Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 1, 1987

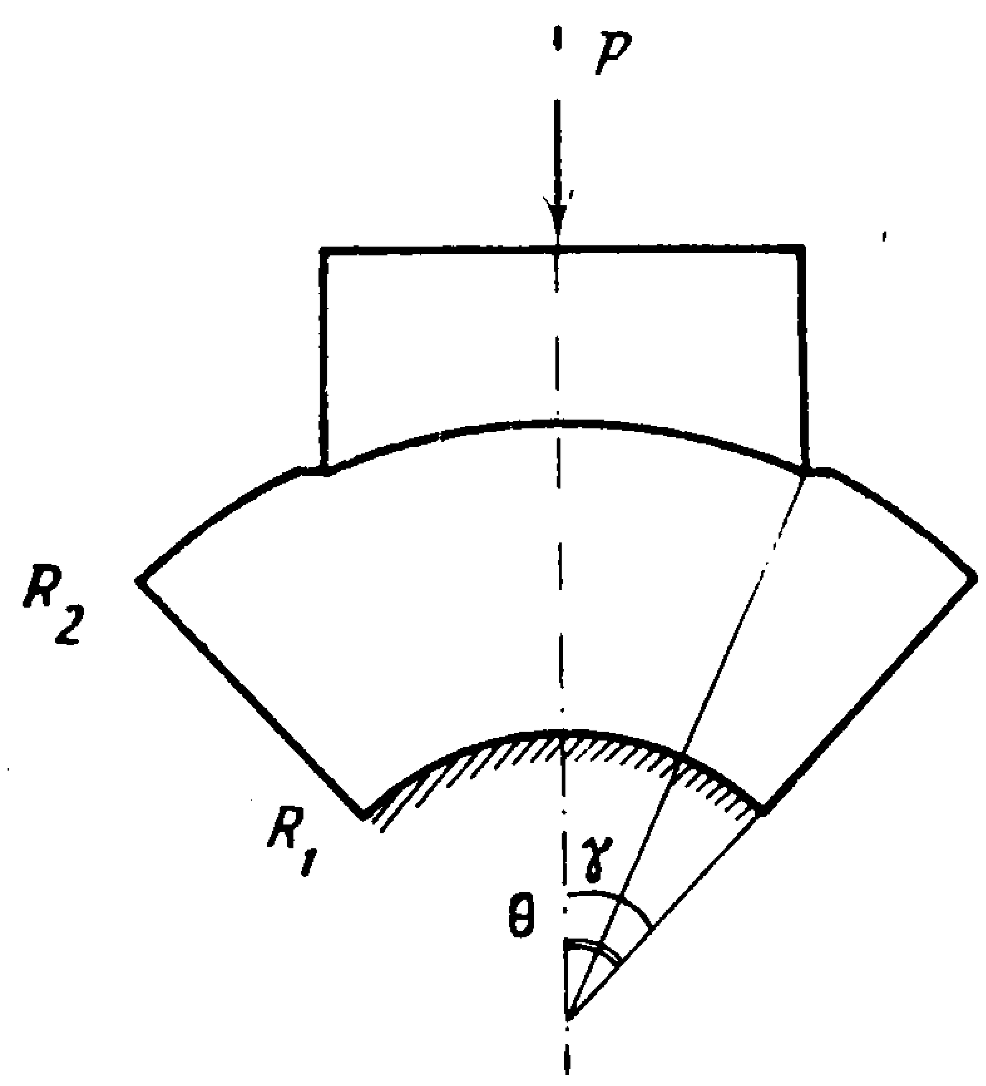
УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА И СЕКТОРА ШАРОВОГО СЛОЯ

