

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УПРУГОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ МАССИВНЫХ ШТАМПОВ

Ворович Е. И., Прякина О. Д., Тукодова О. М.

Изучаются динамические свойства системы, состоящей из двух массивных жестких полосовых штампов и упругой полубесконечной среды. В качестве такой среды может быть выбран слой, цилиндр, многослойное основание и т. д. Используется метод фиктивного поглощения, который был разработан для одного штампа в [1]. В отличие от других подходов решения указанных задач [2—4] этот метод позволяет с любой степенью точности описать поведение контактных напряжений одновременно во всех точках области контакта как внутри, так и на границе.

Устанавливается наличие у системы резонансных частот четырех типов. К первому типу относится значение частоты ω_{2*} , начиная с которого система не имеет энергетического решения и в ней распространяются волны, имеющие лишь геометрическое затухание. При этом критическая частота не зависит от характеристик штампов и определяется только геометрическими и динамическими свойствами волновода. Второй тип резонансов характеризуется частотами, которым соответствуют кратные корни, т. е. полюсы подынтегральной функции $K(\lambda)$ ядра системы интегральных уравнений, если длина волны $2\pi/\lambda \neq \infty$. Третий тип резонансов получаем, если $K(\lambda)$ имеет кратные полюсы при $\lambda = 0$ [2]. В случае резонансов третьего типа как резонансные частоты, так и амплитуды колебаний зависят от масс и размеров штампов. На этих частотах амплитуды колебаний имеют конечные относительные максимумы и обращаются в бесконечность только при нулевой массе. Всегда есть счетное множество резонансов третьего типа. Фактически утверждалось [4], что на этих резонансах амплитуда бесконечна при любой массе, не равной нулю.

В данной работе для системы штампов обнаружены резонансы четвертого типа — резонансы B , предсказанные в [5]. Ранее такие же резонансы были выявлены в задаче об одном штампе [6]¹. Число этих резонансов всегда конечно, они располагаются на отрезке до первой резонансной частоты ω_{2*} , возникают при массах, больших некоторого критического значения m_* , и амплитуда колебаний на них равна бесконечности при любой массе $m \geq m_*$. В частности, для рассматриваемой в работе системы обнаружены две резонансные частоты типа B .

1. Пусть с упругой полуограниченной средой контактирует без трения два полосовых штампа массой m_1 и m_2 . В центре масс штампов приложены гармонические силы $P_1 e^{-i\omega t}$ и $P_2 e^{-i\omega t}$, под действием которых штампы совершают периодические колебания, состоящие из поступательного перемещения центров масс и поворотов вокруг центров тяжести.

Перемещения штампов и волновое поле, возбуждаемое в среде, определяются из совместного решения уравнений движения штампов и среды [2]. При этом должно выполняться контактное условие: равенство амплитуд смещений точек подошвы штампов и точек поверхности среды в области контакта ($a_{2k-1} \leq x \leq a_{2k}$, $-\infty < y < \infty$, $z = 0$, $k = 1, 2$). Методом интегральных преобразований указанная задача сводится к решению системы интегральных уравнений первого рода, которую с учетом контактного условия запишем в виде (в амплитудных безразмерных пара-

¹ См. также: Ворович Е. И., Прякина О. Д., Тукодова О. М. Возбуждение волн массивным штампом на упругом слое. М.: 1984—13 с. Деп. в ВИНТИ 3.12.84; № 7641-84.

метрах)

$$(1.1) \quad Gq_1 + Gq_2 = u_{1c} + \varphi_1(x - x_{1c}), \quad x \in (a_1, a_2)$$

$$Gq_1 + Gq_2 = u_{2c} + \varphi_2(x - x_{2c}), \quad x \in (a_3, a_4)$$

$$Gq_i = \int_{a_{2i-1}}^{a_{2i}} k(x - \xi) q(\xi) d\xi$$

$$(1.2) \quad k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Здесь u_{kc} — вертикальные перемещения центра масс, имеющего координаты $x_{kc} = (a_{2k} + a_{2k-1})/2$, φ_k — углы поворота вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, q_k — контактные напряжения, характеризующие реакцию среды для первого ($k = 1$) и второго ($k = 2$) штампов соответственно.

Вид функций $K(\alpha)$ определяется типом среды. $K(\alpha)$ обладает свойствами четности, вещественности при вещественном аргументе и допускает представление в виде отношения двух целых функций с сохранением поведения на бесконечности вида $c|\alpha|^{-1}$. Контур σ выбирается из условия излучения энергии на бесконечности, обеспечивающего единственность решения поставленной задачи [2].

