УДК 539.375

ТРЕЩИНЫ С ПЛАВНО СМЫКАЮЩИМИСЯ БЕРЕГАМИ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Мовчан А. Б., Морозов Н. Ф., Назаров С. А.

При помощи асимптотических методов вычисляются коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах тонкого разреза с плавно смыкающимися берегами, определяется асимптотика потенциальной энергии.

Среди различных математических моделей, изображающих реальные трещины, модель «трещина — разрез» представляет особый интерес в связи с наибольшей простотой математического аппарата, используемого при ее изучении. Однако в такой модели не отражаются некоторые свойства реальных трещин, прежде всего в ее рамках трещина не реагирует на нагружение в направлении разреза. Случай тонкого выреза с плавным смыканием берегов, сохраняя простоту разреза, обеспечивает большее соответствие реальности. [1]) Ниже основное внимание уделяется выяснению степени чувствительности таких трещин к нагружению вдоль разреза.

1. Постановка задачи и предварительные сведения. Пусть Ω — область на плоскости $\mathbf{R}^2$, содержащая отрезок $M = \{x\colon x_2 = 0,\ |x_1| \leqslant a\}$, $h_\pm(x_1) = ah_\pm{}^\circ(x_1)$; $h_\pm{}^\circ$ — гладкие на $[-a, a]$ функции, такие, что $h_\pm{}^\circ(a) = h_\pm{}^\circ(-a) = h_\pm{}^{\circ\prime}(a) = h_\pm{}^{\circ\prime}(-a) = 0$. Введем зависящие от малого положительного безразмерного параметра ε области $G_\varepsilon = \{x\colon |x_1| < a, -\varepsilon h_-(x_1) < x_2 < \varepsilon h_+(x_1)\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus G_\varepsilon$. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости

$$\mu\Delta\mathbf{u}(x, \varepsilon) + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(x, \varepsilon) = 0 \ \text{ в } \Omega_\varepsilon \tag{1.1}$$

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; x, \varepsilon) = \mathbf{p}^\pm(x_1, \varepsilon) \ \text{ на } \gamma_\varepsilon^\pm = \{x \in \partial G_\varepsilon\colon \pm x_2 > 0\} \tag{1.2}$$

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; x, \varepsilon) = \mathbf{p}(x) \ \text{ на } \partial\Omega \tag{1.3}$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}^\pm$ — гладкие нагрузки, $\mathbf{u}$ — вектор смещений, σ — тензор напряжений, λ, μ — постоянные Ламе, $n = (n_1, n_2)$ — внешняя нормаль для области Ω_ε.

Задачи о влиянии поперечного размера трещины давно привлекают внимание авторов. В работах [2, 3] (см. также [1]) показано, что в подобных вопросах целесообразно применять асимптотические методы, и изучено напряженно-деформированное состояние вблизи тонкого выреза с гладкой границей. В этом случае в окрестности концов выреза появляется пограничный слой, описываемый при помощи решения задачи во внешности параболы. Математическое исследование указанных задач продолжено в [4].

В настоящей статье также используются разложения в ряды по малому параметру ε. Однако, в отличие от упомянутых работ, ограничения на геометрию границы вблизи вершин трещины таковы, что погранслой вызывает незначительное (равномерно экспоненциально по ε малое) возмущение (см. [5]). Вдали от концов трещины возникает степенной ряд по ε следовательно экспоненциально малыми членами следует пренебречь. Таким образом, ниже основное внимание уделяется изучению влияния искривленности срединной части берегов трещины на напряженно-деформированное состояние.

Предположим, что внешняя нагрузка самоуравновешена, т. е.

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,ds = -\sum_{\pm} \int_{\gamma_\varepsilon^\pm} \mathbf{p}^\pm(\varepsilon, x_1)\,ds$$

[1]) На необходимость исследования таких задач указывалось в [1].

Поскольку элемент ds длины дуги равен $\pm(1+\varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2)^{1/2}dx_1$ на $\gamma_\varepsilon^\pm$, то последнее равенство принимает вид

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,ds = -\sum_{\pm}\int_{-a}^{a} \mathbf{p}^\pm(\varepsilon, x_1)(1+\varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2)^{1/2}\,dx_1$$

Поэтому будем считать, что в (1.2) $\mathbf{p}^\pm(\varepsilon, x_1) = (1+\varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2)^{-1/2}\mathbf{q}^\pm(x_1)$. Ясно, что

$$\mathbf{p}^\pm(\varepsilon, x_1) = \mathbf{q}^\pm(x_1) - {}^1/_2\varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2\mathbf{q}^\pm(x_1) + O(\varepsilon^4)$$

Положим $\varepsilon = 0$. Тогда область Ω_ε трансформируется в область $\Omega_0 = \Omega\setminus M$ с трещиной M, а краевая задача (1.1)—(1.3) перейдет в следующую:

(1.4) $$\mu\Delta\mathbf{u}^\circ(x) + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^\circ(x) = 0 \text{ в } \Omega_0$$

(1.5) $$\sigma_{2j}(\mathbf{u}^\circ, x_1, \pm 0) = \mp q_j^\pm,\ j=1,2 \text{ при } |x_1|<a$$

(1.6) $$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}^{(0)}; x) = \mathbf{p}(x) \text{ на } \partial\Omega$$

Известно (см., например, [6, 7]), что решение $\mathbf{u}^\circ$ задачи (1.4)—(1.6) допускает вблизи вершин $O_\pm = (\pm a, 0)$ трещины M асимптотические представления

