Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 532.5:534.1

ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН, СОЗДАВАЕМЫХ ЛОКАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Санников В. Ф.

В линейной постановке рассматривается пространственная задача об установившихся волнах, образующихся при обтекании точечных источника или диполя массы равномерным потоком невязкой несжимаемой вертикально стратифицированной жидкости. Выводятся формулы, представляющие характеристики волнового поля в виде суммы однократных интегралов. Развит способ построения полных асимптотических разложений полученных интегралов для больших удалений от генератора волн, в том числе равномерных разложений в окрестности передних фронтов отдельных мод. Известны приближенные решения рассматриваемой задачи ([1—4] и др.). Поведение характеристик волнового поля в окрестности передних фронтов внутренних волн изучалось в [5,6]. Для глубокой жидкости равномерная в окрестности передних фронтов асимптотика выражается через интегралы Френеля [5], а для жидкости конечной глубины— через функции Эйри [6]. Примеры расчета точного решения задачи имеются в [7].

1. Пусть невязкая несжимаемая жидкость занимает область $-\infty < x, y < +\infty$, $-h < z < 0$ и течет с постоянной скоростью c в положительном направлении горизонтальной оси x. Скорость невозмущенной жидкости $\rho_0(z)$ зависит от одной вертикальной координаты z, функция $\rho_0(z)$ — монотонная, невозрастающая. На глубине h_1 от положения невозмущенной свободной поверхности жидкости $z = 0$ находится точечный источник постоянной интенсивности q. В линейном приближении установившееся волновое поле, создаваемое источником, описывается уравнением для вертикальной компоненты скорости $w(x, y, z)$ [2, 3] с граничными условиями

$$D(\rho_0\, \partial w/\partial z) + \rho_0 (N^2 c^{-2} + \partial^2/\partial x^2)\, \Delta_2 w = qD\, [\rho_0 \delta\ (x,\ y,\ z + h_1)] \tag{1.1}$$

$$(D - gc^{-2}\Delta_2)\, w = 0\ (z = 0),\ w = 0\ (z = -h) \tag{1.2}$$

$$w \to 0\ (x^2 + y^2 \to \infty)$$

$$D = \partial^3/\partial x^2 \partial z,\ \ \Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2,\ \ N^2(z) = -g\rho_0^{-1} \partial\rho_0/\partial z$$

Здесь $N(z)$ — частота Брента — Вяйсяля, g — ускорение свободного падения, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. К граничным условиям необходимо добавить условие излучения: основные волновые возмущения формируются вниз по потоку.

Применяя к (1.1), (1.2) преобразование Фурье по переменным x и y, для трансформанты вертикальной компоненты скорости

$$W(r, \theta, z) = (2\pi)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) \exp[-ir(x\cos\theta + y\sin\theta)]\, dx\, dy$$

$$0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

получаем краевую задачу

$$(\rho_0 W_z)_z + \rho_0 [N^2 (c\cos\theta)^{-2} - r^2]\, W = (2\pi)^{-1} q\ [\rho_0 \delta(z + h_1)]_z \tag{1.3}$$

$$W_z - g(c\cos\theta)^{-2}\, W = 0\ (z = 0),\ W = 0\ (z = -h)$$

Выберем в качестве спектрального параметра $\beta = r^2$, и пусть β_n, W_n ($n = 1,2,\ldots$; $\beta_1 > \beta_2 > \ldots$) — совокупность собственных значений и ортонормированных собственных функций задачи Штурма — Лиувилля

$$(\rho_0 W_z)_z + \rho_0 (N^2\lambda - \beta) W = 0 \quad (-h < z < 0) \tag{1.4}$$
$$W_z - g\lambda W = 0 \quad (z = 0), \quad W = 0 \quad (z = -h), \quad \lambda = (c\cos\theta)^{-2}$$
$$\left(\int_{-h}^{0} \rho_0 W_n W_m \, dz = 0, \quad n \neq m; \quad \int_{-h}^{0} \rho_0 W_n^2 \, dz = 1\right)$$

Решение неоднородной краевой задачи (1.3) может быть записано в виде ряда [2, 3, 7]

$$W = (2\pi)^{-1} q\rho_0(-h_1) \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(z, -h_1, \theta)(r^2 - \beta_n)^{-1} \tag{1.5}$$
$$\Phi_n(z, -h_1, \theta) = W_n(z, \theta) W_{nz}(-h_1, \theta)$$

