

УДК 539.375

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИН МЕТОДОМ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Рыбакина О. Г.

Некоторые результаты по расчету раскрытия прямолинейных и дискообразных трещин под действием заданной системы сил приведены в [1—3]. Представляет интерес исследование раскрытия внутренних и поверхностных трещин более сложной формы, так как в ряде случаев оно позволяет по известному раскрытию трещины на поверхности тела определить ее глубину.

Получены формулы для раскрытия внутренних или поверхностных эллиптических трещин, получающегося при действии на тело произвольной статической нагрузки, симметричной относительно плоскости трещины.

1. Рассмотрим упругое тело, содержащее прямолинейную сквозную трещину $0 \leq x \leq l$, внутреннюю или выходящую на поверхность $x = 0$. Был предложен [4] метод весовых функций (ВФ) для расчета коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины и высказана мысль о возможности использования этого метода для определения поля перемещений. При известных для некоторого случая внешней нагрузки упругой энергии деформации $W(l)$ и перемещении верхнего берега трещины $v(x, l)$ ВФ вычисляется по формуле [4]

$$(1.1) \quad h(x, l) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E'} \frac{\partial W}{\partial l} \right)^{-1/2} \frac{\partial v(x, l)}{\partial l}$$

где $E' = E/(1 - \nu^2)$ при плоской деформации, $E' = E$ при плоском напряженном состоянии, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона; причем $h(x, l)$ не зависит от вида нагрузки.

Для КИН $K(l)$ в вершине $x = l$ имеет место формула

$$(1.2) \quad K(l) = 2 \int_0^l \sigma(x) h(x, l) dx$$

где $\sigma(x)$ — произвольное распределение напряжений, приложенных к берегам трещины. Кроме того, известно, что

$$(1.3) \quad K^2(l) = E' \partial W / \partial l$$

Это позволяет переписать (1.1) в виде

$$(1.4) \quad h(x, l) = 1/2 (E'/K(l)) \partial v(x, l) / \partial l$$

В случае внутренней трещины $v(0, l) = 0$, что, как следует из (1.4), приводит к $h(0, l) = 0$.

Таким образом, как показано в [4], при известных $K(l)$ и $v(x, l)$ для какого-либо случая внешней нагрузки формулы (1.2) и (1.4) позволяют определить $K(l)$ для произвольной функции $\sigma(x)$.

Перейдем к определению смещения берега трещины и найдем $v(x, l)$ из (1.4), приняв во внимание, что $v(l, l) = 0$. Будем иметь

$$(1.5) \quad v(x, l) = \frac{2}{E'} \int_x^l K(t) h(x, t) dt$$

Формулы (1.2) и (1.5) позволяют определить раскрытие трещины при произвольной $\sigma(x)$, если известна ВФ $h(x, l)$.

Отметим следующее. Допустим, что к верхнему и нижнему берегам трещины приложены симметрично единичные сосредоточенные силы на расстоянии ζ от начала координат, т. е. $\sigma(x) = \delta(x - \zeta)$, где $\delta(x - \zeta)$ — функция Дирака. Обозначая $K_0(\zeta, l)$ КИН в вершине $x = l$, соответствующий единичным сосредоточенным силам, получим из (1.2) соотношение $K_0(\zeta, l) = 2h(\zeta, l)$, подстановка которого в (1.5) дает формулу

$$(1.6) \quad v(x, l) = \frac{1}{E'} \int_x^l K(t) K_0(x, t) dt$$

полученную ранее Парисом [1] другим методом. Формулы (1.2), (1.5) — это конкретизация формулы (1.6) на случай, когда $K(l)$ и $K_0(\zeta, l)$ определены методом весовых функций. Однако вывод (1.5) приведенным выше способом представляет самостоятельный интерес, так как позволяет получить ее обобщение на случай трещины более сложной формы.