(1.7) $$u_r^\pm(r,\theta_\pm) = C_1^\pm\cos\theta_\pm + C_2^\pm\sin\theta_\pm + \frac{1}{4\mu}\left(\frac{r_\pm}{2\pi}\right)^{1/2}\left\{\left[(2\varkappa-1)\cos\frac{\theta_\pm}{2} - \cos\frac{3\theta_\pm}{2}\right]K^\pm_{(1,0)} - \left[(2\varkappa-1)\sin\frac{\theta_\pm}{2} - 3\sin\frac{3\theta_\pm}{2}\right]K^\pm_{(2,0)}\right\} + O(r)$$

$$u_\theta^\pm(r,\theta_\pm) = -C_1^\pm\sin\theta_\pm + C_2^\pm\cos\theta_\pm + \frac{1}{4\mu}\left(\frac{r_\pm}{2\pi}\right)^{1/2}\left\{\left[-(2\varkappa+1)\sin\frac{\theta_\pm}{2} + \sin\frac{3\theta_\pm}{2}\right]K^\pm_{(1,0)} - \left[(2\varkappa+1)\cos\frac{\theta_\pm}{2} - 3\cos\frac{3\theta_\pm}{2}\right]K^\pm_{(2,0)}\right\} + O(r);\quad \varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$$

($(r_\pm, \theta_\pm)$ — полярные координаты с центрами $O_\pm$ и полярными осями, направленными по отрезку M, $C_j^\pm$ — жесткие смещения точек $O_\pm$, $K^\pm_{(j,0)}$ — коэффициенты интенсивности напряжений). Из результатов [6, 8, 9] вытекает, что коэффициенты $K^\pm_{(j,0)}$ вычисляются по формулам

(1.8) $$K^\pm_{(j,0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\left\{\int_{\partial\Omega}\mathbf{p}(x)\zeta^{(j,\pm)}(x)\,ds + \sum_\pm\int_{-a}^{a}\mathbf{q}^\pm(x_1)\zeta^{(j,\pm)}(x_1,\pm 0)\,dx_1\right\}$$

где $\zeta^{(j,\pm)}$ — неэнергетические решения однородной ($\mathbf{q}^\pm\equiv 0$, $\mathbf{p}\equiv 0$) задачи (1.4)—(1.6), ограниченные всюду в $\overline{\Omega}_0\setminus\{O_\pm\}$ и имеющие вблизи $O_\pm$ асимптотику

(1.9) $$\zeta^{(1,\pm)}(r,\theta) = (2\pi r_\pm)^{-1/2}[2(1+\varkappa)]^{-1}\left((2\varkappa+1)\cos\frac{3\theta_\pm}{2} - 3\cos\frac{\theta_\pm}{2},\ 3\sin\frac{\theta_\pm}{2} - (2\varkappa-1)\sin\frac{3\theta_\pm}{2}\right) + O(1)$$

(1.10) $$\zeta^{(2,\pm)}(r,\theta) = (2\pi r_\pm)^{-1/2}[2(1+\varkappa)]^{-1}\left((2\varkappa+1)\sin\frac{3\theta_\pm}{2} - \sin\frac{\theta_\pm}{2},\ (2\varkappa-1)\cos\frac{3\theta_\pm}{2} - \cos\frac{\theta_\pm}{2}\right) + O(1)$$

2. Асимптотика коэффициентов интенсивности. Поскольку функции $h_\pm$ гладкие и обращаются в нуль на концах отрезка $[-a, a]$ вместе со своими производными, то решение задачи (1.1)—(1.3) допускает вблизи точек $O_\pm$ представление (1.7) (см. [7]). Найдем асимптотику коэффициентов $K_j^\pm(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Следуя [10—12], асимптотическое разложение решения краевой задачи (1.1)—(1.3) будем искать в виде

$$\mathbf{u}(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{u}^{(k)}(x) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}^{(k)}$ — решения задач вида (1.4)—(1.6) в области Ω_0 с некоторыми правыми частями. Отметим, что в силу приведенных ограничений на функции $h_\pm$ задачу (1.1)—(1.3) следует интерпретировать как задачу в области с регулярно возмущенной границей.

Рассмотрим верхний и нижний берега $\gamma_\varepsilon^\pm$ щели G_ε. Единичный вектор внутренней (по отношению к G_ε) нормали к $\gamma_\varepsilon^\pm$ имеет вид

$$\mathbf{n}(x_1, \varepsilon) = (1 + \varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2)^{-1/2} (\varepsilon h_\pm'(x_1), \mp 1)$$

Поэтому

$$n_1(x_1, \varepsilon) = \varepsilon h_\pm'(x_1) + O(\varepsilon^3), \quad n_2(x_1, \varepsilon) = \mp (1 - {}^1/_2 \varepsilon^2 h_\pm'(x_1)^2) + O(\varepsilon^4)$$

и, следовательно, при $x_2 = \pm \varepsilon h_\pm(x_1)$

$$\begin{aligned} \sigma_j^{(n)}(u; x) &= n_1(x_1, \varepsilon)\sigma_{1j}(u; x) + n_2(x_1, \varepsilon)\sigma_{2j}(u; x) = \\ &= \mp\sigma_{2j}(u; x) + \varepsilon h_\pm'(x_1)\sigma_{1j}(u; x) \pm {}^1/_2 \varepsilon^2 h_\pm(x_1)^2 \sigma_{2j}(u; x) + \\ &+ O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Применяя формулу Маклорена