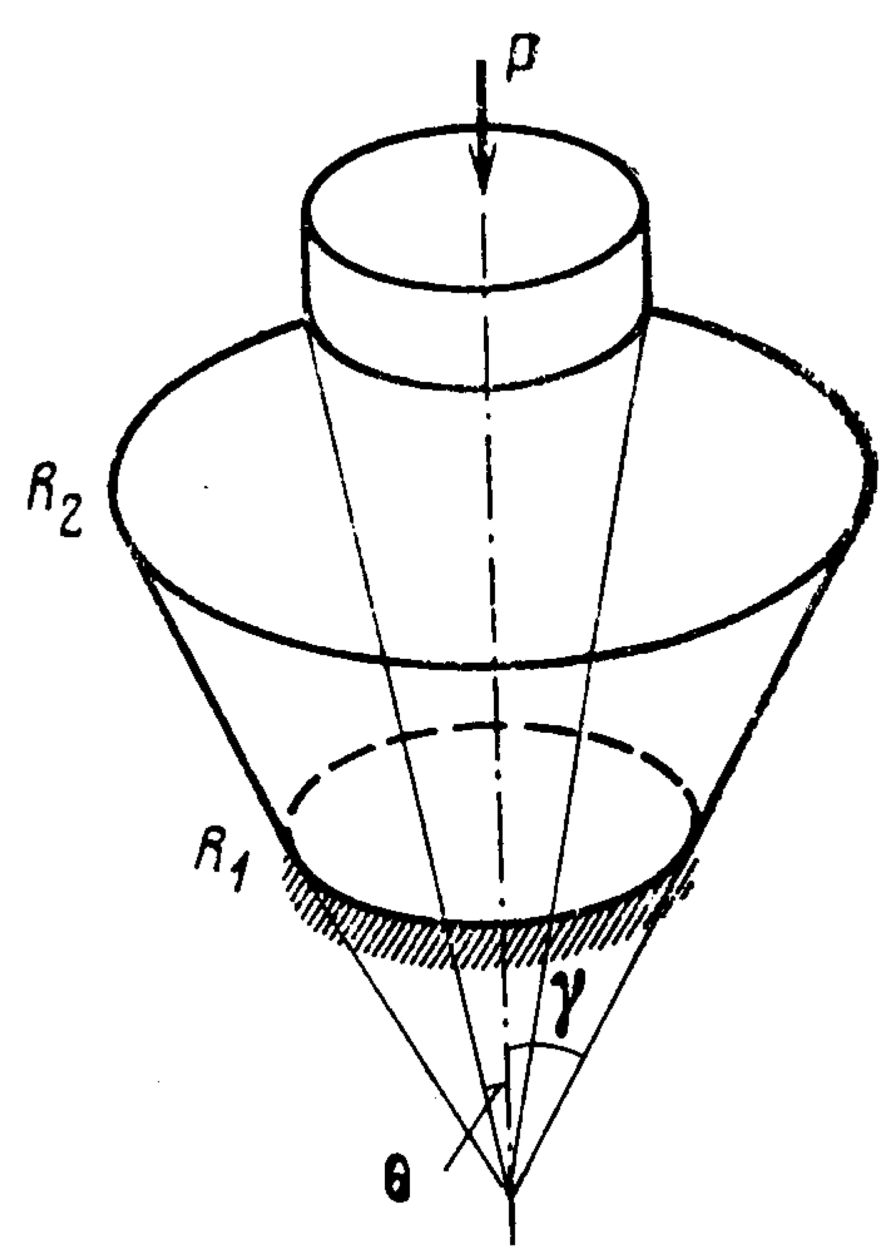
Чебаков М. И.

Рассматриваются две статические контактные задачи теории упругости о вдавливании штампа в круговую границу кольцевого сектора (фиг. 1) и в сферическую поверхность сектора шарового слоя (фиг. 2). Задачи с использованием однородных решений сводятся к исследованию хорошо изученных интегральных уравнений, возникающих при исследовании аналогичных задач соответственно для кольца и шарового слоя, и бесконечных систем линейных алгебраических уравнений высокого качества типа нормальных систем Пуанкаре — Коха.

Приводится также доказательство используемых соотношений обобщенной ортогональности (СОО) однородных решений теории упругости об установившихся колебаниях шарового слоя в случае осевой симметрии и кольца. СОО для шарового слоя



Фиг. 1



Фиг. 2

в частном случае совпадает с известными [1], где рассмотрена статическая задача. Для кольца аналогичные СОО другим способом доказаны в [2, 3], причем СОО выведены в [3] как следствие теоремы взаимности Бетти для широкого класса сред и областей.

Ниже СОО выводятся как следствие из значения некоторого интеграла от комбинации двух различных решений уравнений Ламе в общем случае с произвольными граничными условиями. Значение интеграла выражено через граничные функции [4]. При выводе бесконечных систем используются значения интеграла как от однородных решений (условие обобщенной ортогональности), так и от неоднородных.

