциала, будем иметь

$$(4.1) \quad \varepsilon_r = \xi + \zeta \cos 2\Psi, \quad \varepsilon_z = \xi - \zeta \cos 2\Psi, \quad \varepsilon_\varphi = \lambda B + \mu B_1 \\ \gamma_{rz} = 2\zeta \sin 2\Psi; \quad \xi = \lambda A + \mu A_1, \quad \zeta = \lambda C + \mu C_1, \quad \lambda, \mu > 0$$

A, A_1, B, B_1, C, C_1 определяются из (1.3), (1.4) как коэффициенты смежных граней (фиг. 1).

Переходя в уравнениях равновесия и в (1.5) к переменным (2.1), а в (4.1) к скоростям перемещений, приходим к квазилинейной системе четырех уравнений отно-

сительно функций σ, Ψ, u, v :

$$(4.2) \quad (1-d) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - g \frac{\partial \sigma}{\partial z} - 2\tau \left(\sin 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \cos 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{\tau (\kappa - \cos 2\Psi)}{r}$$

$$- g \frac{\partial \sigma}{\partial r} + (1+d) \frac{\partial \sigma}{\partial z} - 2\tau \left(\cos 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \sin 2\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{-\tau \sin 2\Psi}{r}$$

$$(4.3) \quad (\cos 2\Psi - \sin \chi) \frac{\partial u}{\partial r} + (\cos 2\Psi + \sin \chi) \frac{\partial v}{\partial z} = -\cos 2\Psi (1 - \kappa \sin \chi) \frac{u}{r}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos 2\Psi - \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \sin 2\Psi = 0$$

Здесь

$$d = \cos 2\Psi \sin \chi, \quad g = \sin 2\Psi \sin \chi, \quad \tau = K - \sigma \sin \chi$$

$$\sin \chi = (2\alpha + \beta) / (2 - \kappa\beta), \quad K = 2k / (2 - \kappa\beta)$$

К уравнениям (4.3) необходимо присоединить неравенство

$$(4.4) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 > 4 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad Q_{1\varphi}^+, Q_{2\varphi}^+$$

следующее из рассмотрения знаков главных скоростей деформаций, отвечающих соответствующим вершинам. В случае ребер $Q_{1\varphi}^-, Q_{2\varphi}^-$ дополнительно к (4.4) должно иметь место и $u > 0$. Ребра Q_{12}^+, Q_{12}^- (фиг. 1) приводят к тривиальному состоянию

$$(4.5) \quad \sigma_r = \sigma_z = \frac{2k_0}{\Delta + 1} + \frac{C_0}{r(1+\Delta)}, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_\varphi = \frac{2k_0}{\Delta + 1} + \frac{C_0 \Delta}{r(1+\Delta)}$$

$$C_0 = \text{const}, \quad \Delta = \frac{\alpha + \beta - \kappa}{\alpha + \kappa}, \quad k_0 = \frac{k}{\alpha + \kappa}, \quad \kappa = \begin{cases} -1, & Q_{12}^- \\ 1, & Q_{12}^+ \end{cases}$$

Для скоростей при этом имеем гиперболическую систему

$$(4.6) \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\Delta u}{r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

с характеристиками $r = \text{const}$, $z = \text{const}$ и неравенства

$$u > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} < 0, \quad (Q_{12}^+)$$

$$u < 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} > 0, \quad (Q_{12}^-)$$

Обратимся к системе (4.2), (4.3). Из нее следует, что два уравнения (4.2), вообще говоря, можно рассматривать независимо от двух последних (4.3) (статически определимая задача). Но построение согласованных полей напряжений и скоростей при решении конкретных задач требует совместного рассмотрения систем (4.2), (4.3). Поэтому далее будем исследовать уравнения (4.2), (4.3) как единую квазилинейную систему относительно функций σ, Ψ, u, v . Характеристический анализ показывает, что (4.2), (4.3) — гиперболическая система с двукратными характеристиками

$$(4.7) \quad dz/dr = \text{tg } \gamma^{\alpha, \beta}, \quad \gamma^\alpha = \Psi - \chi/2 - \pi/4, \quad \gamma^\beta = \Psi + \chi/2 + \pi/4$$

индекс α соответствует α -линии, а β — β -линии.

Таким образом, характеристики поля напряжений совпадают с характеристиками поля скоростей.