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(u; x_1, \pm\varepsilon h_\pm(x_1)) &= \sigma_{ij}(u; x_1, \pm 0) \pm \varepsilon h_\pm(x_1) \times \\ &\times \sigma_{ij,2}(u; x_1, \pm 0) + {}^1/_2 \varepsilon^2 h_\pm(x_1)^2 \sigma_{ij,22}(u; x_1, \pm 0) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

(индекс k после запятой означает дифференцирование по x_k), приводим правую часть соотношения (2.2) к виду

$$\begin{aligned} \sigma_j^{(n)}(u; x_1, \pm\varepsilon h_\pm(x_1)) &= \mp\sigma_{2j}(u; x_1, \pm 0) + \\ &+ \varepsilon \{h_\pm'(x_1)\sigma_{1j}(u; x_1, \pm 0) - h_\pm(x_1)\sigma_{2j,2}(u; x_1, \pm 0)\} \mp \\ &\mp {}^1/_2 \varepsilon^2 \{h_\pm(x_1)^2 \sigma_{2j,22}(u; x_1, \pm 0) - 2h_\pm(x_1) h_\pm'(x_1) \times \\ &\times \sigma_{1j,2}(u; x_1, \pm 0) - h_\pm'(x_1)^2 \sigma_{2j}(u; x_1, \pm 0)\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Совмещая разложения (2.1) решения задачи (1.1)—(1.3) с формулами (2.3), находим, что вектор $\mathbf{u}^{(0)}$ — решение задачи (1.4)—(1.6), а вектор $\mathbf{u}^{(1)}$ удовлетворяет уравнениям (1.4) и граничным условиям

$$\sigma^{(n)}(u^{(1)}; x) = 0 \text{ на } \partial\Omega \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2j}(u^{(1)}, x_1, \pm 0) &= \pm h_\pm'(x_1)\sigma_{1j}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) \mp \\ &\mp h_\pm(x_1)\sigma_{2j,2}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) \text{ при } |x_1| < a \end{aligned} \tag{2.5}$$

В силу уравнений равновесия равенство (2.5) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{2j}(u^{(1)}; x_1, \pm 0) &= \pm (h_\pm \sigma_{1j,1}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) + \\ &+ h_\pm'(x_1)\sigma_{1j}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)) = \\ &= \pm \frac{\partial}{\partial x_1}(h_\pm(x_1)\sigma_{1j}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)) \quad \text{при } |x_1| < a \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $h_\pm(x_1) = O(r_\pm^2)$ при $r_\pm \to 0$, то согласно (1.7) получаем, что правая часть (2.6) есть $O(r_\pm^{1/2})$ при $r_\pm \to 0$. Значит (см. [7]), поле смещений $\mathbf{u}^{(1)}$, удовлетворяющее (2.4), (2.6), допускает представление типа (1.7), коэффициенты в котором будем обозначать $K_{(j,1)}^\pm$. При этом из формул (1.8) для коэффициентов интенсивности выводим

$$K^{+}_{(j,1)} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \times$$
$$\times \sum_{\pm} \int_{-a}^{a} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_{\pm}(x_1)\,\sigma^{(1)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0))\,\zeta^{(+,j)}(x_1, \pm 0)\,dx_1 =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \sum_{\pm} \int_{-a}^{a} h_{\pm}(x_1)\,\sigma^{(1)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\frac{\partial \zeta^{(+,j)}}{\partial x_1}(x_1, \pm 0)\,dx_1$$
$$\sigma^{(j)} = (\sigma_{1j}, \ \sigma_{2j})$$

Аналогичная формула справедлива и для $K^{-}_{(j,1)}$.

Определим следующий член асимптотики. Учитывая в (2.1) и (2.3) члены $O(\varepsilon^2)$ (в том числе и слагаемое $-\varepsilon^2 h_{\pm}'(x_1)^2 \mathbf{q}^{\pm}(x_1)/2$ в представлении правых частей $\mathbf{p}^{\pm}$ краевых условий (1.2)), находим, что $\mathbf{u}^{(2)}$ следует подчинить уравнениям (1.4) с граничными условиями (2.4) и

(2.7)
$$\sigma_{2j}(u^{(2)}; x_1, \pm 0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{1}{2} h_{\pm}(x_1)^2\,\sigma_{1j,2}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) \pm$$
$$\pm h_{\pm}(x_1)\,\sigma_{1j}(u^{(1)}; x_1, \pm 0)\Big) + {}^1\!/_2\, h_{\pm}'(x_1)^2\,\sigma_{2j}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) \pm$$
$$\pm {}^1\!/_2\, h_{\pm}'(x_1)^2\, q_j^{\pm}(x_1) \quad \text{при } |x_1| < a$$

Правая часть равенства (2.7) есть $O(r_{\pm}^{1/2})$ при $r_{\pm} \to 0$ и для поля смещений $\mathbf{u}^{(2)}$ справедливы формулы (1.7) с коэффициентами $K^{\pm}_{(j,2)}$.