1. В сферической системе координат r, θ, φ рассмотрим однородные решения уравнений Ламе в осесимметрических задачах об установившихся колебаниях шарового слоя $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, грани $r = R_1$ и $r = R_2$ которого: а) неподвижны, б) свободны от напряжений либо в) грань $r = R_1$ неподвижна, а $r = R_2$ свободна от напряжений (или наоборот). Собственные функции этих задач будем искать в виде

$$u_{rk}(r, \varphi) = W_k^\circ(r) P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi) e^{i\omega t}, \tag{1.1}$$

$$u_{\varphi k}(r, \varphi) = V_k^\circ(r) \frac{d}{d\varphi} P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi) e^{i\omega t}$$

где u_{φ_k}, u_{rk} — проекции вектора перемещений соответственно на оси φ и r, $P_{\alpha_k-1/2}(\cos\varphi)$ — функции Лежандра, ω — частота колебаний, t — время, α_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) — собственные числа. Для определения $W_k^\circ(r)$ и $V_k^\circ(r)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_1(W_k^\circ, V_k^\circ) \equiv \mu r V_k^{\circ\prime\prime} + 2\mu V_k^{\circ\prime} - [(\lambda + 2\mu)(\alpha_k^2 - 1/4) r^{-1} - \rho\omega^2 r] V_k^\circ + (\lambda + \mu) W_k^{\circ\prime} + 2(\lambda + 2\mu) r^{-1} W_k^\circ = 0 \tag{1.2}$$

$$L_2(W_k^\circ, V_k^\circ) \equiv (\lambda + 2\mu) r W_k^{\circ\prime\prime} + 2(\lambda + 2\mu) W_k^{\circ\prime} - [2(\lambda + 2\mu) + (\alpha_k^2 - 1/4)\mu - \rho\omega^2 r^2] r^{-1} W_k^\circ - (\lambda + \mu)(\alpha_k^2 - 1/4) V_k^{\circ\prime} + (\lambda + 3\mu)(\alpha_k^2 - 1/4) r^{-1} V_k^\circ = 0 \tag{1.3}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе, ρ — плотность, L_1 и L_2 — соответствующие дифференциальные операторы.

Граничные условия примут вид

$$\begin{gathered} W_k^\circ(R_1) = W_k^\circ(R_2) = V_k^\circ(R_1) = V_k^\circ(R_2) = 0 \\ \sigma_{rk}^*(R_1) = \sigma_{rk}^*(R_2) = \tau_k^*(R_1) = \tau_k^*(R_2) = 0 \\ W_k^\circ(R_1) = V_k^\circ(R_1) = \sigma_{rk}^*(R_2) = \tau_k^*(R_2) = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

При этом компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} &\sigma_{rk} = \overset{*}{\sigma}_{rk}(r) P_{\alpha_k-1/2}(\cos\varphi) e^{i\omega t} \\ &\tau_{r\varphi k} = \tau_k^*(r) \frac{d}{d\varphi} P_{\alpha_k-1/2}(\cos\varphi) e^{i\omega t} \\ &\sigma_{\varphi k} = \Big[\overset{*}{\sigma}_{\varphi k}(r) P_{\alpha_k-1/2}(\cos\varphi) - 2\mu r^{-1} V_k^\circ(r) \operatorname{ctg}\varphi \times \\ &\times \frac{d}{d\varphi} P_{\alpha_k-1/2}(\cos\varphi)\Big] e^{i\omega t} \\ &\overset{*}{\sigma}_{rk} = 2\lambda r^{-1} W_k^\circ(r) + (\lambda + 2\mu) W_k^{\circ\prime} - \lambda(\alpha_k^2 - 1/4) r^{-1} V_k^\circ \\ &\tau_k^* = \mu(-r^{-1} V_k^\circ + V_k^{\circ\prime} + r^{-1} W_k^\circ) \\ &\overset{*}{\sigma}_{\varphi k} = 2(\lambda + \mu) r^{-1} W_k^\circ + \lambda W_k^{\circ\prime} - (\lambda + 2\mu)(\alpha_k^2 - 1/4) r^{-1} V_k^\circ \end{aligned} \tag{1.5}$$

Теорема. Если задача (1.2) — (1.4) имеет только простые собственные значения и $\alpha_k^2 \neq \alpha_n^2$, то справедливы следующие СОО:

$$\overset{\circ}{W}_{kn} \equiv \int_{R_1}^{R_2} [V_k^\circ(r) \overset{*}{\sigma}_{\varphi n}(r) - \tau_k^*(r) W_n^\circ(r)] r\, dr = 0 \tag{1.6}$$

Доказательство. Используя уравнения (1.2), (1.3), рассмотрим очевидные равенства

$$\int_{R_1}^{R_2} [V_n^\circ L_2(W_k^\circ, V_k^\circ) - V_k^\circ L_2(W_n^\circ, V_n^\circ)] r\, dr = 0$$

$$\int_{R_1}^{R_2} [W_n^\circ L_1(W_k^\circ, V_k^\circ) - W_k^\circ L_1(W_n^\circ, V_n^\circ)] r\, dr = 0$$