Смещения u_{kc} и углы поворота φ_k штампов удовлетворяют уравнениям движения твердого тела (в безразмерных амплитудных параметрах)

$$(1.3) \quad -\kappa_2^2 m_k u_{kc} = P_k - Q_k, \quad \kappa_2^2 = \rho \omega^2 h^2 / \mu$$

$$-\kappa_2^2 J_k \varphi_k = M_k - N_k, \quad J_k = m_k (a_{2k} - a_{2k-1})^2 / 12, \quad k = 1, 2$$

$$(1.4) \quad Q_k = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} q_k(x) dx, \quad N_k = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} q_k(x) (x - x_{kc}) dx$$

где ω — частота колебаний, ρ — плотность среды, μ — параметр Ламе, h — характерный размер среды (толщина слоя, например), J_k — моменты инерции штампов относительно горизонтальных осей, проходящих через центры масс, Q_k, N_k — амплитуды равнодействующих усилий и моменты контактных напряжений.

Общее перемещение штампов будет определяться формулой

$$(1.5) \quad u_k = u_{kc} + \varphi_k(x - x_{kc}), \quad k = 1, 2$$

2. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$(2.1) \quad Gq_1 + Gq_2 = f_1, \quad x \in (a_1, a_2)$$

$$Gq_1 + Gq_2 = f_2, \quad x \in (a_3, a_4)$$

с интегральным оператором G , имеющим вид (1.2), $f_{1,2}$ — заданные функции. Для решения системы (2.1) воспользуемся методом фиктивного поглощения [1].

Представим подынтегральную функцию ядра оператора (1.2) в виде произведения двух функций: $K(\alpha) = S(\alpha) \Pi(\alpha)$, причем $S(\alpha)$ имеет поведение на бесконечности, совпадающее с $K(\alpha)$, а $\Pi(\alpha)$ содержит все особенности $K(\alpha)$ на вещественной оси и обладает свойством $\Pi(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. В качестве $S(\alpha)$ можно выбрать $c(\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$ или $\alpha^{-1} \operatorname{th} B\alpha$, где B — произвольный параметр, причем в соответствии с требованиями метода фиктивного поглощения $B \gg 1$.

Для построения приближенного решения интегрального уравнения производится аппроксимация функции $\Pi(\alpha)$ выражением

$$\Pi_*(\alpha) = \prod_{k=1}^n (\alpha^2 - z_k^2)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1}$$

с заданной степенью точности. Согласно теоремам, установленным в [2], этим обеспечивается близость решений систем интегральных уравнений с ядрами $K = S\Pi$ и $K_* = S\Pi_*$.

По методу фиктивного поглощения решение системы (2.1) ищем в виде суммы

$$(2.2) \quad q_m(x) = q_m^\circ(x) + \varphi_m(x), \quad m = 1, 2$$

так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} q_m^\circ(x) e^{\pm i p_k x} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad m = 1, 2$$

где p_k — полюсы функции $\Pi(\alpha)$, причем такие, что $\text{Im } p_k \geq 0$. В качестве компонент $\varphi_m(x)$ удобно взять системы дельта-функций с непересекающимися носителями в точках $x_{km} = a_{2m-1} + k(a_{2m} - a_{2m-1})/(2n + 1)$, делящих интервалы (a_{2m-1}, a_{2m}) на равные отрезки

$$(2.3) \quad \varphi_m(x) = \sum_{k=1}^{2n} c_{km} \delta(x - x_{km})$$

(c_{km} — подлежащие определению постоянные).

Введем новые неизвестные функции $t_m(x)$ соотношениями

$$(2.4) \quad t_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} T_m(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad m = 1, 2$$

$$T_m(\alpha) = \Pi(\alpha) Q_m^\circ(\alpha), \quad Q_m^\circ(\alpha) = \int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} q_m^\circ(x) e^{i\alpha x} dx$$

Внося (2.2), (2.3) в (2.1) и учитывая (2.4), приходим к системе уравнений относительно новых неизвестных $t_m(x)$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Gt_1 + Gt_2 &= F_1, \quad x \in (a_1, a_2) \\ Gt_1 + Gt_2 &= F_2, \quad x \in (a_3, a_4) \\ F_m &= f_m(x) - \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=1}^2 c_{kl} k(x - x_{kl}), \quad m = 1, 2 \end{aligned}$$

Ядро интегрального оператора G , определяемого формулой (1.2), имеет вид

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} S(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

В качестве $S(\alpha)$ возьмем $(\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$. Контур σ совпадает в этом случае с вещественной осью. Не нарушая общности, положим также $f_m(x) = A_m e^{-i\eta x}$, $\text{Im } \eta = 0$, $\eta > 0$. Таким образом, систему интегральных уравнений динамической контактной задачи (2.1) свели к системе уравнений статической задачи (2.5) с подынтегральной функцией ядра $S(\alpha)$, не имеющей особенностей на вещественной оси.