Определим дифференцирование вдоль характеристик

$$d^{\alpha, \beta}/dr = \partial/\partial r + \text{tg } \gamma^{\alpha, \beta} \partial/\partial z$$

Тогда соотношения вдоль (4.7) могут быть записаны так (верхний знак берется для α -линии, нижний — для β -линии):

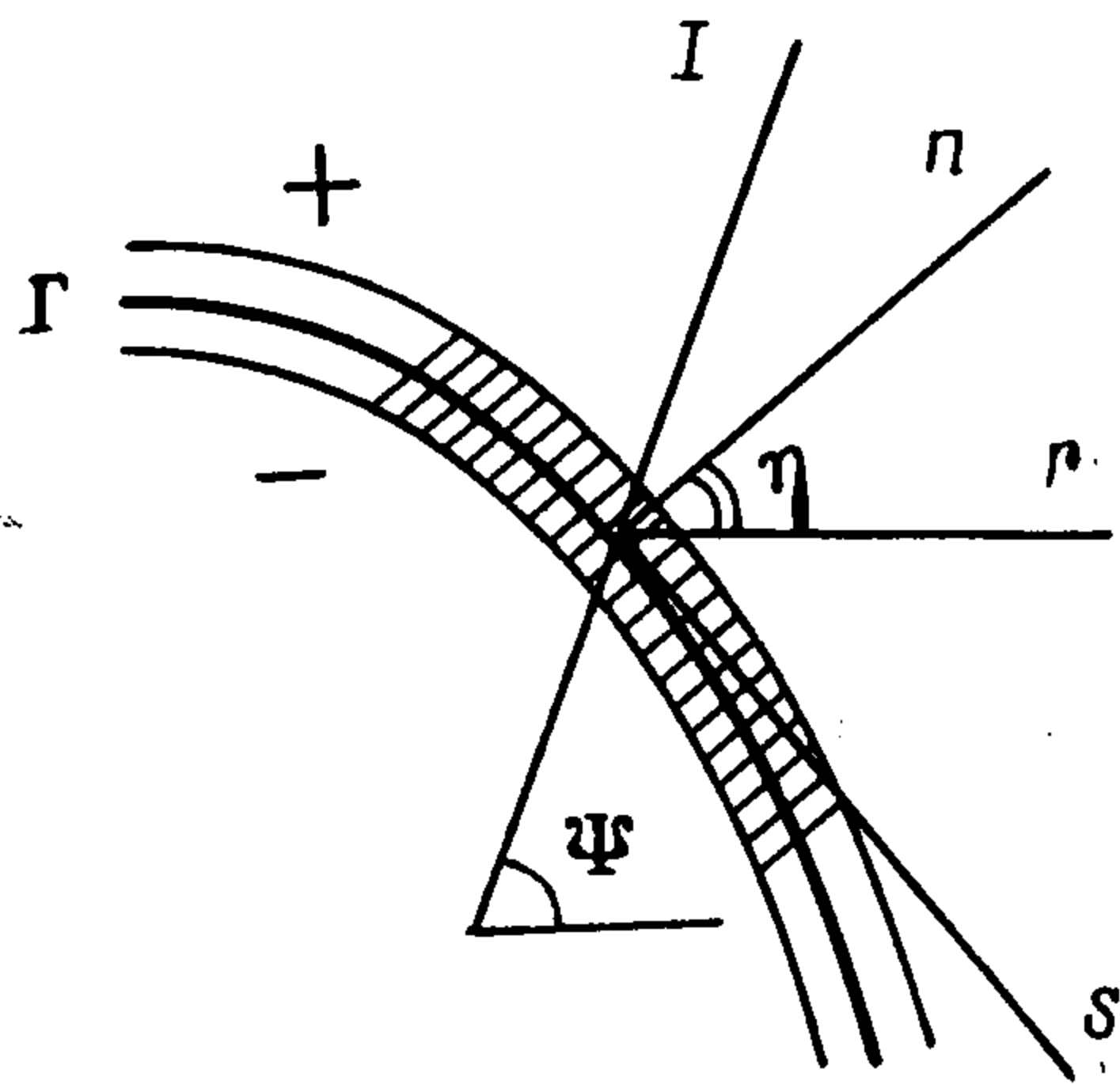
$$(4.8) \quad d^{\alpha, \beta} \sigma \mp \frac{2\tau}{\cos \chi} d^{\alpha, \beta} \Psi = \frac{\tau}{r \cos \chi} [\kappa \cos \chi d^{\alpha, \beta} r \mp (\kappa \sin \chi - 1) d^{\alpha, \beta} z]$$

$$(4.9) \quad d^\alpha U - \left(U \text{tg } \chi + \frac{V}{\cos \chi} \right) d^\alpha \Psi = \frac{\kappa \sin \chi - 1}{2 \sin \gamma^\alpha} \frac{u}{r} d^\alpha z$$

$$d^\beta V + \left(\frac{U}{\cos \chi} + V \text{tg } \chi \right) d^\beta \Psi = \frac{\kappa \sin \chi - 1}{2 \sin \gamma^\beta} \frac{u}{r} d^\beta z$$