из которых соответственно найдем

$$\begin{aligned} &-(V_k^\circ V_n^\circ)(\lambda + 2\mu)(\alpha_k^2 - \alpha_n^2) = \mu [r^2 V_k^\circ V_n^{\circ\prime} - r^2 V_n^\circ V_k^{\circ\prime}]_{R_1}^{R_2} + \\ &+ (\lambda + \mu)[(r V_k^\circ W_n^{\circ\prime}) - (r V_n^\circ W_k^{\circ\prime})] + 2(\lambda + 2\mu)[(V_k^\circ W_n^\circ) - \\ &- (V_n^\circ W_k^\circ)]; \quad -(W_k^\circ W_n^\circ)\mu(\alpha_k^2 - \alpha_n^2) = \\ &= (\lambda + 2\mu)[r^2 W_k^\circ W_n^{\circ\prime} - r^2 W_n^\circ W_k^{\circ\prime}]_{R_1}^{R_2} - \\ &- (\lambda + \mu)(\alpha_n^2 - 1/4)(r V_n^{\circ\prime} W_k^\circ) + (\lambda + \mu)(\alpha_k^2 - 1/4)(r V_k^{\circ\prime} W_n^\circ) + \\ &+ (\lambda + 3\mu)(\alpha_n^2 - 1/4)(V_n^\circ W_k^\circ) - (\lambda + 3\mu)(\alpha_k^2 - 1/4)(V_k^\circ W_n^\circ) \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(r^m fg) \equiv \int_{R_1}^{R_2} r^m f(r) g(r)\, dr \quad (m = 0, 1)$$

Далее рассмотрим выражение

$$(1.8)\qquad (\alpha_k^2 - \alpha_n^2) W_{kn}^\circ$$

где W_{kn}° дается соотношением (1.6). В (1.8) $\sigma_{\varphi n}^*$ и τ_k^* заменим выражениями по формулам из (1.5) и раскроем скобки, после чего во вновь полученном соотношении соответствующие слагаемые заменим выражениями в правых частях равенств (1.7). Выполнив интегрирование по частям, вычислим интеграл (1.8) и к полученному соотношению прибавим и вычтем выражение

$$[2\lambda r W_n^\circ W_k^\circ + \lambda(\alpha_k^2 - 1/4) r W_n^\circ V_k^\circ + \mu(\alpha_n^2 - 1/4) r V_k^\circ V_n^\circ]_{R_1}^{R_2}$$

Перегруппировав соответствующим образом слагаемые, окончательно получим

$$(1.9)\qquad \overset{\circ}{W}_{kn} = (\alpha_k^2 - \alpha_n^2)^{-1} [r^2 W_k^\circ \overset{*}{\sigma}_{rn} - r^2 W_n^\circ \overset{*}{\sigma}_{rk} + r^2 V_k^\circ (\alpha_n^2 - 1/4)\tau_n^* - r^2 V_n^\circ (\alpha_n^2 - 1/4)\tau_k^*]_{R_1}^{R_2}$$

Из (1.9) следует, что $W_{kn}^\circ = 0$ при любых граничных условиях (1.4), если $\alpha_n^2 \neq \alpha_k^2$.

Вывод формул (1.9) не связан с видом граничных условий для уравнений Ламе, следовательно, они будут справедливы для любых неоднородных граничных условий. В этом случае в частных неоднородных решениях вида (1.1) и формулах (1.9) следует считать $\alpha_k = k$. Случай, когда одно из решений в (1.9) неоднородное, а другое однородное, понадобится для вычисления интеграла (3.12).

Как видно из доказательства, СОО (1.6) справедливы и при $\omega = 0$. В этом случае они совпадают с известными [1].