Перечислим кратко основные свойства дисперсионных зависимостей $\beta_n(\theta)$, известные по работам о внутренних волнах от движущихся источников возмущений или о волнах в движущейся жидкости от неподвижных источников. Положим $0 \leqslant \theta < \pi/2$, на другие интервалы изменения θ свойства $\beta_n(\theta)$ легко переносятся, поскольку функции $\beta_n(\theta)$ фактически зависят от $\lambda = (c\cos\theta)^{-2}$. Итак, значения $\beta_n(\theta)$ действительны; функции $\beta_n(\theta)$ монотонно возрастают, стремясь к бесконечности при $\theta \to \pi/2$. Если $c < c_n$ (c_n — скорость распространения длинных волн n-й моды), то $\beta_n(\theta) > 0$. Если $c > c_n$, то функция $\beta_n(\theta)$ имеет один простой нуль $\theta = \theta_n$, $\theta_n = \arccos(c_n/c)$. Известно [1], что при $c > c_n$ угловая ширина области основных волновых возмущений n-й моды равна $2\arcsin(c_n/c)$.

Применяя к (1.5) обратное преобразование Фурье, находим выражение для вертикальной компоненты скорости в виде суммы двойных интегралов

$$w(x, y, z) = (2\pi^2)^{-1} q\rho_0(-h_1) \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, y, z) \tag{1.6}$$

$$w_n(x, y, z) = \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_n(z, -h_1, \theta) I_n(\theta, R, \gamma)\, d\theta \tag{1.7}$$

$$I_n(\theta, R, \gamma) = \int_0^{\infty} r(r^2 - \beta_n)^{-1} \exp[irR\cos(\theta - \gamma)]\, dr \tag{1.8}$$

Здесь R, γ — полярные координаты горизонтальной плоскости (x, y): $x = R\cos\gamma$, $y = R\sin\gamma$. Когда $\beta_n > 0$, путь интегрирования в (1.8) обходит полюс по малой полуокружности в нижней комплексной полуплоскости параметра r. Такой способ обхода особенности определяется при рассмотрении задачи об установлении волнового поля [7].

Вертикальные смещения частиц жидкости в потоке $\zeta(x, y, z)$, вызванные действием источника, в линейном приближении связаны с вертикальной компонентой скорости кинематическим соотношением $c\,\partial\zeta/\partial x = w$. Интегрируя (1.6)—(1.8) по x, находим

$$\zeta(x, y, z) = q(2\pi^2 c)^{-1} \rho_0(-h_1) \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x, y, z) \tag{1.9}$$

$$\zeta_n(x, y, z) = \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_n(z, -h_1, \theta) \cos^{-1}\theta\, J_n(\theta, R, \gamma)\, d\theta \tag{1.10}$$

$$J_n(\theta, R, \gamma) = -i \int_0^{\infty} (r^2 - \beta_n)^{-1} \exp[irR\cos(\theta - \gamma)]\, dr \tag{1.11}$$

Путь интегрирования в (1.11) тот же, что и в (1.8).

Замена переменной $r = |\beta_n|^{1/2} t$ позволяет сгруппировать все параметры, входящие в подынтегральные выражения (1.8) и (1.11), в одну комбинацию: $R\,|\beta_n|^{1/2}\cos(\theta-\gamma)$. Рассматривая J_n и I_n как преобразования Лапласа и используя известные аналитические свойства последнего, выводим

(1.12) $$I_n = G(-R\Delta_n),\quad J_n = r_n^{-1} F(-R\Delta_n),\quad \Delta_n(\theta,\gamma) = r_n(\theta)\cos(\theta-\gamma)$$

Здесь $G(p)$ и $F(p)$ — аналитические продолжения функций

$$g(p) = \int_0^\infty t(t^2+1)^{-1} e^{-pt}\,dt,\quad f(p) = \int_0^\infty (t^2+1)^{-1} e^{-pt}\,dt \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

в комплексную плоскость параметра p с разрезом $(-\infty, 0]$; $r_n(\theta) = \beta_n^{1/2}(\theta)$, если $\beta_n > 0$, и $r_n(\theta) = i[-\beta_n(\theta)]^{1/2}$, если $\beta_n < 0$; корень — арифметический. Отметим, что при изменении θ от $-\pi/2$ до $\pi/2$ кривая $p = -R\Delta_n(\theta,\gamma)$ проходит только вдоль осей комплексной плоскости p. Выбор берега разреза в случае $\operatorname{Im}\Delta_n = 0$, $\operatorname{Re}\Delta_n > 0$ произволен, поскольку в формулах (1.7) и (1.10) требуются лишь действительные части значений функций $G(p)$ и $F(p)$, а $\operatorname{Re} G(p)$ и $\operatorname{Re} F(p)$ изменяются непрерывно при переходе через $(-\infty, 0]$.