Процедуру построения коэффициентов асимптотического ряда можно продолжить. Оправдание полученного представления решения задачи (1.1) — (1.3) проводится стандартным методом (см., например, [10—12]). Следствием такого представления являются асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений

(2.8)
$$K_j^{\pm}(\varepsilon) = K^{\pm}_{(j,0)} + \varepsilon K^{\pm}_{(j,1)} + \varepsilon^2 K^{\pm}_{(j,2)} + O(\varepsilon^3)$$

3. Асимптотика потенциальной энергии. Рассмотрим функционал потенциальной энергии

(3.1)
$$\Pi(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,\mathbf{u}(\varepsilon, x)\,ds - \frac{1}{2}\sum_{\pm}\int_{\gamma_\varepsilon^{\pm}} \mathbf{p}^{\pm}(\varepsilon, x_1)\,\mathbf{u}(\varepsilon, x)\,ds$$

отвечающий задаче (1.1)—(1.3), и найдем его асимптотику при $\varepsilon \to 0$. Согласно представлению нагрузки $\mathbf{p}^{\pm}$, указанному в п. 1, имеем

(3.2)
$$\Pi(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,\mathbf{u}(\varepsilon, x)\,ds -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\pm}\int_{-a}^{a} \mathbf{q}^{\pm}(x_1)\,\mathbf{u}(\varepsilon, x_1, \pm\varepsilon h_{\pm}(x_1))\,dx_1$$

В силу асимптотической формулы (2.1) для смещений находим

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,\mathbf{u}(\varepsilon, x)\,ds = \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,\mathbf{u}^{(j)}(x)\,ds + O(\varepsilon^3)$$

Так как $\mathbf{p}(x) = \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(u^{(0)}; x)$, $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(u^{(j)}, x) = 0$ при $j = 1, 2$ на $\partial\Omega$, то по формуле Бетти получаем равенства

(3.3)
$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,\mathbf{u}^{(j)}(x)\,ds = \int_{\partial\Omega} \{\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(u^{(0)}; x)\,\mathbf{u}^{(j)}(x) -$$
$$-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(u^{(j)}; x)\,\mathbf{u}^{(0)}(x)\}\,ds =$$

$$= \sum_{\pm} \pm \int_{-a}^{a} \{\sigma^{(2)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\mathbf{u}^{(j)}(x_1, \pm 0) -$$

$$- \sigma^{(2)}(u^{(j)}; x_1, \pm 0)\,\mathbf{u}^{(0)}(x_1, \pm 0)\}\, dx_1, \quad j = 1, 2$$

Далее, для интегралов по $M_{\pm}$ справа в (3.2) имеем

$$\int_{-a}^{a} \mathbf{q}^{\pm}(x_1)\,\mathbf{u}(\varepsilon, x_1, \pm \varepsilon h_{\pm}(x_1))\, dx_1 = \tag{3.4}$$

$$= \int_{-a}^{a} \mathbf{q}^{\pm}(x_1) \Big\{ \mathbf{u}^{(0)}(x_1, \pm 0) + \varepsilon \Big[\mathbf{u}^{(1)}(x_1, \pm 0) \pm$$

$$\pm h_{\pm}(x_1) \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \Big] + \varepsilon^2 \Big[\mathbf{u}^{(2)}(x_1, \pm 0) \pm$$

$$\pm h_{\pm}(x_1) \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) + \frac{1}{2} h_{\pm}(x_1)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0) \Big] \Big\} dx_1 + O(\varepsilon^3)$$

Складывая представления (3.3) и (3.4), выводим из (3.2) следующую формулу:

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi_0 + \varepsilon \Pi_1 + \varepsilon^2 \Pi_2 + O(\varepsilon^3), \tag{3.5}$$

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x)\,\mathbf{u}^{(0)}(x)\, ds - \frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-a}^{a} \mathbf{q}^{\pm}(x_1)\,\mathbf{u}^{(0)}(x_1, \pm 0)\, dx_1$$

где Π_0 — потенциальная энергия, отвечающая задаче (1.4)—(1.6). Собирая в правых частях равенств (3.3) и (3.4) коэффициенты при ε, находим

$$\Pi_1 = -\frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-a}^{a} \Big\{ \mp \sigma^{(2)}(u^{(1)}; x_1, \pm 0)\,\mathbf{u}^{(0)}(x_1, \pm 0) \pm \tag{3.6}$$

$$\pm \mathbf{q}^{\pm}(x_1) h_{\pm}(x_1) \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \Big\} dx_1$$

Преобразуем выражение (3.6), используя соотношения (2.6) и (1.5). Имеем

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-a}^{a} \Big[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_{\pm}(x_1)\,\sigma^{(1)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\mathbf{u}^{(0)}(x_1, \pm 0) + \tag{3.7}$$

$$+ h_{\pm}(x_1)\,\sigma^{(2)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \Big] dx_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-a}^{a} h_{\pm}(x_1) \Big\{ \sigma^{(1)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) -$$

$$- \sigma^{(2)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \Big\} dx_1$$

Вычислим разность $R_{\pm}(u^{(0)}; x_1)$ из (3.7), выделенную в фигурные скобки. Имеем

$$R = (2\mu u^{(0)}_{1,1} + \lambda(u^{(0)}_{1,1} + u^{(0)}_{2,2}))\,u^{(0)}_{1,1} + \mu(u^{(0)}_{1,2} + u^{(0)}_{2,1})\,u^{(0)}_{2,1} -$$

$$- \mu(u^{(0)}_{1,2} + u^{(0)}_{2,1})\,u^{(0)}_{1,2} - (2\mu u^{(0)}_{2,2} + \lambda(u^{(0)}_{1,1} + u^{(0)}_{2,2}))\,u^{(0)}_{2,2} =$$

$$= (2\mu + \lambda)(u^{(0)2}_{1,1} - u^{(0)2}_{2,2}) + \mu(u^{(0)2}_{2,1} - u^{(0)2}_{1,2})$$