2. В цилиндрической системе координат r, φ, z рассмотрим однородные решения уравнений Ламе в плоских задачах об установившихся колебаниях кольца $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, на гранях которого $r = R_1$ и $r = R_2$ заданы любые однородные условия, аналогичные условиям для задач п. 1. Если собственные функции таких задач записать в виде

$$(2.1)\qquad u_{rk} = W_k^\circ(r)\cos\alpha_k\varphi e^{i\omega t}, \quad u_{\varphi k} = V_k^\circ(r)\sin\alpha_k\varphi e^{i\omega t}$$

где α_k ($k = 1, 2, \ldots$) — собственные числа, то соответствующие компоненты тензора напряжений примут вид

$$(2.2)\qquad \sigma_{qk} = E_*\sigma_{qk}^\circ(r)\cos\alpha_k\varphi\, e^{i\omega t},\ q = r, \varphi$$
$$\tau_{r\varphi k} = E_*\tau_k^\circ(r)\sin\alpha_k\varphi\, e^{i\omega t};\ E_* = E/(1 - \nu^2)$$

Аналогично п. 1, используя систему уравнений для W_k° и V_k°, можно вычислить интеграл

$$(2.3)\qquad \overset{\circ}{W}_{kn} \equiv \int_{R_1}^{R_2} [\overset{\circ}{\sigma}_{\varphi k}(r) V_n^\circ(r) - \tau_n^\circ(r) W_k^\circ(r)]\, dr = r(\alpha_k^2 - \alpha_n^2)^{-1} [\alpha_k V_n^\circ \tau_k^\circ - \alpha_k V_k^\circ \tau_n^\circ + \alpha_n W_n^\circ \overset{\circ}{\sigma}_{rk} - \alpha_n W_k^\circ \overset{\circ}{\sigma}_{rn}]_{R_1}^{R_2}$$

Из последнего соотношения следует, что при любых однородных граничных условиях типа (1.4) получим СОО

$$(2.4)\qquad W_{kn}^\circ = 0$$

если $\alpha_k^2 \neq \alpha_n^2$ и все α_k — простые собственные значения.

Отметим, что, как и в формуле (1.9), значение интеграла (2.3) не зависит от вида граничных условий, и случай, когда одно из частных решений неоднородное, будет также использован в дальнейшем (п. 4).

Соотношения (2.4) справедливы также и при $\omega = 0$ и совпадают с известными [2, 3].

СОО (1.6) и (2.4) дают возможность эффективно исследовать с использованием однородных решений широкий класс осесимметричных задач для сектора шарового слоя и плоских задач для кольцевого сектора. Для решения таких контактных задач, когда смешанные граничные условия заданы на сферических и цилиндрических поверхностях, может быть использован, например, метод, изложенный в работах [5, 6].

3. Рассмотрим статическую ($\omega = 0$) контактную задачу для кольцевого сектора $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $|\varphi| \leqslant \gamma$ о вдавливании штампа в грань $r = R_2$, при этом пусть грань $r = R_1$ лежит без трения на жестком основании, а на гранях $\varphi = \pm\gamma$ отсутствуют касательные напряжения и нормальные перемещения (фиг. 1).

Граничные условия такой задачи (δ — перемещение штампа)

$$
\begin{aligned}
&u_r = \delta\cos\varphi\,(r = R_2,\ |\varphi| \leqslant \theta)\\
&\sigma_r = 0\ (r = R_2,\ \theta < |\varphi| < \gamma)\\
&\tau_{r\varphi} = 0\ (r = R_1,\ r = R_2)\\
&u_r = 0\ (r = R_1)\\
&\tau_{r\varphi} = 0,\ u_\varphi = 0\ (|\varphi| \leqslant \gamma)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Решение уравнений Ламе при условиях (3.1) будем искать в виде

$$
u_r(r,\varphi) = u_r^{(1)} - u_r^{(2)},\quad u_\varphi(r,\varphi) = u_\varphi^{(1)} - u_\varphi^{(2)}
\tag{3.2}
$$

где $u_r^{(1)}$, $u_\varphi^{(1)}$ — решение уравнений Ламе для кольца, когда заданы граничные условия

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r(R_2,\ \varphi) = \{q(r),\ \text{если}\ |\varphi| \leqslant \theta;\ 0,\ \text{если}\ |\varphi| > \theta\}\\
&\tau_{r\varphi}(R_2,\ \varphi) = 0,\ \tau_{r\varphi}(R_1,\ \varphi) = u_r(R_1,\ \varphi) = 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

а $u_r^{(2)}$, $u_\varphi^{(2)}$ — суперпозиция однородных решений уравнений Ламе для кольца, когда заданы граничные условия

$$
\sigma_r(R_2,\ \varphi) = \tau_{r\varphi}(R_2,\ \varphi) = 0,\ \tau_{r\varphi}(R_1,\ \varphi) = u_r(R_2,\ \varphi) = 0
$$

В этом случае решения уравнений Ламе с граничными условиями (3.3) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&u_r^{(1)} = \frac{1}{E_*}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta(k)}W_k(r)\cos k\varphi\\
&u_\varphi^{(1)} = \frac{1}{E_*}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta(k)}V_k(r)\sin k\varphi
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