2. Опишем кратко свойства функций $G(p)$ и $F(p)$, которые потребуются при анализе полученного решения.

1°. В области $|\arg p| < \pi$ имеют место формулы [8]

(2.1) $$G(p) = -\operatorname{Ci}(p)\cos p + \operatorname{si}(p)\sin p,\quad F(p) = \operatorname{Ci}(p)\sin p + \operatorname{si}(p)\cos p$$

($\operatorname{si}(p) = \pi/2 - \operatorname{Si}(p)$; $\operatorname{Si}(p)$ и $\operatorname{Ci}(p)$ — интегральные синус и косинус).

2°. Представление о поведении функций $G(p)$ и $F(p)$ в окрестности точки $p = 0$ дают выражения, вытекающие из (2.1) и определений $\operatorname{Si}(p)$ и $\operatorname{Ci}(p)$ [8]

(2.2) $$G(p) = -\ln p\cos p + g_1(p),\quad F(p) = \ln p\sin p + f_1(p)$$

где $g_1(p)$ и $f_1(p)$ — целые функции, а для $\ln p$ выбрана главная ветвь в комплексной плоскости p с разрезом $(-\infty, 0]$.

3°. Дифференцируя (2.1), можно проверить, что

(2.3) $$G(p) = -\frac{d}{dp}F(p),\quad F(p) = \frac{d}{dp}[G(p) + \ln p]$$

4°. При $|p| \to \infty$ имеются асимптотические разложения [8]

(2.4) $$G(p) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1)!\, p^{-2m-2},\quad F(p) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m)!\, p^{-2m-1}$$

Эти разложения равномерны по $\arg p$ при $|\arg p| \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

5°. Из определения функций $G(p)$ и $F(p)$ следует, что

(2.5) $$G(-p) = G(p) + is\pi e^{isp},\quad F(-p) = -F(p) + \pi e^{isp},\quad s = \operatorname{sign}(\arg p)$$

При помощи (2.4) и (2.5) строится равномерная в окрестности разреза асимптотика функций $G(p)$ и $F(p)$ при $|p| \to \infty$.

Итак, интегралы (1.8) и (1.11) выражены через известные функции и можно считать, что полученные решения для полей вертикальных смещений и вертикальных скоростей, созданных точечным источником — суммы однократных интегралов вида

$$w_n = \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_n G(-R\Delta_n)\, d\theta, \tag{2.6}$$

$$\zeta_n = \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_n (r_n \cos\theta)^{-1} F(-R\Delta_n)\, d\theta$$

3. Проведем анализ вклада n-й моды в дальней области волнового поля (при $R \to +\infty$). Из рассмотрения исключена окрестность вертикальной плоскости $y = 0$: полагаем, что $\delta \leqslant \gamma \leqslant \pi - \delta$, δ — малое положительное число. Предварительно сделаем некоторые замечания о построении асимптотических разложений интегралов (2.6). Формула (2.2) показывает, что подынтегральные функции в (2.6) имеют логарифмические особенности в точках, являющихся нулями Δ_n. Функция $\Delta_n(\theta, \gamma) = r_n(\theta)\cos(\theta - \gamma)$ имеет нуль $\theta = \theta_0$, $\theta_0 = \gamma - \pi/2$, и, если $c > c_n$, еще $\theta = \pm\theta_n$ — нули $r_n(\theta)$. Случай $c = c_n$, когда $\theta_n = 0$, в работе не рассматривается. Если $\theta_0 \neq \pm\theta_n$, то θ_0 — простой нуль: $d\Delta_n(\theta_0, r)/d\theta = r_n(\theta_0) \neq 0$, а точки $\pm\theta_n$ — нули кратности $1/2$:

$$d\Delta_n^2(\pm\theta_n, \gamma)/d\theta = \cos^2(\pm\theta_n - \gamma)\, d\beta_n(\pm\theta_n)/d\theta \neq 0$$

Используем разбиение единицы [9]

$$1 \equiv \eta(\theta) + \eta(\theta, \theta_0) + \eta(\theta, \theta_n) + \eta(\theta, -\theta_n) \tag{3.1}$$

Здесь $\eta(\theta, \tau)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция, отличная от нуля лишь в некоторой окрестности $U(\tau)$ точки $\theta = \tau$, $\eta(\tau, \tau) = 1$, $d^m\eta(\tau, \tau)/d\theta^m = 0$, $m \geqslant 1$. Функция $\eta(\theta)$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ дополняет до единицы сумму остальных трех слагаемых.