Таким образом

$$\Pi_1 = -\frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-a}^{a} h_{\pm}(x_1)\{(2\mu + \lambda)[u^{(0)}_{1,1}(x_1, \pm 0)^2 - u^{(0)}_{2,2}(x_1, \pm 0)^2] + \tag{3.8}$$

$$+ \mu[u^{(0)}_{2,1}(x_1, \pm 0)^2 - u^{(0)}_{1,2}(x_1, \pm 0)^2]\}\, dx_1$$

Аналогично, собирая в (3.3), (3.4) коэффициенты при ε^2, с учетом (1.5), (2.7) получаем

$$\Pi_2 = -\frac{1}{2}\sum_{\pm}\int_{-a}^{a}\Big\{\mp \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(u^{(2)}; x_1, \pm 0)\,\mathbf{u}^{(0)}(x_1, \pm 0) \pm$$
$$\pm h_{\pm}(x_1)\,\mathbf{q}^{\pm}(x_1)\,\frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\pm}(x_1)\,h_{\pm}(x_1)^2\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0)\Big\}\,dx_1 =$$
$$= \sum_{\pm}\int_{-a}^{a}\Big\{\mp\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(h_{\pm}(x_1)^2\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial x_2}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) +$$
$$+ h_{\pm}(x_1)\,\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(u^{(1)}; x_1, \pm 0)\Big)\,\mathbf{u}^{(0)}(x_1, \pm 0) -$$
$$- h_{\pm}(x_1)\,\boldsymbol{\sigma}^{(3)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \mp$$
$$\mp\frac{1}{2}\,h_{\pm}(x_1)^2\,\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0)\Big\}\,dx_1$$

или после интегрирования по частям

$$\Pi_2 = -\frac{1}{2}\sum_{\pm}\int_{-a}^{a}\Big\{h_{\pm}(x_1)\Big[\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(u^{(1)}; x_1, \pm 0)\,\frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) -$$
$$- \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \pm$$
$$\pm\frac{1}{2}\,h_{\pm}(x_1)^2\Big[\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial x_2}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) -$$
$$- \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_2^2}(x_1, \pm 0)\Big]\Big\}\,dx_1$$

Рассмотрим, наконец, выражение (3.7) в случае свободных берегов щели G_ε, т. е. при $\mathbf{q}^{\pm} = 0$. Тогда из краевых условий (1.5) выводим равенства

$$u_{1,2}^{(0)}(x_1, \pm 0) = -u_{2,1}^{(0)}(x_1, \pm 0)$$
$$u_{2,2}^{(0)}(x_1, \pm 0) = -\lambda\,(2\mu + \lambda)^{-1}u_{1,1}^{(0)}(x_1, \pm 0)$$

Поэтому

$$\Pi_1 = -2\mu\,\frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda}\sum_{\pm}\int_{-a}^{a} h_{\pm}(x_1)\,u_{1,1}^{(0)}(x_1, \pm 0)^2\,dx_1$$

и согласно (3.5) получаем формулу

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi_0 - \frac{\varepsilon E}{2(1 - \nu^2)}\sum_{\pm}\int_{-a}^{a} h_{\pm}(x_1)\,u_{1,1}^{(0)}(x_1, \pm 0)^2\,dx_1 + O(\varepsilon^2) \tag{3.9}$$

где ν и E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга.

Так как $4\mu\,(\mu + \lambda)(2\mu + \lambda)^{-1}u_{1,1}^{(0)} = \sigma_{11}(u^{(0)})$ на берегах трещины M, то окончательно находим представление

$$\Pi(\varepsilon) = \Pi_0 - \varepsilon\,\frac{1 - \nu^2}{2E}\sum_{\pm}\int_{-a}^{a} h_{\pm}(x_1)\,\sigma_{11}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)^2\,dx_1 + O(\varepsilon^2) \tag{3.10}$$

4. Примеры. 1°. Изучим одноосное растяжение плоскости с тонкой щелью G_ε, описанной в п. 1. При этом будем считать, что берега трещины свободны, т. е. в (1.2) $\mathbf{q}^{\pm} = 0$; граничные условия (1.3) надлежит интерпретировать следующим образом:

$$\sigma_{11}(u;\ x) \to p\cos^2\beta;\quad \sigma_{12}(u;\ x) \to p\sin\beta\cos\beta$$
$$\sigma_{22}(u;\ x) \to p\sin^2\beta \text{ при } |x| \to \infty$$

где p — интенсивность нагрузки, а β — угол наклона.

Напряжения, построенные по решению $\mathbf{u}^{(0)}$ задачи (1.4)—(1.6), в рассматриваемом случае задаются формулами (см., например, [6])

$$\sigma_{11}(u^{(0)};\ x) = p\{\cos^2\beta + \sin^2\beta[\operatorname{Re}Z(z) - x_2\operatorname{Im}Z'(z)] + \cos\beta\sin\beta[2\operatorname{Im}Z(z) + x_2\operatorname{Re}Z'(z)]\} \tag{4.1}$$

$$\sigma_{22}(u^{(0)};\ x) = p\{\sin^2\beta + \sin^2\beta[\operatorname{Re}Z(z) + x_2\operatorname{Im}Z'(z)] - x_2\cos\beta\times\sin\beta\operatorname{Re}Z'(z)\}$$

$$\sigma_{21}(u^{(0)};\ x) = p\{\sin\beta\cos\beta - x_2\sin^2\beta\operatorname{Re}Z'(z) + \cos\beta\sin\beta\times[\operatorname{Re}Z(z) - x_2\operatorname{Im}Z'(z)]\}$$

$$Z(z) = z(z^2 - a^2)^{-1/2} - 1,\quad z = x_1 + ix_2$$

Подставляя (4.1) в краевые условия (2.6) для вектора $\mathbf{u}^{(1)}$, находим

$$\sigma_{22}(u^{(1)};\ x_1,\ \pm 0) = 0 \tag{4.2}$$

$$\sigma_{21}(u^{(1)}; x_1, \pm 0) = \pm p\frac{\partial}{\delta x_1}\left(h_\pm(x_1)\left\{\cos 2\beta \mp \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}x_1\right\}\right)$$