Здесь U, V — скорости перемещений вдоль α - и β -линий соответственно (α -, β -характеристики не ортогональны: $\gamma^\beta - \gamma^\alpha = \chi + \pi/2$).

5. Разрывы напряжений и скоростей перемещений. Исследуем возможность существования сильного разрыва напряжений и скоростей перемещений в окрестности некоторой кривой Γ в плоскости r, z . Пусть напряженное состояние в окрестности Γ (фиг. 3) соответствует грани условия (1.1) и имеют место соотношения (1.2)—(1.4). Введем локальную



Фиг. 3

систему координат (n, s) , связанную с Γ , как показано на фиг. 3. Тогда условия равновесия элемента среды в непосредственной близости к предполагаемой кривой разрыва напряжений Γ требует, чтобы скачки напряжений $[\sigma_n] = [\tau_{ns}] = 0$. Разрывными могут быть σ_s и σ_φ .

Запишем компоненты тензора напряжений в осях n, s

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma + \tau \cos 2(\Psi - \eta), \\ \sigma_s &= \sigma - \tau \cos 2(\Psi - \eta), \\ \tau_{ns} &= \tau \sin 2(\Psi - \eta) \end{aligned}$$

Условие пластичности (1.1) в соответствии с (2.1) может быть записано так:

$$(5.2) \quad \sigma_\varphi = 2B^{-1}(k - A\sigma - C\tau)$$

На основании равенств $[\sigma_n] = [\tau_{ns}] = 0$ получим уравнение, связывающее скачки Ψ , σ_φ и τ поперек Γ

$$(5.3) \quad C \cos(\Psi^+ - \Psi^- - 2\eta) - \frac{B}{4} \frac{[\sigma_\varphi]}{\tau} \frac{\sin 2(\Psi^+ - \eta)}{\sin(\Psi^+ - \Psi^-)} = A \cos(\Psi^+ - \Psi^-)$$

Итак, имея значения Ψ , τ по одну сторону от Γ и задаваясь скачком окружного напряжения $[\sigma_\varphi]$, можно определить Ψ^+ , а затем и τ^+ , σ^+ по другую сторону Γ . Если принимается непрерывность σ_φ при переходе через Γ ($[\sigma_\varphi] = 0$), то (5.3) упрощается и скачок $[\Psi]$ не зависит от τ , а следовательно, и от σ . Это следует также из рассмотрения (5.2) по обе стороны от Γ .

Пусть теперь Γ — часть характеристики, т. е. на участке конечной длины $\eta = \Psi$. При этом (5.3) теряет смысл. Обратимся к соотношениям на характеристиках (2.14)—(2.16), откуда сразу следует, что $[\Psi] = 0$, а вдоль первого главного направления (α -линия) разрывным может быть σ_1 ($[\sigma_2] = 0$), вдоль второго (β -линия) разрывным может быть σ_2 ($[\sigma_1] = 0$). Для скачков имеют место соотношения

$$(5.4) \quad \begin{aligned} [\sigma_1] &= -B(A + C)^{-1} [\sigma_\varphi] \quad (\text{вдоль } \alpha\text{-линии}) \\ [\sigma_2] &= B(C - A)^{-1} [\sigma_\varphi] \quad (\text{вдоль } \beta\text{-линии}) \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим возможность разрывов скоростей перемещений в окрестности кривой Γ в плоскости r, z , для чего воспользуемся зависимостями (2.2), в которых r, z заменим на n, s . Это обосновано инвариантностью (2.2) относительно выбора прямоугольной системы координат в плоскости r, z , из которых имеем

$$(5.5) \quad \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_n}{\sigma_s - \sigma_n} = \frac{C^2(\varepsilon_s + \varepsilon_n)}{A[2k - A(\sigma_s + \sigma_n) - B\sigma_\varphi]} = \frac{\varepsilon_{sn}}{\tau_{sn}} = \frac{2\lambda C}{\sqrt{\Sigma}}; \quad \lambda \geq 0$$

Подчиняя (5.5) условию разрыва касательной компоненты скорости вдоль Γ ($\varepsilon_{ns}/\varepsilon_n \sim \varepsilon_{ns}/\varepsilon_s \rightarrow \infty$), приходим к равенствам

$$(5.6) \quad \sigma_s - \sigma_n = 0, \quad A(\sigma_s + \sigma_n) + B\sigma_\varphi = 2k$$

Следовательно, из условия пластичности (5.2) получим, что $\sigma_1 = \sigma_2$, и попадаем на ребра Q_{12}^+ или Q_{12}^- пирамиды текучести (4.5), (4.6).