Подстановка (1.2) в (1.5) дает

$$(1.7) \quad v(x, l) = \frac{4}{E'} \int_x^l \left[h(x, t) \int_0^t \sigma(\xi) h(\xi, t) d\xi \right] dt = \\ = \frac{4}{E'} \left\{ \int_0^x \left[\sigma(\xi) \int_x^l h(x, t) h(\xi, t) dt \right] d\xi + \right. \\ \left. + \int_x^l \left[\sigma(\xi) \int_{\xi}^l h(x, t) h(\xi, t) dt \right] d\xi \right\}$$

Отсюда получим

$$(1.8) \quad v(x, l) = \frac{4}{E'} \int_0^l \sigma(\xi) f(x, \xi, l) d\xi, \quad f(x, \xi, l) = \int_{\max(x, \xi)}^l h(x, t) h(\xi, t) dt$$

Применим формулы (1.8) к задаче о плоскости с прямолинейной сквозной трещиной. Приведенная в [4] ВФ для конца трещины $h = l$ имеет вид

$$h(x, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{x}{l(l-x)}}$$

Вычисления по второй формуле (1.8) дают

$$f(x, \xi, l) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sqrt{x(l-\xi)} + \sqrt{\xi(l-x)}}{\sqrt{x(l-\xi)} - \sqrt{\xi(l-x)}} \right|$$

и первая формула (1.8) приводит к выражению для перемещения $v(x, l)$, полученному в [2].

2. Рассмотрим полосу с боковым надрезом $0 \leq x \leq l$, выходящим на поверхность $x = 0$. ВФ в этом случае имеет вид (H — ширина полосы) [5]

$$h(x, l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{l-x}} \left[1 + m_1 \frac{l-x}{l} + m_2 \frac{(l-x)^2}{l^2} \right]$$

$$m_j = A_j + B_j \lambda^2 + C_j \lambda^6, \quad j = 1, 2; \quad 0 \leq \lambda \leq 0,5; \quad \lambda = l/H$$

$$A_1 = 0,6147, \quad B_1 = 17,1844, \quad C_1 = 8,7822$$

$$A_2 = 0,2502, \quad B_2 = 3,2889, \quad C_2 = 70,0444$$

Зададим напряжение на берегах трещины в виде полинома от x (D_k — известные функции l)

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^n D_k \left(\frac{l-x}{l} \right)^k$$

Тогда из (1.7) получается перемещение берега, которое на поверхности полосы при $x = 0$ приобретает простой вид

$$(2.1) \quad v(0, l) = \frac{4H}{\pi E'} \int_0^l (1 + m_1 + m_2) \left[\sum_{k=0}^n D_k \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{m_1}{2k+3} + \frac{m_2}{2k+5} \right) \right] d\lambda$$

В [1] приведены значения $v(0, l)$ для растяжения и изгиба полосы. Полагая $D_0 = \sigma_0$, $D_k = 0$ при $k > 0$ (растяжение) и $D_0 = \sigma_0(1 - 2\lambda)$, $D_1 = 2\sigma_0\lambda$, $D_k = 0$ при $k > 1$ (изгиб), получаем по (2.1) значения для $v(0, l)$, совпадающие с [1].

3. Рассмотрим дискообразную трещину радиуса a в теле, находящемся под действием осесимметричной нагрузки. Повторяя рассуждения п. 1, получим для ВФ, КИН и перемещения берега трещины

$$h(r, a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a(a^2 - r^2)}}, \quad K(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{\sigma(r)r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$v(r, a) = \frac{4}{\pi E'} \int_r^a \left[\frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^t \frac{\sigma(\xi)\xi d\xi}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} \right] dt =$$

$$= \frac{4}{\pi E'} \left\{ \int_0^r \left[\sigma(\xi)\xi \int_r^a \frac{dt}{\Delta} \right] d\xi + \int_r^a \left[\sigma(\xi)\xi \int_\xi^a \frac{dt}{\Delta} \right] d\xi \right\}$$

$$(\Delta = [(t^2 - r^2)(t^2 - \xi^2)]^{1/2})$$

Заметим, что последняя формула может быть преобразована к приведенной в [2], если сделать замену переменной во внутренних интегралах $t = \xi/\sin \alpha$ и затем переставить пределы интегрирования.