Следы на $M_\pm$ вектор-функций $\boldsymbol{\zeta}^{(j,+)}$, подчиненных соотношениям (1.9), (1.10), задаются равенствами (см. [6, 13])

$$\zeta_2^{(1,+)}(x_1, \pm 0) = \zeta_2^{(2,+)}(x_1, \pm 0) = \pm\sqrt{\frac{a + x_1}{a - x_1}}$$

$$\zeta_1^{(1,+)}(x_1, \pm 0) = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1};\qquad \zeta_2^{(2,+)}(x_1, \pm 0) = -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}$$

Тогда из (4.2) выводим

$$K^+_{(1,1)} = 0,\ K^+_{(2,1)} = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a}\left\{(h_+(x_1) - h_-(x_1))\cos 2\beta - H(x_1)\frac{x_1\sin 2\beta}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right\}\frac{a\,dx_1}{(a - x_1)\sqrt{a^2 - x_1^2}}$$

где $H(x_1) = h_+(x_1) + h_-(x_1)$ — приведенная ширина трещины. Поэтому формула (2.8) при $j = 2$ конкретизируется следующим образом:

$$K_2^+(\varepsilon) = \frac{p}{\sqrt{\pi a}}\left\{\pi a\sin\beta\cos\beta + \varepsilon\int_{-a}^{a}\left\{[h_+(x_1) - h_-(x_1)]\cos 2\beta - H(x_1)\frac{x_1\sin 2\beta}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right\}\frac{a\,dx_1}{(a - x_1)\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right\} + O(\varepsilon^3) \tag{4.3}$$

Так как $K^+_{(1.1)} = 0$, то при $j = 1$ формула (2.8) малосодержательна. Уточним ее, учитывая второй член асимптотики $\mathbf{u}$. Из (2.7) вытекает, что средние на отрезке $[-a, a]$ напряжений $\sigma_{12}(u^{(2)};\ x_1,\ \pm 0)$ равны нулю, кроме того, $\zeta_1^{(1,+)}(x_1,\ \pm 0) = \mathrm{const}$. Значит, в силу формулы (1.8) первое из граничных условий в (2.7) не вносит вклад в коэффициент $K^+_{(1,2)}$.

Преобразуем второе граничное условие. Согласно (2.7) и уравнениям равновесия, имеем

$$\sigma_{22}(u^{(2)}; x_1, \pm 0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left({}^1/_2 h(x_1)^2\sigma_{12,2}(u^{(0)}; x_1, \pm 0) + h(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}(h(x_1)\sigma_{11}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}({}^1/_2 h(x_1)^2\sigma_{11}(u^{(0)}; x_1; \pm 0))$$

Поэтому

$$K^+_{(1,2)} = \frac{1}{4\sqrt{\pi a}}\sum_\pm\int_{-a}^{a}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(h(x_1)^2\sigma_{11}(u^{(0)}; x_1, \pm 0))\times\sqrt{\frac{a + x_1}{a - x_1}}dx_1 = \frac{1}{4\sqrt{\pi a}}\sum_\pm\int_{-a}^{a}h(x_1)^2\times$$

$$\times\sigma_{11}(u^{(0)}; x_1, \pm 0)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\sqrt{\frac{a + x_1}{a - x_1}}\right)dx_1 =$$

$$= -\frac{p}{4}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-a}^{a}\left\{\sum_\pm h_\pm(x_1)^2\cos 2\beta - [h_+(x_1)^2 - h_-(x_1)^2]\sin 2\beta\frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right\}\frac{a + 2x_1}{a - x_1}\frac{dx_1}{(a^2 - x_1^2)^{3/2}}$$

Окончательно, формула (2.8) при $j = 1$ приобретает вид

$$K_1^+(\varepsilon) = p\sqrt{\frac{a}{\pi}}\left\{\pi\sin^2\beta - \frac{\varepsilon^2}{4}\int_{-a}^{a}\left\{\sum_{\pm} h_{\pm}(x_1)^2\cos 2\beta - \right.\right. \tag{4.4}$$

$$\left.\left. - [h_+(x_1)^2 - h_-(x_1)^2]\frac{x_1\sin 2\beta}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right\}\frac{a + 2x_1}{a - x_1}\frac{dx_1}{(a^2 - x_1^2)^{3/2}} + O(\varepsilon^3)\right\}$$

Обсудим полученные представления (4.3) и (4.4) коэффициентов интенсивности напряжений в задаче об одноосном нагружении плоскости с трещиной G_ε. Рассмотрим случай поперечного растяжения ($p = P > 0$, $\beta = \pi/2$) и продольного сжатия ($p = -P < 0$, $\beta = 0$). В силу (4.3) и (4.4) имеем

$$K_1^+(\varepsilon) - K_{(1,0)}^+ = \frac{P\varepsilon^2}{4}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-a}^{a}\sum_{\pm} h_{\pm}(x_1)^2\frac{a + 2x_1}{a - x_1}\frac{dx_1}{(a^2 - x_1^2)^{3/2}} + O(\varepsilon^3)$$

(в первом случае $K_{(1,0)}^+ = P\sqrt{\pi a}$, а во втором $K_{(1,0)}^+ = 0$). В обеих ситуациях коэффициент $K_2^+(\varepsilon)$ равен нулю. При продольном сжатии коэффициент $K_1^+(\varepsilon)$ не является, вообще говоря, знакопостоянным. Однако при симметричном контуре (функции $h_{\pm}(x_1)$ четны) он положителен. Более того, и при несимметричном контуре сумма $K_1^+(\varepsilon) + K_1^-(\varepsilon)$ коэффициентов интенсивности в обеих вершинах трещины больше нуля. В точности такие же утверждения имеют место и для добавки $K_1^+(\varepsilon) - K_{(1,0)}^+$ при поперечном растяжении.