Остается еще рассмотреть случай, когда Γ содержит характеристические направления. Из соотношений вдоль характеристик (2.15) вытекает, что поперек α -линии может быть разрывна тангенциальная компонента скорости перемещения U ; вдоль β -линии разрывна компонента V . Но так как характеристики (2.7) — траектории главных направлений скоростей деформаций, то вдоль них должно выполняться условие равенства нулю главного сдвига (2.16). Это накладывает ограничения на разрыв скоростей вдоль α - и β -линий.

Действительно, пусть вдоль α -линии имеет место скачок касательной, составляющей $[U] \neq 0$. Тогда из (2.15) с необходимостью следует, что $[V] \neq 0$, причем радиусы кривизны R_α и R_β должны быть равны ($R_\alpha = R_\beta$), а скачки компонент скоростей перемещений удовлетворяют равенству

$$(5.7) \quad [U] = -[V], \quad \text{или} \quad U^+ + V^+ = U^- + V^-$$

Таким образом, в случае осевой симметрии при соответствии скоростей деформации (2.2) граням скорость перемещений может претерпевать разрыв только вдоль характеристик (5.7), при этом и нормальная, и касательная составляющие (5.7) разрывны. Следовательно, область среды с условием пластичности (1.2), прилегающую к кривой разрыва компонентом скоростей перемещения Γ , полезно рассматривать как математическую идеализацию переходного слоя конечной толщины. Так, если Γ — участок жесткопластической границы, то введение такого слоя физически обусловлено эффектом дилатансии (изменение объема от интенсивности деформации сдвига).

При $\alpha, \beta \neq 0$ одновременно из (2.2) имеем линейную зависимость

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \Lambda \gamma, \quad \Lambda = \frac{3}{2} (2\alpha + \beta) [(\alpha - \beta)^2 + 3]^{-1/2} \\ \varepsilon &= \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi, \\ \gamma &= \frac{1}{3} \left\{ 2 \left[(\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2 + \frac{3}{2} \gamma_{rz}^2 \right] \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

При этом переход от недеформируемой части среды к среде с (5.8) осуществляется через слой конечной толщины с рассмотренными выше свойствами разрывов.

Перейдем к изучению напряженного и деформированного состояния, отвечающего ребрам условия текучести (1.5). Пусть в окрестности кривой Γ (фиг. 3) имеет место сильный разрыв компонент тензора, причем $[\sigma_n] = [\tau_{ns}] = 0$, $[\sigma_s] \neq 0$. К соотношениям (5.1) следует присоединять равенства

$$(5.9) \quad A\sigma + C\tau = 2k, \quad \sigma_\varphi = \sigma + k\tau$$

откуда после преобразования (5.3) имеем

$$(5.10) \quad \cos(\Psi^+ - \Psi^-) = A^{-1}C \cos(\Psi^+ - \Psi^- - 2\eta)$$

Задавая на Γ скачок $[\Psi]$ и значения σ и τ по одну сторону кривой разрыва, можно тем самым определять с помощью (5.10) $[\tau]$ и $[\sigma]$. Из соотношений вдоль характеристик для напряжений (4.8) следует, что $[\sigma] = [\Psi] = 0$ при переходе через характеристику. В силу (5.9) тогда и $[\tau] = [\sigma_\varphi] = 0$. Поэтому при соответствии напряженного состояния ребрам (1.5) вдоль характеристик (4.7) компоненты тензора напряжений непрерывны.

Остановимся еще на разрывах компонент скорости перемещения вдоль характеристик (4.7). Из уравнения (4.9) получаем, что поперек α -линии $[U] \neq 0$, а для β -линии $[V] \neq 0$.