Используя эллиптический интеграл первого рода, приведем $v(r, a)$ в виду

$$v(r, a) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^a \sigma(\xi) \frac{\xi}{M} \left[F\left(\frac{m}{M}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{m}{M}, \arcsin \frac{M}{a}\right) \right] d\xi$$

$$m = \min(\xi, r), \quad M = \max(\xi, r)$$

В частности, для центра берега трещины

$$(3.1) \quad v(0, a) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^a \sigma(\xi) \arccos \frac{\xi}{a} d\xi$$

Используя результаты [3], можно показать, что формула (3.1) обобщается и на случай неосесимметричной нагрузки, т. е. $\sigma = \sigma(r, \theta)$. Тогда в (3.1) функция $\sigma(\xi)$ заменяется на

$$\sigma_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\xi, \theta) d\theta$$

4. Перейдем к рассмотрению внутренней трещины, ограниченной эллипсом L с центром в начале координат и полуосями a_x, a_y ($a_x < a_y$). К берегам трещины приложены напряжения $\sigma_z(x, y)$. Предположим, что $\sigma_z(x, y)$ — четная функция x и y . Следуя [6], используем среднеквадратичные значения КИН на краю трещины, полагая

$$\bar{K}_{x,y}^2 = \frac{1}{\delta A_{x,y}} K^2 dA, \quad \delta A_{x,y} = \pi a_{y,x} \delta a_{x,y}$$

причем \bar{K}_x и \bar{K}_y обусловлены изменением параметров соответственно a_x и a_y .

ВФ, соответствующие параметрам a_x и a_y , определяются по формулам [6]

$$(4.1) \quad h_{x,y}(x, y, a_x, a_y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a_{y,x}}{E'} \frac{\partial W}{\partial a_{x,y}} \right)^{-1/2} \frac{\partial v(x, y, a_x, a_y)}{\partial a_{x,y}}$$

и не зависят от нагрузки. Для \bar{K}_x, \bar{K}_y имеют место формулы (A — поверхность эллипса)

$$(4.2) \quad \bar{K}_{x,y}(a_x, a_y) = 2 \iint_A h_{x,y}(\xi, \eta, a_x, a_y) \sigma_z(\xi, \eta) dA$$

$$(4.3) \quad \bar{K}_{x,y}^2 = \frac{E'}{\pi a_{y,x}} \frac{\partial W}{\partial a_{x,y}}$$

Используя соотношения (4.1) и (4.3), выразим $dv/\partial a_x$ и $dv/\partial a_y$ через $\bar{K}_x, \bar{K}_y, h_x$ и h_y . Затем проинтегрируем полученные выражения соответственно по a_x и a_y , потребовав выполнения условия $v|_L = 0$. Будем иметь

$$(4.4) \quad v(x, y, a_x, a_y) = \frac{2\pi a_y}{E'} \int_{b_y(x,y)}^{a_x} \bar{K}_x(t, a_y) h_x(x, y, t, a_y) dt$$

либо

$$(4.5) \quad v(x, y, a_x, a_y) = \frac{2\pi a_x}{E'} \int_{b_x(y,x)}^{a_y} \bar{K}_y(a_x, t) h_y(x, y, a_x, t) dt$$

$$b_{x,y}(x, y) = |x| [1 - (y/a_{x,y})^2]^{-1/2}$$

где \bar{K}_x, \bar{K}_y вычисляются по формулам (4.2).

ВФ h_x и h_y получены в [6] и преобразованы к удобному для вычислений виду [7] (в выражении для h_y [7] следует исправить опечатку: в последнем слагаемом переставить местами числитель и знаменатель).

Выражения (4.4) и (4.5) дают одну и ту же величину $v(x, y, a_x, a_y)$. Однако все приведенные выше формулы получены в предположении $a_x < a_y$, поэтому нижний предел в правой части (4.5) должен удовлетворять условию $a_x < b_x(y, x)$, или $x^2 + y^2 > a_x^2$, т. е. формулу (4.5) можно использовать, если точка x, y лежит вне круга радиуса a_x .

5. Рассмотрим поверхностную трещину в виде полуэллипса, плоскость которого перпендикулярна поверхности пластины толщиной H . Предположим, что под действием нагрузки центр эллипса не смещается и контур трещины остается полуэллиптическим, т. е. изменяются только величины полуосей a_x и a_y . Соответствующие параметру a_x значения \bar{K}_x^* и h_x^* связаны соотношением (A^* — поверхность полуэллипса)

$$(5.1) \quad \bar{K}_x^*(a_x, a_y) = 4 \iint_{A^*} h_x^*(\xi, \eta, a_x, a_y) \sigma_z(\xi, \eta) dA$$

ВФ h_x^* получается домножением h_x на поправочную функцию [6, 7]. Следует при этом иметь в виду, что поправочная функция, введенная в данной работе, отличается от введенной в [7] множителем 2.