2°. Рассмотрим задачу об одноосном сжатии ограниченной области Ω_ε, введенной в п. 1, в направлении, параллельном оси трещины. В этом случае в граничных условиях (1.2) и (1.3) $\mathbf{p}^{\pm} = 0$ и $\mathbf{p}(x) = -(n_1, 0)\,p$, где p — интенсивность сжимающей нагрузки. Поэтому смещения задаются формулой

$$u^\circ = p\,[4\mu(\mu + \lambda)]^{-1}(-(2\mu + \lambda)x_1, \lambda x_2) \tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в формулу (3.9) или (3.10), получаем

$$\Delta\Pi = \Pi(\varepsilon) - \Pi_0 = -\varepsilon\frac{1 - \nu^2}{2E}p^2\sum_{\pm}\int_{-a}^{a} h_{\pm}(x_1)\,dx_1 + O(\varepsilon^2) = \tag{4.6}$$

$$= -p^2\frac{(1 - \nu^2)}{2E}S_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

где S_ε — площадь трещины G_ε. Таким образом, в главном приращение потенциальной энергии при появлении в теле трещины параллельной направлению сжимающей нагрузки пропорционально площади трещины.

3°. Применим теперь результаты п. 3 к рассмотренной в примере 1° задаче об одноосном растяжении (сжатии) плоскости с трещиной G_ε. Потенциальная энергия этого тела бесконечна, поэтому, следуя работе [14], речь будем вести о приращении $\Delta\Pi$ потенциальной энергии при появлении в плоскости трещины G_ε. Для подсчета $\Delta\Pi$ воспользуемся приемом, предложенным в [15].

Пусть Q_D — область, содержащая круг с центром в начале координат и достаточно большим диаметром D. Обозначим $\mathbf{u}(D, \varepsilon, x)$ смещения, вызванные одноосным нагружением области $Q_D \setminus G_\varepsilon$; нагрузки имеют интенсивность p и направлены под углом β к оси трещины. Пусть еще $\mathbf{v}(x)$ — решение аналогичной задачи в области без трещины

$$\mathbf{v}(x) = (2\mu)^{-1}p\,((\cos^2\beta - {}^1/_2\,\lambda(\lambda + \mu)^{-1})\;x_1 + \cos\beta\sin\beta\,x_2, \tag{4.7}$$

$$x_1\cos\beta\sin\beta + (\sin^2\beta - {}^1/_2\,\lambda(\lambda + \mu)^{-1})\,x_2)$$

а $\mathbf{w}(\varepsilon, x)$ — исчезающее на бесконечности решение задачи (1.1), (1.2) в области $R^2 \setminus G_\varepsilon$ при $\mathbf{p}^{\pm}(\varepsilon, x) = (1 + \varepsilon^2 h_{\pm}'(x_1)^2)^{-1/2}q^{\pm}(\varepsilon, x)$,

где $\mathbf{q}^{\pm}(\varepsilon, x) = -p\{\varepsilon h_{\pm}'(x_1)\cos\beta \mp \sin\beta\}(\cos\beta, \sin\beta)$. Потенциальные энергии, отвечающие задачам в $Q_D \setminus G_\varepsilon$ и в Q_D, обозначим Π_D и Π_D^0. Как и в [15], из результатов работы [12] получаем, что при $D \to +\infty$

$$\mathbf{u}(D, \varepsilon, x) = \mathbf{v}(x) + \mathbf{w}(\varepsilon, x) + O(D^{-1})$$

$$\Pi_D - \Pi_D^\circ = -\frac{1}{2}\left\{\int_{G_\varepsilon}\sigma_{ij}(v, x)\,\varepsilon_{ij}(v; x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{R^2\setminus G_\varepsilon}\sigma_{ij}(w; \varepsilon, x)\,\varepsilon_{ij}(w; \varepsilon, x)\,dx\right\} + o(1)$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций. Поэтому

(4.8)
$$\Delta\Pi = \lim_{D\to+\infty}(\Pi_D - \Pi_D{}^\circ) = -\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{G_\varepsilon} \sigma_{ij}(v;x)\,\varepsilon_{ij}(v;x)\,dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{R^2\setminus G_\varepsilon} \sigma_{ij}(w;\varepsilon,x)\,\varepsilon_{ij}(w;\varepsilon,x)\,dx\right\}$$

Вычислим интегралы в правой части (4.8). Из (4.6) выводим

(4.9)
$$\int\limits_{G_\varepsilon} \sigma_{ij}(v;x)\,\varepsilon_{ij}(v;x)\,dx = p^2\,\frac{2\mu+\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\,S_\varepsilon$$

Для отыскания асимптотики второго интеграла в (4.7) воспользуемся формулами (3.5), (3.8). Решение $\mathbf{w}^{(0)}(\varepsilon, x)$ предельной задачи (1.4), (1.5) в $R^2\setminus M$ представимо в виде

$$\mathbf{w}^{(0)}(\varepsilon, x) = \mathbf{z}^{(0)}(x) + \varepsilon\mathbf{z}^{(1)}(x)$$