а соответствующие компоненты тензора напряжений

$$
\begin{aligned}
&\sigma_q^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta(k)}\sigma_{qk}(r)\cos k\varphi,\quad q = r,\varphi\\
&\tau_{r\varphi}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta(k)}\tau_k(r)\sin k\varphi;\qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} q(t)\cos kt\,dt
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

В формулах (3.4), (3.5) функции $W_k(r)$, $V_k(r)$, $\sigma_{rk}(r)$, $\tau_k(r)$ и $\sigma_{\varphi k}(r)$ известны (в дальнейшем понадобится только $W_k(r)$ и $\Delta(k)$), $q(t)$ — функция распределения контактных давлений, которую необходимо определить.

Имеем

$$u_r^{(2)} = \sum D_k W_k^\circ(r)\cos\alpha_k\varphi, \quad u_\varphi^{(2)} = \sum D_k V_k^\circ(r)\sin\alpha_k\varphi \tag{3.6}$$

$$\sigma_q^{(2)} = E_* \sum D_k \overset{\circ}{\sigma}_{qk}(r)\cos\alpha_k\varphi, \quad q = r, \varphi$$

$$\tau_{r\varphi}^{(2)} = E_* \sum D_k \tau_k^\circ(r)\sin\alpha_k\varphi$$

Здесь суммирование ведется по всем нулям α_k функции $\Delta(\alpha_k)$, расположенным в правой полуплоскости. Заметим, что $\Delta(k) = \Delta^\circ(k)$ $(k \geqslant 2)$.

Таким образом, функции (3.2), (3.4), (3.6) удовлетворяют уравнениям Ламе и граничным условиям (3.1), кроме первого и последнего, которые теперь примут вид

$$u_r^{(1)}(R_2, \varphi) - u_r^{(2)}(R_2, \varphi) = \delta\cos\varphi \quad (|\varphi| \leqslant \theta) \tag{3.7}$$

$$u_\varphi^{(1)}(r, \gamma) - u_\varphi^{(2)}(r, \gamma) = 0, \quad \tau_{r\varphi}^{(1)}(r, \gamma) - \tau_{r\varphi}^{(2)}(r, \gamma) = 0 \quad (R_1 \leqslant r \leqslant R_2)$$

Представим неизвестные контактные напряжения в виде

$$q(t) = E_*\left[\delta q_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k W_k^\circ(R_2)\, q_k(t)\right] \tag{3.8}$$

Удовлетворяя первому граничному условию (3.7), для определения $q_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ получим ряд интегральных уравнений

$$K_\varphi q_0 = \cos\varphi; \quad K_\varphi q_k = \cos\alpha_k\varphi, \quad k \geqslant 1 \quad (|\varphi| \leqslant \theta) \tag{3.9}$$

где интегральный оператор K_φ при учете четности функции $q(t)$ может быть приведен к виду

$$K_\varphi q \equiv \int_{-\theta}^{\theta} M(t-\varphi)\, q(t)\, dt, \quad M(y) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{W_k(R_2)}{\Delta(k)}\cos ky \tag{3.10}$$

Два последних условия (3.7) перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k V_k^\circ(r)\sin\alpha_k\gamma = u_\varphi^{(1)}(r, \gamma)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \tau_k^\circ(r)\sin\alpha_k\gamma = \frac{1}{E_*}\tau_{r\varphi}^{(1)}(r, \gamma)$$

Умножим первое соотношение на $\sigma_{\varphi n}^\circ$ и вычтем из полученного равенства второе соотношение, умноженное на W_n°, после чего полученное выражение проинтегрируем в пределах от R_1 до R_2. Используя СОО (2.4), получим

$$D_k \overset{\circ}{W}_{kk}\sin\alpha_k\gamma = \frac{1}{E_*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin n\gamma}{\Delta(n)}\int_{R_1}^{R_2}\left[V_n\overset{\circ}{\sigma}_{\varphi k} - \tau_n W_k^\circ\right] dr \tag{3.11}$$

Учитывая, что пары функций V_n, W_n и V_n°, W_n° удовлетворяют одной и той же системе уравнений, интеграл из (3.11) может быть вычислен с использованием интеграла (2.3) и граничных условий (3.3), (3.4)

$$\int_{R_1}^{R_2}\left[V_n\overset{\circ}{\sigma}_{\varphi k} - \tau_n W_k^\circ\right] dr = -\frac{nR_2 W_k^\circ(R_2)\,\sigma_{rn}(R_2)}{\alpha_k^2 - n^2} \tag{3.12}$$