Решение системы (2.5) можно построить многочисленными методами решения статических задач или задач для сред с сильным поглощением в силу быстрого убывания подынтегральной функции ядра $S(\alpha)$. Методом фак-

торизации, например, получим

$$(2.6) \quad t_m(x) = A_m t_m^n(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=1}^2 c_{kl} \int_{\sigma} L_l(\alpha, x_{kl}) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad m = 1, 2$$

Функции $L_l(\alpha, x_{kl})$, $t_m^n(x)$ имеют вид

$$(2.7) \quad L_l(\alpha, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} S(\eta) \Pi(\eta) T_l^n(\alpha) e^{i\eta \xi} d\eta$$

$$T_l^n(\alpha) = \int_{a_{2l-1}}^{a_{2l}} t_l^n(x) e^{i\alpha x} dx, \quad l = 1, 2$$

$$t_l^n(x) = u_l^n(x) + \sqrt{B^2 + \eta^2} e^{-i\eta x} [v_l^n(x) - 1]$$

$$u_l^n(x) = \frac{\sqrt{B - i\eta} \exp(-i\eta a_{2l})}{\sqrt{\pi(a_{2l} - x)}} \exp[-B(a_{2l} - x)] +$$

$$+ \frac{\sqrt{B + i\eta} \exp(-i\eta a_{2l-1})}{\sqrt{\pi(x - a_{2l-1})}} \exp[-B(x - a_{2l-1})]$$

$$v_l^n(x) = \operatorname{erf} \sqrt{(B + i\eta)(a_{2l} - x)} + \operatorname{erf} \sqrt{(B - i\eta)(x - a_{2l-1})}$$

На основании леммы ([7], с. 168), для того чтобы функции $q_m^\circ(x)$ имели носитель в области Ω : $a_{2m-1} \leq x \leq a_{2m}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.8) \quad T_m(\pm z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(z_k — нули функции $\Pi(\alpha)$, причем такие, что $\operatorname{Im} z_k \geq 0$).

Соотношения (2.8) представляют собой $4n$ равенств относительно $4n$ неизвестных функций c_{km} ($k = 1, 2, \dots, 2n$, $m = 1, 2$). Эти соотношения при помощи теории вычетов сводятся к следующей линейной алгебраической системе для определения коэффициентов c_{km}

$$(2.9) \quad \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=1}^2 c_{kl} [\sqrt{B + i\alpha} \exp(i\alpha a_{2m}) F_{l-s}(\alpha, a_{2m} - x_{kl}) + \\ + \sqrt{B - i\alpha} \exp(i\alpha a_{2m-1}) F_{m-s}(-\alpha, x_{kl} - a_{2m-1})] = \\ = A_m T_m^n(\alpha), \quad m = 1, 2, \quad \alpha = \pm z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

($s = 1$ при $l = m = 2$, в остальных случаях $s = 0$).

Здесь

$$F_l(\alpha, \xi) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{e^{\pm i p_j \xi}}{2 p_j (\alpha \pm p_j) \sqrt{B \mp i p_j}}, \quad l = 1, 2$$

($l = 1$ соответствует знак плюс, а $l = 2$ — минус).

Определив c_{km} из системы (2.9), найдем функции $q_m^\circ(x)$, а следовательно, и $q_m(x)$ по формулам (2.4), (2.2), причем

$$(2.10) \quad q_m^\circ(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} T_m(\alpha) \Pi^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$T_m(\alpha) = \int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} t_m(x) e^{i\alpha x} dx$$

Получим окончательные формулы для расчета контактных напряжений $q_m(x)$ под штампами. Внесем выражения $t_m(x)$ (2.6) в интегральное представление решения (2.10) и воспользуемся аппроксимацией $\Pi(\alpha)$. Интегралы L_m ($m = 1, 2$), определяемые формулами (2.7), берутся по вычетам, так как подынтегральные функции экспоненциально убывают в нижней

полуплоскости комплексного переменного η и не имеют там точек ветвления. Остальные интегралы в решении (2.10) вычисляются по формулам операционного исчисления.