Приведем формулу для раскрытия трещины в ее центре $\delta = 2v(0, 0, a_x, a_y)$, вычисленную по формуле (4.4) с использованием выражения для поправочной функции f_n [6, 7]

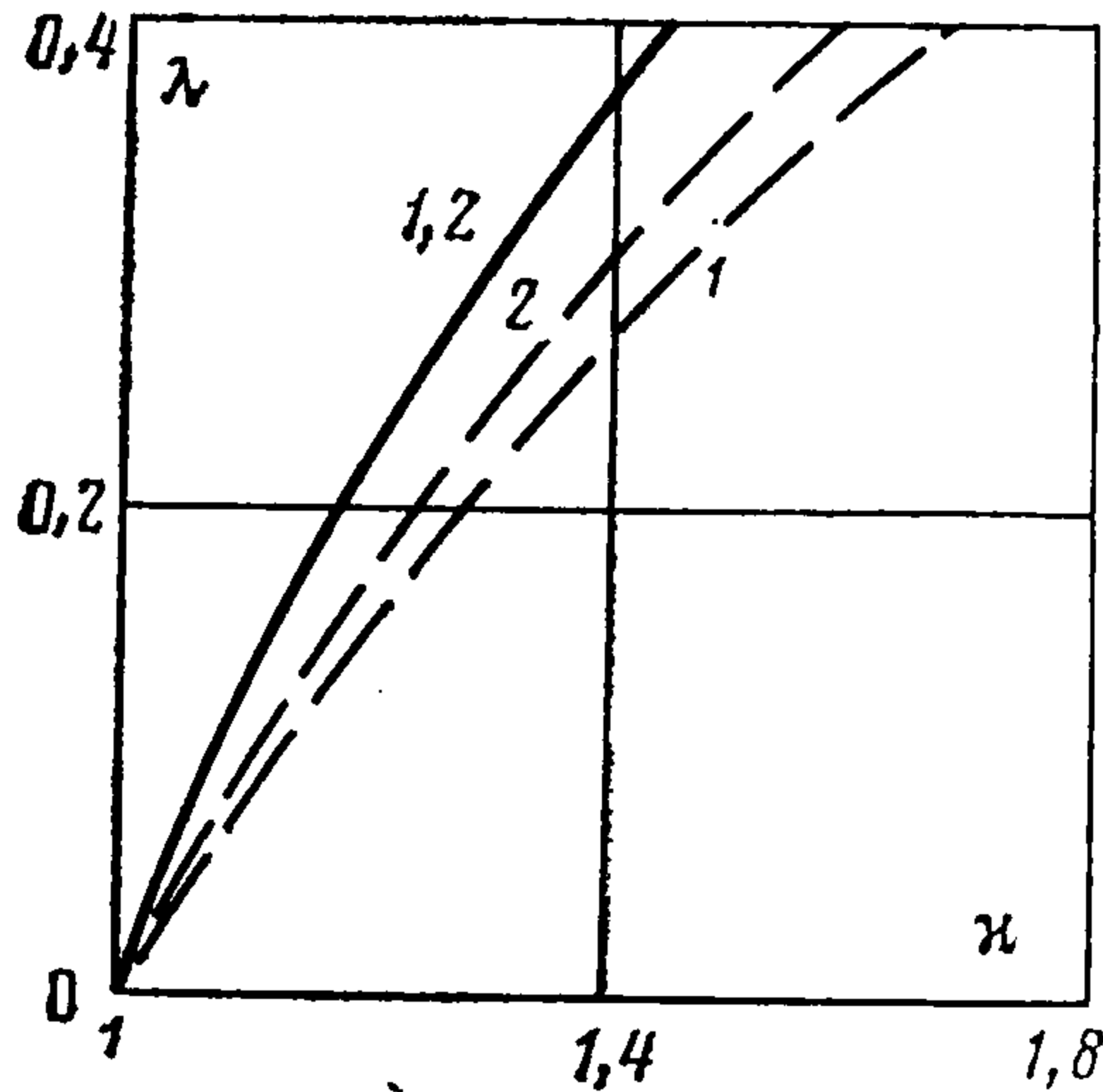
$$(5.2) \quad \delta = \frac{24}{\pi E' a_y} \int_0^{a_x} \left\{ \frac{D(k) f_n(0, t/H)}{t E^2(k) [E(k) + D(k)]} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{a_y} d\eta \int_0^{t_0(\eta)} \left[D(k) + \frac{E(k) \xi^2}{t^2 \alpha} \right] \sqrt{\alpha} f_n(x_s, r) \sigma_z(\xi, \eta) d\xi \right\} dt$$

$$D(k) = E(k) - [F(k) - E(k)] \frac{t^2}{k^2 a_y^2}, \quad k^2 = 1 - \left(\frac{t}{a_y}\right)^2$$