Рассмотрим для определенности α -линию и в окрестности ее примем, что u направлено по касательной, т. е. совпадает с U , а $V = 0$ ($\Psi = \pi/4 - \chi/2 = 0 \Rightarrow \Psi = \pi/4 + \chi/2$). Тогда $u = U$, $v = u \operatorname{tg} \chi$. Отсюда для среды с трением, следующей ребру обобщенного условия (1.1), разрыв тангенциальной составляющей компоненты скорости влечет за собой разрыв и нормальной компоненты, причем $[v] = [u] \operatorname{tg} \chi$. Таким образом, и в этом случае при разрыве скоростей вдоль характеристик следует предполагать наличие в окрестности такой характеристики переходного слоя конечной толщины. Если $\chi = 0$ ($\alpha = \beta = 0$), то имеет место ребро призмы пластичности Треска и разрыв нормальной составляющей скорости перемещения отсутствует, а необходимость в переходном слое отпадает (превращается в линию).

Отметим, что на полученную особенность одновременного разрыва нормальной и тангенциальной составляющей скорости перемещения для сред с условием пластичности, зависящим от среднего давления, указывалось в [11]. И, наконец, проведя общие рассуждения аналогично [12], приходим к выводу: линия раздела жесткой области и соседней пластически деформируемой как для грани, так и для ребра условия (1.1) является характеристикой.

6. Функция диссипации. Вариационный подход. Определим функцию диссипации механической энергии в единице объема среды, деформируемой согласно закону (2.2). Воспользуемся представлением тензоров напряжений и скоростей деформаций для случая осевой симметрии в виде пятимерных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$. Тогда в соответствии с определением функции диссипации D скалярное произведение $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, т. е.

$$(6.1) \quad D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = |\boldsymbol{\sigma}| \cdot |\boldsymbol{\varepsilon}| \cos(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 2\lambda k \quad (i, j = r, z, \varphi) \\ \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = |\boldsymbol{\varepsilon}|^2 = \lambda^2 (2\alpha^2 + \beta^2 + 2); \quad 2\varepsilon_{rz} = \gamma_{rz}$$

Отсюда имеем

$$(6.2) \quad D = k_0 \left(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \frac{1}{2} \gamma_{rz}^2 \right)^{1/2} = k_0 |\boldsymbol{\varepsilon}| \\ |\boldsymbol{\sigma}| \cos(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = k_0; \quad k_0 = 2k (2\alpha^2 + \beta^2 + 2)^{-1/2}$$

Уравнение скорости виртуальных работ при условии пренебрежимой малости ускорений может быть записано в виде

$$(6.3) \quad \int_{\Omega} D d\omega = \int_{\partial\Omega} (P_r u + P_z v) ds$$

где Ω — область пластического деформирования в плоскости r, z с границей $\partial\Omega$, P_r, P_z — плотности распределения напряжений на $\partial\Omega$.

В (6.3) для простоты предполагается отсутствие объемных сил в Ω , а также гладкость поля скоростей u, v .

Далее введем статистически возможные напряжения σ_{ij}^* и кинематически допустимые скорости деформаций ε_{ij}° [5—7, 12], а через $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ обозначим действительные значения напряжений и скоростей деформаций, следующие зависимостям (2.2) и удовлетворяющие краевым условиям на $\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_v$ (на $\partial\Omega_p$ заданы напряжения, на $\partial\Omega_v$ — скорости перемещений). Из принципа максимума для функции диссипации имеем

$$(6.4) \quad (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij} \leq 0$$

Тогда из (6.3) и (6.5) следует

$$(6.5) \quad \int_{\partial\Omega_V} (P_r^* u + P_z^* v) ds \leq \int_{\partial\Omega_V} (P_r u + P_z v) ds$$

что соответствует максимуму мощности, развиваемой действительными поверхностными силами по сравнению с любой другой статистически возможной системой P_r^* , P_z^* .

Получим теперь аналог принципа минимума действительного поля скоростей для жесткопластической среды (2.2) в предположении, что действительное распределение напряжений σ_{ij} во всех точках деформируемого тела удовлетворяет неравенству (см. второе равенство (6.2))

$$(6.6) \quad |\sigma_{ij}| \leq K_0 < \infty$$

где $K_0 = \text{const}$ определяется через физические параметры прочности k , α , β .