Так как

$$\sigma_{rn}(R_2) = \Delta(n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos nt\sin nt}{n^2 - \alpha_k^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin(\pi-\gamma)\alpha_k\cos t\alpha_k}{\sin\pi\alpha_k}$$

то выражение (3.11) преобразуется к виду

$$D_k \overset{\circ}{W}_{kk} \sin \alpha_k \gamma = \frac{R_2 W_k^{\circ}(R_2) \sin(\pi - \gamma)\alpha_k}{E_* \sin \pi\alpha_k} \int_0^{\theta} q(t) \cos \alpha_k t\, dt \tag{3.13}$$

Подставляя (3.8) в (3.13), получим бесконечную систему для определения коэффициентов D_k

$$y_k = b_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} y_n \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad D_k = \frac{y_k}{W_k^{\circ}(R_2) \sin \alpha_k \gamma} \tag{3.14}$$

$$b_k = \delta c_k T_{k0}, \; a_{kn} = c_k T_{kn}/\sin \alpha_n \gamma$$

$$c_k = \frac{R_2 W_k^{\circ 2}(R_2) \sin(\pi - \gamma)\alpha_k}{\overset{\circ}{W}_{kk} \sin \pi\alpha_k}, \quad T_{kn} = \int_0^{\theta} q_n(t) \cos \alpha_k t\, dt$$

Можно показать, что $T_{kn} = T_{nk}$.

Таким образом, для отыскания функции распределения контактных напряжений под штампом получена формула (3.8), где $q_k(t)$ находятся из интегральных уравнений (3.9), (3.10), а D_k — из бесконечной системы (3.14). Отметим, что к уравнениям (3.9), (3.10) сводятся аналогичные контактные задачи для кругового кольца. Таким образом, здесь проблема решения контактной задачи для кольцевого сектора сведена к уже хорошо изученной контактной задаче для кольца. Кроме того, бесконечная система (3.14) относится к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха, т. е. ее коэффициенты b_k и a_{kn} убывают с ростом номеров по экспоненте, что будет показано ниже. Следовательно, ее решение может быть получено методом редукции при любых значениях параметров.

Как видно из формул (3.8)—(3.10) и (3.14), для исследования решения задачи понадобятся лишь выражения $W_k(R_2)\,\Delta^{-1}(k)$, $W_k^{\circ}(R_2)$, W_{kk}° и собственные числа α_k. Указанные выражения получить нетрудно (см., например, [7]), и они здесь не приводятся, найдем только асимптотику чисел α_k при больших k. Как было отмечено, α_k — корни уравнения

$$\Delta^{\circ}(\alpha_k) \equiv 2(1-\nu)\operatorname{ch}(2\alpha_k \ln \varkappa) + 4\alpha_k \operatorname{sh}(2\alpha_k \ln \varkappa) + \mu_0 \alpha_k^2 - 2(1-\nu) = 0, \quad \varkappa = R_2/R_1 \tag{3.15}$$

$$\mu_0 = \varkappa^2(1+\nu) - \varkappa^{-2}(3-\nu) + 2(1-\nu)$$

Можно установить, что при больших номерах корни этого уравнения имеют следующую асимптотику:

$$\alpha_k \sim [\ln(|\pi\mu_0(2\ln\varkappa)^{-1}|(k - 1/4)) + i\,2\pi(k - 1/4)](2\ln\varkappa)^{-1} \tag{3.16}$$

что, в свою очередь, позволяет оценить элементы матрицы в правой части бесконечной системы (3.14) при больших номерах k, n

$$|b_k| \leqslant P_k \exp[-\beta_k(\gamma - \theta)], \quad |a_{kn}| \leqslant P_{kn} \exp[-(\beta_k + \beta_n)(\gamma - \theta)]$$

$$\beta_k = \pi(k - 1/4)/\ln\varkappa$$

где P_k и P_{kn} — ограниченные величины. Это подтверждает тот факт, что бесконечная система (3.14) относится к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха.

Замечания. 1°. Для элементов $\mathrm{d}_k = D_k W_k^{\circ}(R_2)\, q_k(t)$ ряда (3.8) при любых $|t| < \theta$ и при больших k выполняется соотношение $\mathrm{d}_k = o[\exp(-\beta_k(\gamma - \theta))]$, а следовательно, ряд (3.8) при $|t| < \theta$ сходится не медленнее, чем сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы.