Опуская выкладки, приведем общий вид приближенного решения системы уравнений (2.1)

$$(2.11) \quad q_m(x, \eta) = \frac{A_m}{c} \left\{ u_m^\eta(x) - K^{-1}(\eta) e^{-i\eta x} + K^{-1}(\eta) e^{-i\eta x} v_m^\eta(x) + \right. \\ + \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r}{2z_r} [\exp(-i\eta a_{2m}) \sqrt{B - i\eta} \Phi_r(\eta, a_{2m} - x) + \\ + \exp(-i\eta a_{2m-1}) \sqrt{B - i\eta} \Phi_r(-\eta, x - a_{2m-1})] - \\ - \frac{i}{c} \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{2n} c_{kl} \left\{ \frac{\exp[-B(a_{2m} - x)]}{\sqrt{\pi(a_{2m} - x)}} P_{l-s}(a_{2m} - x_{kl}) + \right. \\ + \frac{\exp[-B(x - a_{2m-1})]}{\sqrt{\pi(x - a_{2m-1})}} P_{m-s}(x_{kl} - a_{2m-1}) + \\ \left. + \Psi_{l-s}(a_{2m} - x_{kl}, a_{2m} - x) + \Psi_{m-s}(x_{kl} - a_{2m-1}, x - a_{2m-1}) \right\} \\ \left. a_{2m-1} \leq x \leq a_{2m}, m = 1, 2 \right.$$

Параметр $s = 1$ при $l = m = 2$ и $s = 0$ в остальных случаях.

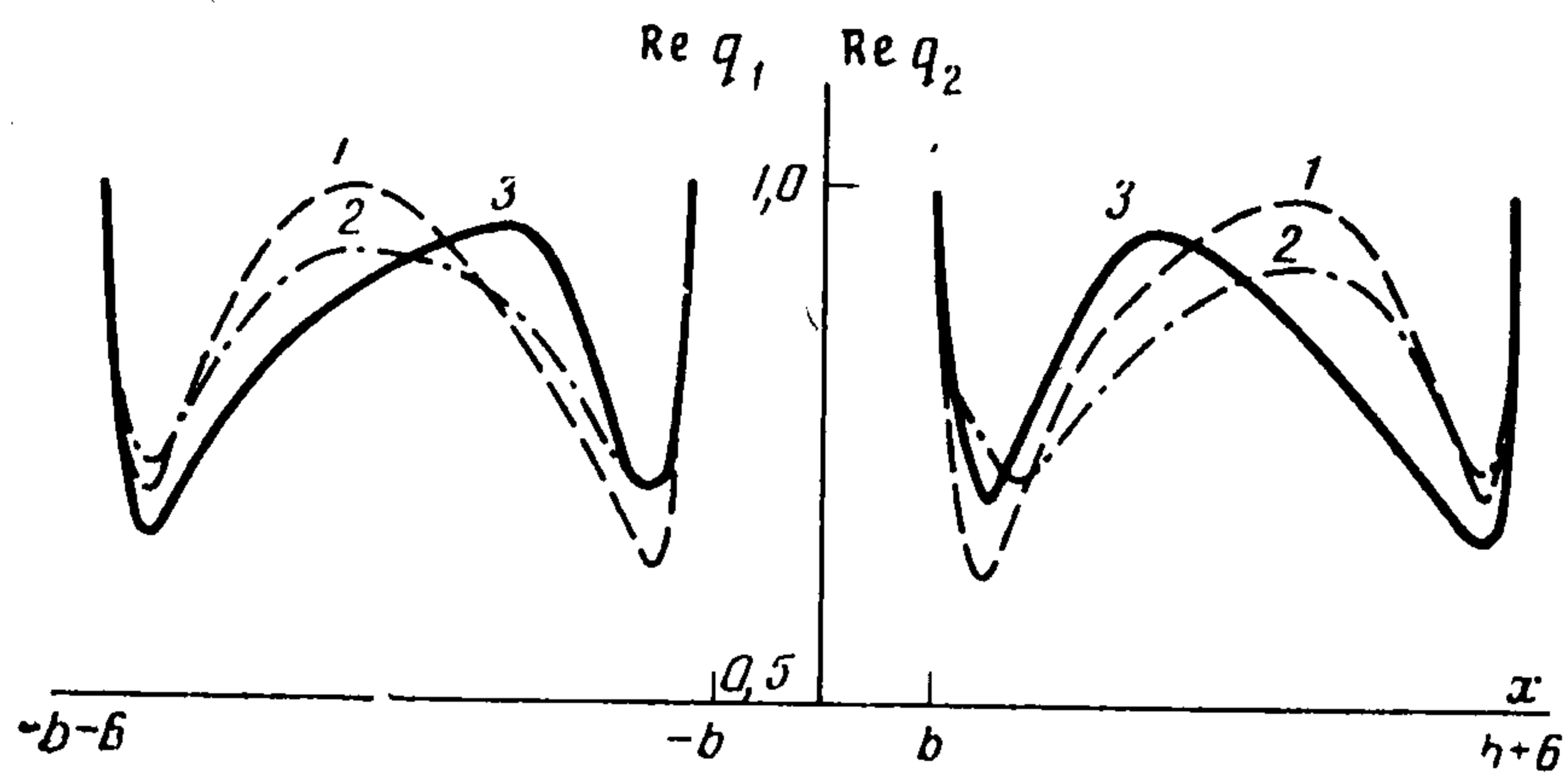
Были приняты следующие обозначения:

$$p_l = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \exp(\pm i p_j x)}{2 p_j \sqrt{B \mp i p_j}} \\ \Psi_l(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\beta_i \alpha_j}{4 p_j z_i} \frac{\exp(\pm i p_j x)}{2 p_j \sqrt{B + i p_j}} \Phi_i(\mp p_j, y) \\ \Phi_r(x, y) = \frac{\sqrt{B + i z_r}}{z_r - x} \exp(i z_r y) \operatorname{erf} \sqrt{(B + i z_r) y} + \\ + \frac{\sqrt{B - i z_r}}{-z_r - x} \exp(-i z_r y) [1 - \operatorname{erf} \sqrt{(B - i z_r) y}] \\ \alpha_j = \prod_{k=1}^n (p_j^2 - z_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n (p_j^2 - p_k^2)^{-1} \\ \beta_i = \prod_{k=1}^n (z_i^2 - p_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^n (z_i^2 - z_k^2)^{-1}$$

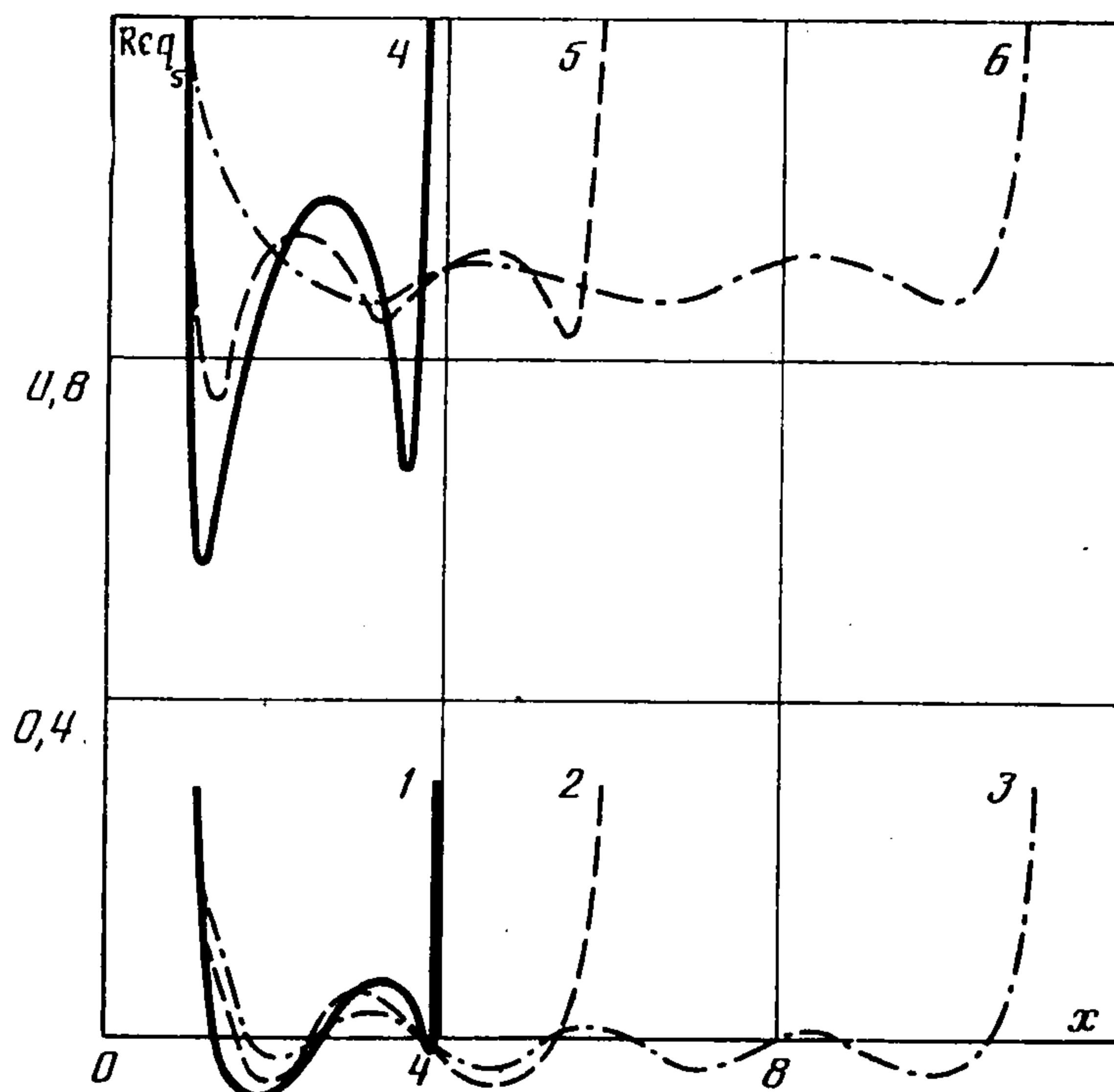
Для расчета контактных напряжений $q_m(x)$ и коэффициентов c_{km} , участвующих в решении, составлен пакет программ на БЭСМ-6.