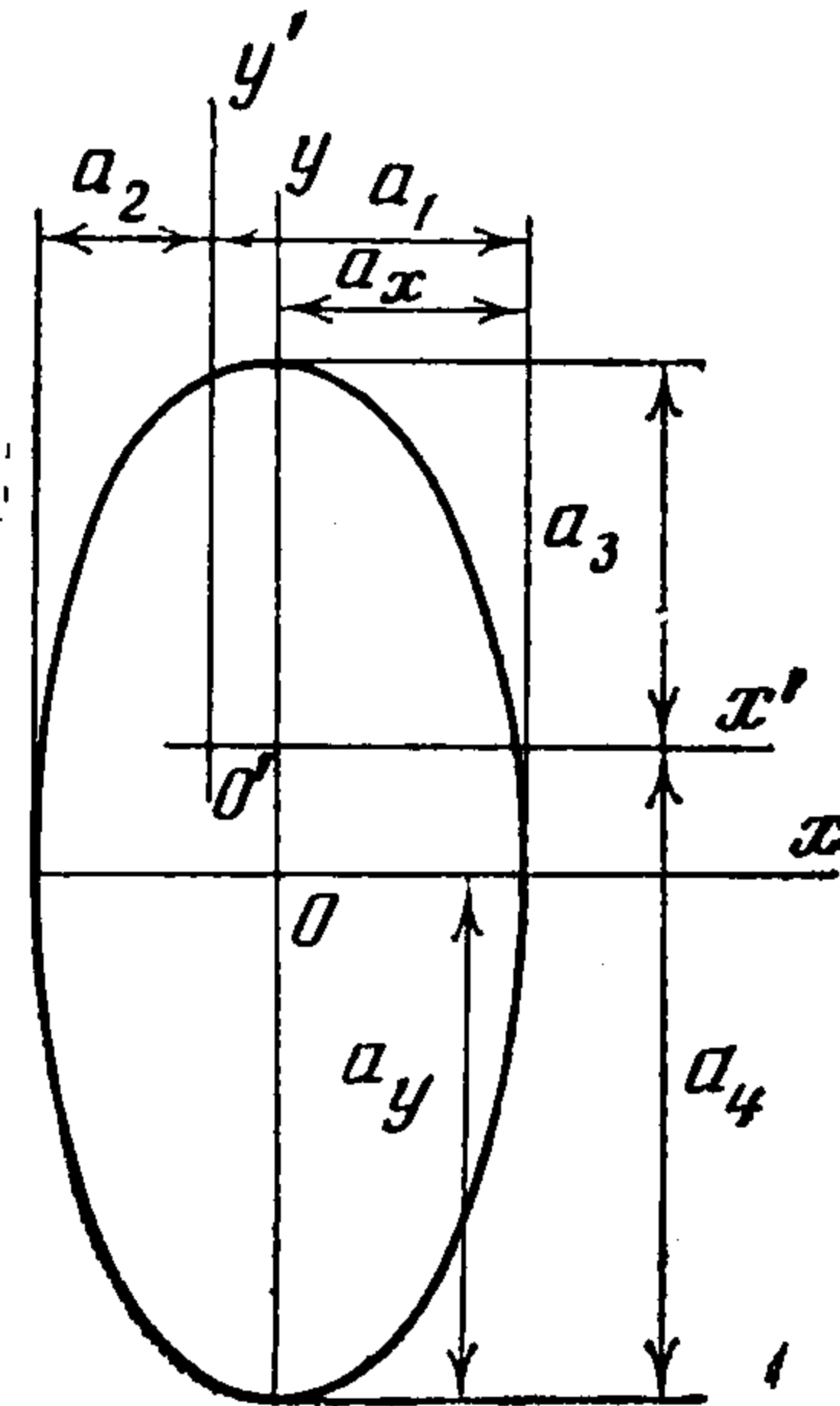
$$\alpha = \zeta^2(\eta) - \left(\frac{\xi}{t}\right)^2, \quad x_s = \frac{\xi}{t\zeta(\eta)}, \quad r = \frac{t\zeta(\eta)}{H}$$