В соответствии с (3.1) интегралы (2.6) раскладываются в сумму четырех интегралов, три из которых — вклады нулей Δ_n. Носитель функции $\eta(\theta)$ представляет собой объединение интервалов (двух — в случае $c < c_n$ и четырех при $c > c_n$), на которых величина $|\Delta_n|$ равномерно ограничена снизу. По теореме об интегрировании асимптотических рядов [9], асимптотические при $R \to +\infty$ формулы для w_n и ζ_n могут быть записаны при помощи (2.4) и (2.5) в виде суммы степенного ряда и интеграла Фурье. Асимптотика интеграла Фурье с точностью до $O(R^{-\infty})$ равна сумме вкладов граничных и стационарных точек [9]. Граничные точки анализируемых интегралов — нули Δ_n и $\theta = \pi/2$. Вклад нулей Δ_n уже выделен введением функций $\eta(\theta, \tau)$, а точка $\theta = \pi/2$ при $\delta \leqslant \gamma \leqslant \pi - \delta$ дает вклад $O(R^{-\infty})$ в интегралы (2.6). Стационарные точки θ_k являются решениями уравнения $d\Delta_n/d\theta = 0$ при условии, что $\operatorname{Re}\Delta_n > 0$, $\operatorname{Im}\Delta_n = 0$. Число стационарных точек $N(\gamma)$ зависит от параметра γ. Можно показать, что $N(\gamma)$ всегда конечно.

Итак, из проведенного анализа следует, что асимптотика интегралов (2.6) с точностью до $O(R^{-\infty})$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} w_n \\ \zeta_n \end{bmatrix} \sim S_{n\nu}(R) + \sum_{\tau=\theta_0, \pm\theta_n} Z_{n\nu}(R, \tau) + \sum_{k=1}^{N(\gamma)} D_{n\nu}(R, \theta_k) \tag{3.2}$$

$$S_{n\nu}(p) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+\nu}(2m + 1 - \nu)!\, R^{-\nu-2m-2} \times \tag{3.3}$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_{n\nu}\eta\Delta_n^{\nu-2m-2}\, d\theta, \quad \Phi_{n\nu} = \Phi_n(r_n\cos\theta)^{-\nu}$$

Здесь $\nu = 0$ для w_n и $\nu = 1$ для ζ_n; вкладом стационарной точки θ_k является интеграл

$$D_{n\nu}(R, \theta_k) = \pi \operatorname{Re}\left[i^{(1-\nu)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_{n\nu}\eta(\theta, \theta_k) \exp(iR\Delta_n)\, d\theta\right] \tag{3.4}$$

вкладом нуля τ функции Δ_n — интеграл

$$Z_{n\nu}(R, \tau) = \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_{n\nu}\eta(\theta, \tau)\, E_\nu(-R\Delta_n)\, d\theta \tag{3.5}$$

$$(E_0(p) = G(p), \quad E_1(p) = F(p))$$

Формулы, дающие полные асимптотические разложения вкладов простых, близких и кратных стационарных точек, имеются в [9].

Асимптотику интегралов (3.5) находим интегрированием по частям при помощи (2.3). Первое интегрирование дает

$$Z_{n\nu}(R, \tau) = \nu R^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} M[\Phi_{n\nu}\eta(\theta, \tau)] \ln|\Delta_n|\, d\theta -$$

$$-(-1)^\nu R^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} M[\Phi_{n\nu}\eta(\theta, \tau)]\, E_{1-\nu}(-R\Delta_n)\, d\theta,$$

$$M[\Phi] = \left(\frac{\Phi}{\Delta'_{n\theta}}\right)'_\theta$$

Второй интеграл в этой формуле имеет тот же тип, что и исходный. Интегрируя его по частям, получим член ряда $O(R^{-2})$ и т. д. В результате имеем

$$Z_{n\nu}(R, \tau) \sim \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+\nu} R^{\nu-2m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} M^{2m-\nu}[\Phi_{n\nu}\eta(\theta, \tau)] \ln|\Delta_n|\, d\theta \tag{3.6}$$

Заметим, что асимптотики вкладов нулей по θ функции $\Delta_n(\theta, \gamma)$ представляют собой степенные ряды, аналогичные (3.3). Пусть

$$S^1_{n\nu}(R) = S_{n\nu}(R) + \sum_{\tau=\theta_0, \pm\theta_n} Z_{n\nu}(R, \tau)$$