В качестве примера рассмотрим слой, жестко сцепленный с недеформируемым основанием. Вид функции $K(\alpha)$ дан в [1, 2] и здесь не приводится. На фиг. 1 представлены графики вещественной части амплитуд контактных напряжений $\operatorname{Re} q_1$ и $\operatorname{Re} q_2$ при заданных единичных смещениях штампов одинаковой ширины ($A_1 = A_2 = 1$) для разных расстояний между штампами: $2b = 2, 6, 10$ (кривые 1-3).

Фиг. 2 характеризует контактные давления $\operatorname{Re} q_1$, возникающие под покоящимся штампом при заданном единичном движении другого ($A_1 = 0, A_2 = 1$), для разных значений ширины штампа $a_2 - a_1 = 6, 10, 20$ (линии 1-3). Линии 4-6 описывают поведение $\operatorname{Re} q_1$, когда оба штампа вибрируют поступательно с единичной амплитудой ($A_1 = A_2 = 1$). Все графики даны для $\nu_2 = 2,6$; $\eta = 0$ и $a_4 - a_3 = 6$. Анализ показывает, что осцилляция напряжений увеличивается с размером штампа, а амплитуда уменьшается.



Фиг. 1



Фиг. 2

Заметим, что реальные нагрузки, отнесенные к μh^2 , — величины порядка 10^{-8} — 10^{-12} , поэтому при переходе к конкретным параметрам результаты, приведенные на графиках и полученные для единичных смещений, уменьшатся на много порядков.

3. Пусть $q_{1,2}^j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) — решения системы интегральных уравнений (2.1) для правых частей

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

соответственно. Тогда в силу линейности задачи решением системы (1.1) будет

$$(3.1) \quad q_k = (u_{1c} - \varphi_1 x_{1c}) q_k^1 + (u_{2c} - \varphi_2 x_{2c}) q_k^2 + \varphi_1 q_k^3 + \varphi_2 q_k^4, \quad k = 1, 2$$

причем $q_k^j(x)$ связаны с решением $q_k(x, \eta)$, полученным в п. 2, следующим образом:

$$q_k^j(x) = q_k(x, 0), \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 0 \quad \text{для } j = 1$$

и $A_1 = 0, \quad A_2 = 1$ для $j = 2$

$$q_k^j(x) = i \frac{dq_k(x, \eta)}{d\eta}, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad \eta = 0 \quad \text{для } j = 3$$

и $A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad \eta = 0$ для $j = 4$

Подставляя (3.1) в (1.3), (1.4), получим систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных u_{1c} , u_{2c} , φ_1 и φ_2 в виде

$$(3.2) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{u} = \{u_{1c}, u_{2c}, \varphi_1, \varphi_2\}, \quad \mathbf{P} = \{P_1, P_2, M_1, M_2\}$$

$$a_{kk} = -m_k \kappa_2^2, \quad a_{k+2, k+2} = -J_k \kappa_2^2, \quad k = 1, 2$$

Остальные элементы матрицы A равны нулю. Элементы матрицы B имеют вид

$$b_{k1} = Q_k^1, \quad b_{k2} = Q_k^2, \quad b_{k3} = -x_{1c}Q_k^1 + Q_k^3,$$

$$b_{k4} = -x_{2c}Q_k^2 + Q_k^4$$

$$b_{k+2,1} = -x_{kc}Q_k^1 + Q_k^5, \quad b_{k+2,2} = -x_{kc}Q_k^2 + Q_k^6$$

$$b_{k+2,3} = x_{1c}x_{kc}Q_k^1 - x_{1c}Q_k^5 - x_{kc}Q_k^3 + Q_k^7$$

$$b_{k+2,4} = x_{2c}x_{kc}Q_k^2 - x_{2c}Q_k^6 - x_{kc}Q_k^4 + Q_k^8, \quad k = 1, 2$$

$$\left(Q_k^j = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} q_k^j(x) dx, \quad Q_k^{j+4} = \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} q_k^j(x) x dx, \quad j = 1, 2, 3, 4 \right)$$

Общие (суммарные) вертикальные смещения точек основания штампа будут определяться формулой (1.5).