Обратимся к (6.2) и рассмотрим скалярное произведение

$$(6.7) \quad \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^\circ - \varepsilon_{ij}) \leq |\sigma| |\varepsilon^\circ| - k_0 |\varepsilon| < k_0 (T_0 |\varepsilon^\circ| - |\varepsilon|), \quad T_0 = K_0/k_0$$

Применяя далее (6.3) к $\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^\circ - \varepsilon_{ij})$ и учитывая (6.7), будем иметь

$$(6.8) \quad \begin{aligned} k_0 T_0 \int_{\Omega} |\varepsilon_{ij}^\circ| d\omega - \int_{\partial\Omega_p} (P_r u^\circ + P_z v^\circ) ds > \\ > k_0 \int_{\Omega} |\varepsilon_{ij}| d\omega - \int_{\partial\Omega_p} (P_r u + P_z v) ds = \int_{\partial\Omega_V} (P_r u + P_z v) ds \end{aligned}$$

Из неравенства (6.5) и (6.8) вытекает двусторонняя оценка мощностей действительных поверхностных сил на заданных скоростях. Кроме того, на основании (6.8) вариационному равенству (6.3) можно поставить в соответствие задачу отыскания минимума функционала

$$(6.9) \quad J(u, v) = M(u, v) + L(u, v)$$

на линейном пространстве

$$H(\Omega) = \{u_0, v_0 \mid u_0 = u_1^\circ - u_2^\circ, v_0 = v_1^\circ - v_2^\circ\}$$

где (u_1°, v_1°) , (u_2°, v_2°) — произвольные кинематически допустимые пары векторов скоростей перемещений точек объема Ω с границей $\partial\Omega_V \cup \partial\Omega_p$. В (6.9) $M(u, v)$, $L(u, v)$ определяются так:

$$(6.10) \quad \begin{aligned} M(u, v) = k_0 T_0 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right]^{1/2} d\omega \\ L(u, v) = \int_{\partial\Omega} (P_r u + P_z v) ds \end{aligned}$$

Следуя [13], устанавливаем, что (6.10) — выпуклый недифференцируемый функционал и часть результатов [13], относящихся к жесткопластическому телу, может быть переформулирована и для (6.9). Заметим, что при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ поле скоростей u, v не соленоидально (5.8) и переходить к зависимости между девиаторами напряжений и скоростями деформаций не имеет смысла.

Гиперболическое уравнение второго порядка (2.13) относительно функции характеристических направлений $\Phi(r, z)$ приводится к квазилинейной системе первого порядка [10]. При этом могут быть переформулированы в терминах функций такой системы и краевые условия (3.3)—(3.4), (3.7), (3.10). Решение же граничных задач

для квазилинейных гиперболических систем с учетом возможных разрывов можно строить с применением разностных схем типа [14] и им подобных.

Отметим также, что функция диссипации механической энергии в единице объема D (6.2) линейно выражается через скалярную функцию характеристических направлений $\Phi(r, z)$ (2.10):

$$D = 2kr^{\delta-1} |\Phi(r, z) / B|$$

Тогда проблема отыскания минимума функционала (6.9) может быть сформулирована для Φ . При этом следует надлежащим образом ввести линейное пространство $H_{\Phi}(\Omega)$, что может оказаться определяющим при доказательстве существования минимизирующего элемента в осесимметричной задаче (6.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shield R. T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A., 1955, v. 233, No. 1193, p. 267—287.— Рус. перев.: Механика. Период. сб. иностр. статей, 1957, № 1, с. 102—122.
2. *Cox A. D., Eason C., Hopkins H. G.* Axially symmetric plastic deformations in soils.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1961, v. 254, 1, No. 1036, p. 1—45.
3. *Drucker D. C.* Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems.— J. Mech. Phys. Solids, 1953, v. 1, No. 4, p. 217—226.
4. *Haythorntwaite R. M.* Range of yield condition in ideal plasticity — Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. J. Eng. Mech. Div., 1962, v. 127, pt 1, p. 1252—1268.
5. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
6. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
7. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
8. *Цытович Н. А.* Механика грунтов. М.: Высш. шк., 1979. 272 с.
9. *Штейн М. Ш.* Об одном варианте регуляризации уравнений идеальной пластичности в случае осевой симметрии.— ПМТФ, 1984, № 3, с. 132—140.
10. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
11. *Drucker D. C., Prager W., Greenberg H. I.* Extended limit design theorems for continuous media.— Quart. Appl. Math., 1952, v. 9, No. 4, p. 381—389.— Рус. перев. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1953, № 1, с. 99—106.
12. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математическая теория неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
13. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
14. *Петров И. Б., Холодов А. С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа.— Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1984, т. 24, № 8, с. 1172—1188.

Тернополь

Поступила в редакцию
3.VII.1985