2°. Ядро интегральных уравнений (3.9), (3.10) можно представить, учитывая асимптотику функции $W_k(R_2)/\Delta(k)$ при больших k, в виде

$$M(y) = -\frac{2R_2}{\pi(1-\nu^2)} \ln\left|2\sin\frac{y}{2}\right| + F_1(y) \tag{3.18}$$

или

$$M(y) = \frac{2R_2}{\pi(1-\nu^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(2k\ln\varkappa)}{k} \cos ky + F_2(y) \tag{3.19}$$

где $F_1(y)$ и $F_2(y)$ — непрерывные при всех $|y| < M < \infty$ функции. Представление ядра в виде (3.18) позволяет получить эффективное решение интегральных уравнений (3.9), (3.10) методом ортогональных многочленов [8], а представление (3.19) позволяет [9] точно обратить главную часть интегрального оператора уравнений (3.9), (3.10) и свести их к интегральным уравнениям второго рода.

4. Аналогично п. 3, может быть рассмотрена такая же контактная задача о вдавливании штампа в сферическую поверхность сектора шарового слоя в случае осевой симметрии (фиг. 2). В этой задаче контактные напряжения под штампом

$$q(t) = \delta q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n W_n^{\circ}(R_2)\, q_n(t) \tag{4.1}$$

Здесь δ — перемещение штампа, $q_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются из интегральных уравнений

$$K_\varphi q_0 = \cos\varphi, \quad K_\varphi q_k = P_{\alpha_k - 1/2}(\cos\varphi) \quad (|\varphi| \leqslant \theta) \tag{4.2}$$

$$K_\varphi q \equiv \int_0^\theta q(t)\sin t\, dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W_k(R_2)}{\Delta(k)} \frac{2k+1}{2} P_k(\cos t)\, P_k(\cos\varphi)$$

а D_n находятся из бесконечной системы

$$x_k = b_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n \tag{4.3}$$

$$D_k = \frac{x_k}{W_k^{\circ}(R_2)\cos\alpha_k\gamma}, \quad b_k = -\delta c_k T_{0k}$$

$$a_{kn} = -c_k T_{nk}/\cos\alpha_n\gamma$$

$$c_k = \frac{\pi R_2^2 W_k^{\circ 2}(R_2)\cos\alpha_k\gamma}{2W_{kk}^{\circ}\cos\pi\alpha_k}$$

$$T_{nk} = \int_0^\theta q_n(t)\, P_{\alpha_k - 1/2}(\cos t)\sin t\, dt, \quad T_{kn} = T_{nk}$$

В (4.1)—(4.3) приняты обозначения по аналогии с предыдущей задачей, $W_k^0(R_2)$ соответствует однородной задаче, $W(R_2)/\Delta(k)$ — неоднородной, α_k — корни уравнения $\Delta(\alpha_k)$, лежащие в правой полуплоскости. Не останавливаясь на исследовании ряда (4.1), интегральных уравнений (4.2) и бесконечной системы (4.3), отметим, что здесь, как и в задаче п. 3, можно показать, что элементы b_k и a_{kn} системы (4.3) убывают с ростом номеров по экспоненте, ряд в (4.1) сходится не медленнее, чем сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а решение интегральных уравнений (4.2) может быть получено при помощи большого набора эффективных методов, в том числе и асимптотических, разработанных для подобного класса уравнений (например, [10, 11]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раппопорт Р. М.* Некоторые вопросы расчета толстых сферических оболочек при несимметричной деформации.— Изв. Всесоюз. н.-и. ин-та гидротехники, 1971, т. 95, с. 49—58.
2. *Костарев А. В.* О соотношениях ортогональности однородных решений двумерных задач теории упругости.— Тепловые напряжения в элементах конструкций: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1978, вып. 18, с. 83—87.
3. *Слепян Л. И.* Теорема Бетти и соотношения ортогональности для собственных функций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 83—87.
4. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1979, т. 234, № 2, с. 333—335.
5. *Александров В. М.* Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. н., 1974, № 4, с. 12—16.
6. *Чебаков М. И.* Некоторые динамические и статическая контактные задачи теории упругости для кругового цилиндра конечных размеров.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 923—933.
7. *Китовер К. А.* Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 6, с. 739—748.
8. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Периодические контактные задачи для упругой полосы.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1977, т. 30, № 4, с. 18—33.
9. *Александров В. М.* Аналитические методы решения задач теории упругости для тел конечных размеров с собственно смешанными граничными условиями.— В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-е Днепропетров. ун-та, 1979, с. 21—27.
10. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
11. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 16.II.1986