Отметим, что при частотах, меньших критической частоты κ_{2*} распространения волн в указанных выше средах, функции Q_k^j вещественные, а при $\kappa_2 > \kappa_{2*}$ они становятся комплексными. Частота κ_{2*} характеризует резонанс первого типа, и для слоя $\kappa_{2*} = \pi/2$. Поэтому представляет интерес изучение частот $\kappa_2 < \kappa_{2*}$, на которых возможно обращение в бесконечность амплитуды перемещений u_k ($k = 1, 2$), т. е. те соотношения параметров задачи, при которых обращается в нуль определитель системы (3.2).

На частотах слоя, соответствующих двукратным полюсам функции $K(\alpha)$, равным нулю и расположенным в области $\kappa_2 \geq \kappa_{2*}$, амплитуда суммарных усилий обращается в нуль (что удовлетворяет требованиям теории в силу известной теоремы [2], с. 239), и при нулевой массе штампа амплитуды колебаний будут бесконечными. Эти резонансы третьего типа изучены в [4]. Амплитуда колебаний становится конечной, если масса тела отлична от нуля, но могут появиться резонансы другого типа (типа B) при $\kappa_2 < \kappa_{2*}$ (предсказанные в [5] и установленные в [6] для случая одного штампа и в настоящей работе для системы двух штампов), на которых амплитуда колебаний обращается в бесконечность.

Рассмотрим случай симметричного расположения штампов и симметрично нагруженных единичными силами на слое, жестко сцепленном с недеформируемым основанием. В этом случае система четырех уравнений (3.2) сводится к системе уравнений второго порядка с двумя неизвестными u_c и φ ($m_1 = m_2 = m$, $u_{1c} = u_{2c} = u_c$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $x_{1c} = x_{2c} = x_c$)

$$u_c (-m\kappa_2^2 + k_1) + \varphi_1 (k_3 + x_c k_1) = 1, \quad \varepsilon = (a_2 - a_1)^2/12$$

$$u_c (x_c k_1 + k_2) + \varphi_1 [-\kappa_2^2 m \varepsilon + (x_c)^2 k_1 + x_c (k_2 + k_3) + k_4] = 1$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, приходим к уравнению (3.3)

$$m^2 \kappa_2^4 - 2m \kappa_2^2 f_1(\kappa_2) = f_2(\kappa_2)$$

$$f_1(\kappa_2) = [(x_c^2 + \varepsilon) k_1 + x_c (k_2 + k_3) + k_4]/(2\varepsilon)$$

$$f_2(\kappa_2) = (k_3 k_2 - k_1 k_4)/\varepsilon$$

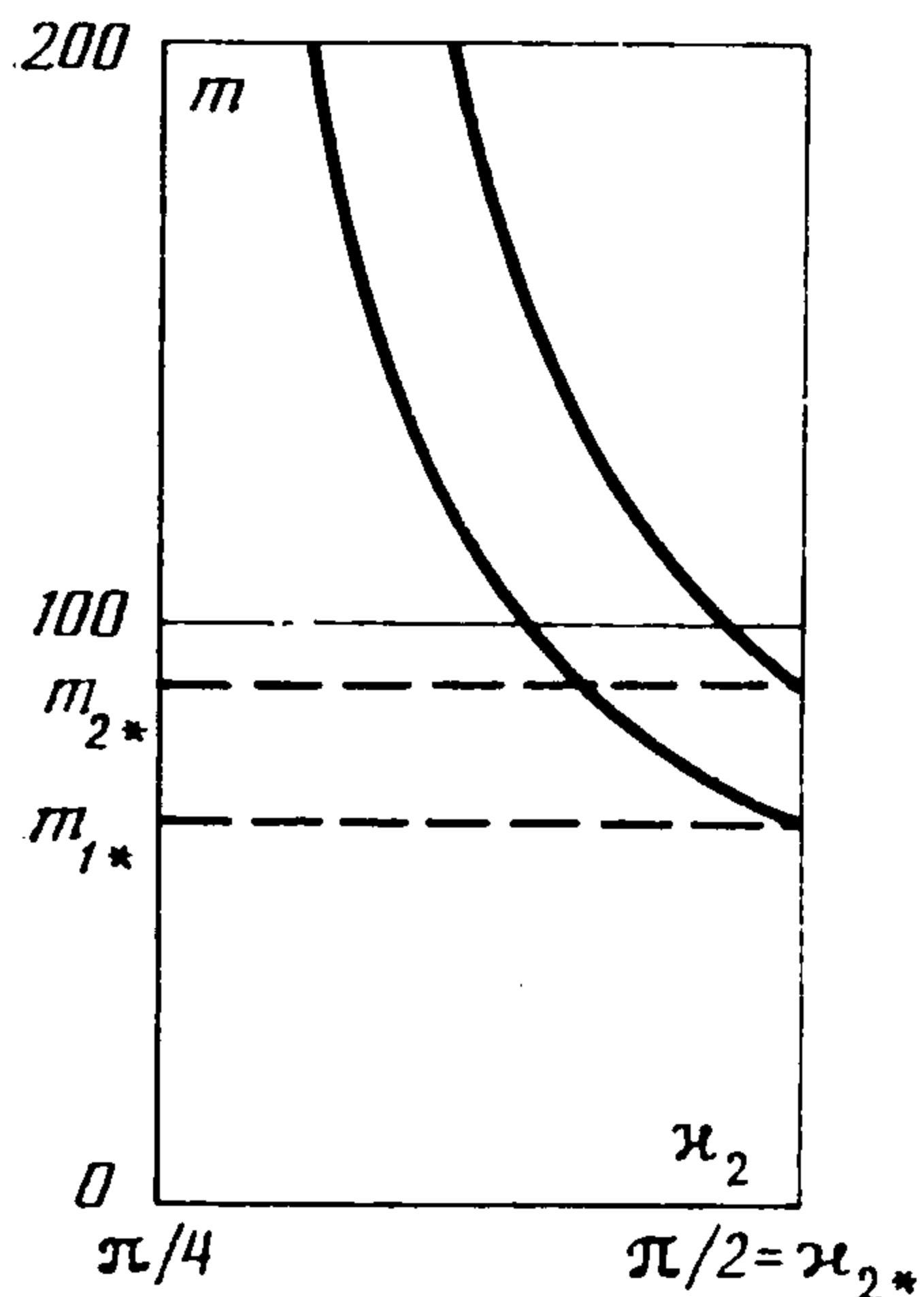
$$(k_1 = Q_1^1 + Q_1^2, \quad k_2 = Q_1^5 + Q_1^6, \quad k_3 = Q_1^3 - Q_1^4,$$