$$\zeta(\eta) = \left[1 - \left(\frac{\eta}{a_y}\right)^2\right]^{1/2}$$

Раскрытие трещины было вычислено по формуле (5.2) для случаев растяжения и изгиба пластины. Полученные результаты сопоставлены с раскрытием δ^* сквозной в направлении оси y трещины, вычисленным по данным [1] (или по формуле (2.1)). На фиг. 1 представлена зависимость



Фиг. 1



Фиг. 2

между $\lambda = a_x/(2a_y)$ и параметром $\kappa = \delta^*/\delta$, характеризующим влияние формы трещины на ее раскрытие при заданной глубине a_x , для $H/a_x = 3$ (штриховая линия) и $H/a_x = 100$ (сплошная линия) при двух видах напряженного состояния (1 — растяжение, 2 — изгиб). С использованием фиг. 1 раскрытие полуэллиптической трещины с параметрами a_x и a_y может быть получено делением раскрытия сквозной трещины глубиной a_x на соответствующий параметр формы κ . Отметим, что относительные размеры трещины и толщины пластины существенно отражаются на величине κ .

6. В п. 4 получены формулы для раскрытия эллиптической трещины, когда $\sigma_z(x, y)$ — четная функция, т. е. в случае, когда под действием нагрузки центр эллипса не смещается. Если это условие не выполнено, то, следуя [6], необходимо рассмотреть трещину, характеризуемую четырьмя параметрами a_1, a_2, a_3, a_4 (фиг. 2).

ВФ соответствующие параметрам a_1, a_2 , имеют вид

$$h_{1,2} = h_x \pm \left[\frac{3a_x}{E(k) + D(k)} \right]^{1/2} \frac{x}{\pi a_x^2 a_y \sqrt{\alpha}}$$

$$a_x = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad a_y = \frac{a_3 + a_4}{2}, \quad x = x' - \frac{a_1 - a_2}{2}, \quad y = y' - \frac{a_3 - a_4}{2}$$

КИН записываются так:

$$\bar{K}_{1,2} = 2 \iint_A h_{1,2}(x', y', a_1, a_2, a_3, a_4) \sigma_z(x', y') dA$$

и перемещение берега трещины

$$v = \frac{2\pi a_y}{E'} \int_{b_1^+}^{a_1} \bar{K}_1(t, a_2, a_3, a_4) h_1(x', y', t, a_2, a_3, a_4) dt, \quad x' \geq \frac{a_1 - a_2}{2}$$

$$v = \frac{2\pi a x}{E'} \int_{-a_2}^{b_1} \bar{K}_2(a_1, t, a_3, a_4) h_2(x', y', a_1, t, a_3, a_4) dt, \quad x' \leq \frac{a_1 - a_2}{2}$$

$$b_{j\pm} = [2x' \pm a_j (1 - \zeta(y))] (1 + \zeta(y))^{-1}, \quad j = 1, 2$$

Очевидно, что величина v , найденная при помощи ВФ h_3, h_4 , соответствующих параметрам a_3, a_4 , совпадает с приведенной выше.

Численные расчеты проводились Э. А. Березиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The stress analysis of crack handbook. Hellen-town: Providence, Del Res. Corp., 1973. 403 p.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
3. Слепьян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
4. Rice J. R. Some remarks on elastic crack-tip stress fields.— Intern. J. Solids and Struct., 1972, v. 8, No. 6, p. 751—758.
5. Bueckner H. F. Weight functions for the notched bar.— Z. angew. Math. und Mech., 1974, V. 51, H. 2, S. 97—109.
6. Besuner P. M. The influence function method for fracture mechanics and residual fatigue life analysis of cracked components under complex stress fields.— Nucl. Engng. and Design, 1977, v. 43, No. 1, p. 115—154.
7. Новожилов В. В., Рыбакина О. Г. Исследование распространения поверхностных трещин при циклических нагружениях.— В кн.: Механическая усталость металлов. Киев: Наук. думка, 1983, с. 231—239.

Ленинград

Поступила в редакцию
2.IX.1985