где $\mathbf{z}^{(0)}$ и $\mathbf{z}^{(1)}$ — решения той же задачи с правыми частями

$$\mathbf{q}^{\pm,0}(x_1) = \pm p\sin\beta\,(\cos\beta,\ \sin\beta)$$
$$\mathbf{q}^{\pm,1}(x_1) = -\,ph_\pm{}'(x_1)\,\cos\beta\,(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

Поэтому имеем

(4.10)
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2\setminus G_\varepsilon}\sigma_{ij}(w;\varepsilon,x)\,\varepsilon_{ij}(w;\varepsilon,x)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{\partial G_\varepsilon}\sigma^{(n)}(w;\varepsilon,x)\,w(\varepsilon,x)\,ds =$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{\pm}\int\limits_{-a}^{a}\{\mp\sigma^{(2)}(w^{(0)};\varepsilon,x_1,\pm0)\,w^{(0)}(x_1,\pm0) +$$
$$+\varepsilon h_\pm(x_1)\,\{(2\mu+\lambda)\,[w^{(0)}_{1,1}(\varepsilon,x_1,\pm0)^2 - w^{(0)}_{2,2}(\varepsilon,x_1,\pm0)^2] +$$
$$+\mu\,[w^{(0)}_{2,1}(\varepsilon,x_1,\pm0)^2 - w^{(0)}_{1,2}(\varepsilon,x_1,\pm0)^2]\}\}\,dx_1 + O(\varepsilon^2) =$$
$$= -\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\pm}\int\limits_{-a}^{a} h_\pm(x_1)\,\{(2\mu+\lambda)\,[z^{(0)}_{1,1}(x_1,\pm0)^2 - z^{(0)}_{2,2}(x_1,\pm0)^2] +$$
$$+\mu\,[z^{(0)}_{2,1}(x_1,\pm0)^2 - z^{(0)}_{1,2}(x_1,\pm0)^2]\}\,dx_1 -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2\setminus M}\sigma_{ij}(z^{(0)}+\varepsilon z^{(1)};x)\,\varepsilon_{ij}(z^{(0)}+\varepsilon z^{(1)};x)\,dx + O(\varepsilon^2)$$

Последний интеграл равен

(4.11)
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2\setminus M}[\sigma_{ij}(z^{(0)};x)\,\varepsilon_{ij}(z^{(0)};x) + 2\varepsilon\sigma_{ij}(z^{(0)};x)\,\varepsilon_{ij}(z^{(1)};x)]\,dx + O(\varepsilon^2) =$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{\pm}\mp\int\limits_{-a}^{a}[\sigma^{(2)}(z^{(0)};x_1,\pm0) + 2\varepsilon\sigma^{(2)}(z^{(1)};x_1,\pm0)]\times$$
$$\times\,\mathbf{z}^{(0)}(x_1,\pm0)\,dx_1 + O(\varepsilon^2)$$

Следы вектора смещений $\mathbf{z}^{(0)}$ на берегах $M^\pm$ отрезка M задаются равенствами

$$\mathbf{z}^{(0)}(x_1,\ \pm0) = \pm\,p\mu^{-1}(1-\nu)\sin\beta\,(a^2 - x_1{}^2)^{1/2}\,(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

поэтому из формул (4.8)—(4.11) получаем окончательное представление приращения потенциальной энергии

$$\Delta\Pi = -\pi a^2p^2\sin^2\beta\,\frac{1-\nu}{2\mu} - \frac{p^2(2\mu+\lambda)}{8\mu(\lambda+\mu)}\left\{S_\varepsilon\,(1+\sin^2\beta\,\sin^2 2\beta) - \right.$$
$$\left. -\,\varepsilon a^2\sin^2\beta\,\sin^2 2\beta\int\limits_{-a}^{a}\frac{H(x_1)\,dx_1}{a^2-x_1{}^2}\right\} + O(\varepsilon^2)$$

Таким образом, в случае продольного сжатия приращение потенциальной энергии при появлении в плоскости щели G_ε равно

$$-\,p^2\,(2\mu+\lambda)\,[8\mu(\lambda+\mu)]^{-1}\,S_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Как и следовало ожидать, этот результат совпадает с приведенным в формуле (4.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 540 с.
2. *Черепанов Г. П.* О сингулярных решениях в теории упругости.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.; Судостроение, 1970, с. 467—479.
3. *Черепанов Г. П.* Некоторые основные вопросы линейной механики разрушения.— Проблемы прочности, 1971, № 2, с. 70—73.
4. *Зорин И. С.* О хрупком разрушении упругой плоскости, ослабленной тонким вырезом.— Вестн. ЛГУ, 1982, № 7, вып. 2, с. 11—16.
5. *Ван Дайк М. Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
7. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
8. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, B. 76, S. 29—60.
9. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 182 с.
10. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972. 749 с.
11. *Иванов Л. А., Котко Л. А., Крейн С. Г.* Краевые задачи в переменных областях.— Дифференциальные уравнения и их применения: Сб. статей. Вильнюс: Изд-е Ин-та математики и кибернетики АН ЛитССР, 1977, вып. 19, с. 7—160.
12. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 208 с.
13. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения.— В кн.: Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2, с. 83—203.
14. *Griffith A. A.* The theory of rupture.— In: Proc. 1-st Intern. Congress for Appl. Mech. Delft: Waltman, 1925, p. 55—63.
15. *Морозов Н. Ф., Назаров С. А.* К вопросу о вычислении изменения энергии в задаче Гриффитса.— Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982, вып. 14, с. 3—9.

Ленинград

Поступила в редакцию 10.I.1986