$$k_4 = Q_1^7 - Q_1^8)$$

Уравнение (3.3) может иметь два положительных действительных корня, если его дискриминант D положителен, один корень — если $D = 0$, и ни одного в случае $D < 0$.

На фиг. 3 приведена зависимость резонансных частот κ_2 от массы штампов m при заданной ширине штампов $a_2 - a_1 = 6$. Видно, что существуют две критические массы: m_{1*} и m_{2*} , такие, что пока штампы обладают

массой, меньшей m_{1*} (что соответствует $D < 0$), в системе нет резонанса. При $m_{1*} < m < m_{2*}$ есть один резонанс. И наконец, при достаточно больших массах $m \geq m_{2*}$ система имеет две резонансные частоты, на которых амплитуда вынужденных установившихся колебаний обращается в бесконечность. С ростом массы значение резонансных частот уменьшается. При изменении размеров штампов поведение резонансных кривых качественно не меняется.



Фиг. 3

Следовательно, рассматриваемая система в области $\kappa_2 \leq \kappa_{2*}$ не может иметь более двух резонансов. Таким образом, резонансы типа *B* существуют, когда $\det(A + B) = 0$, [и очевидно, что такие резонансы возможны только для частот, меньших частоты κ_{2*} , соответствующей начальной точке сплошного спектра. Эти резонансы для полубесконечных тел характеризуют обращение амплитуды колебаний в бесконечность, что уподобляет полубесконечное тело по своим динамическим свойствам телу ограниченных размеров.

Для резонансов при $\kappa_2 > \kappa_{2*}$ амплитуда колебаний принимает максимальное, но вполне определенное конечное значение. Именно эти резонансы (третьего типа) и исследовались ранее [4]. Отметим, что детерминант при $\kappa_2 > \kappa_{2*}$ вообще в нуль никогда не обращается при ненулевой массе штампов, хотя это утверждалось в [4]. Кроме того, резонансы типа *B* в слое или полосе со штампами имеют место только при достаточно большой массе штампов, начиная с некоторой критической, в то время как резонансы третьего типа имеют место при любой массе штампа.

Авторы благодарят И. И. Воровича за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 477—484.

2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.

3. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.

4. Глушков Е. В. Вибрация системы массивных штампов на линейно-деформируемом основании. — ПММ, 1985, т. 49, вып. 1, с. 142—147.

5. Бабешко В. А., Ворович И. И. Динамические свойства полугораниченных упругих и электроупругих трехмерных тел при смешанных граничных условиях и наличии включений. — В кн.: Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 39.

6. Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Некоторые динамические смешанные задачи взаимодействия массивных штампов с полугораниченными средами. — В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Тез. докл. III Всесоюз. конф. Харьков, 1985, с. 188.

7. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.