складывая почленно ряды для $S_{n\nu}$ и $Z_{n\nu}$, выводим

$$S^1_{n\nu}(R) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+\nu} (2m + 1 - \nu)!\, \alpha_{nm}(\nu)\, R^{\nu-2m-2} \tag{3.7}$$

$$\alpha_{nm}(\nu) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_{n\nu}\eta(\theta)\, \Delta_n^{\nu-2m-2}\, d\theta - \tag{3.8}$$

$$-\frac{1}{(2m+1-\nu)!} \sum_{\tau=\theta_0, \pm\theta_n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} M^{2m+2-\nu}[\Phi_{n\nu}\eta(\theta, \tau)] \ln|\Delta_n|\, d\theta$$

Можно проверить, что (3.8) — регуляризованная форма записи интеграла

$$\alpha_{nm}(\nu) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_n (r_n \cos\theta)^{-\nu}\, \Delta_n^{\nu-2m-2}\, d\theta \tag{3.9}$$

в котором $\Delta_n^{\nu-2m-2}$ нужно рассматривать как обобщенную функцию. В частности

$$\alpha_{n0}(1) = \text{v. p.} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_n [r_n^2 \cos\theta \cos(\theta - \gamma)]^{-1} d\theta$$

Итак, асимптотиками интегралов (2.6) являются суммы степенных рядов (3.7) и вкладов стационарных точек. Первый член степенного ряда для w_n есть $O(R^{-2})$, а для ζ_n — величина $O(R^{-1})$.

4. Полученные асимптотические разложения не будут равномерными по γ: $\delta \leqslant \gamma \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$, когда $\theta_0 \to -\theta_n$ или $\theta_0 \to \theta_n$. При $\theta_0 \to -\theta_n - 0$ происходит слияние нулей Δ_n и стационарной точки, заключенной между ними. Вертикальная плоскость в пространстве (x, y, z), для которой $\theta_0 = -\theta_n$ или $\gamma = \gamma_n$, $\gamma_n = \arcsin c_n/c$, соответствует границе области основных волновых возмущений n-й моды. В случае $\gamma > \gamma_n$ уравнение стационарной фазы $d\Delta_n/d\theta = 0$ не имеет решений. Когда $\theta_0 \to -\theta_n + 0$ или $\theta_0 \to \theta_n$, происходит слияние только нулей Δ_n. Можно проверить, что при $-\theta_n - \theta_0 \geqslant \delta_1$, $\delta_1 > 0$ стационарные точки равномерно отстоят от нулей Δ_n и асимптотические разложения (3.2) равномерны по $\gamma : \delta \leqslant \gamma \leqslant \pi - \delta$.

Обозначим $\omega_n = -\theta_n - \theta_0$ и пусть $|\omega_n| \lll 1$, т. е. рассматривается область переднего фронта n-й моды. Асимптотика интегралов (2.6) с точностью до $O(R^{-\infty})$ в этом случае имеет вид

$$\begin{bmatrix} w_n \\ \zeta_n \end{bmatrix} \sim S_{n\nu}(R) + Z_{n\nu}(R, \theta_n) + Y_{n\nu}(R) \tag{4.1}$$

Последнее слагаемое в этой формуле представляет собой вклад близких точек θ_0 и $-\theta_n$:

$$Y_{n\nu}(R) = \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi_{n\nu} \eta(\theta, \theta_0, -\theta_n) E_\nu(-R\Delta_n)\, d\theta \tag{4.2}$$

Здесь $\eta(\theta, \theta_0, -\theta_n) = \eta(\theta, \theta_0) + \eta(\theta, -\theta_n)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция, равная единице на отрезке, концы которого — точки θ_0 и $-\theta_n$.

Найдем асимптотику при $R \to +\infty$ интеграла (4.2). Замена $\theta = -\theta_n - u^2$, $u = (-\theta_n - \theta)^{1/2}$ (выбрана главная ветвь корня) регуляризует Δ_n и подынтегральную функцию в (4.2) при $\nu = 1$. Выражение для Δ_n теперь можно записать в виде

$$\Delta_n(\theta, \gamma) = S_n(u, \omega_n), \quad S_n(u, \omega_n) = u p_n(u^2) \sin(\omega_n - u^2)$$

где $p_n(v) = \sqrt{r_n^2(\theta_n + v)/v}$ — голоморфная функция в точке $v = 0$. Это следует из того, что дисперсионные зависимости $\beta_n(\lambda)$ задачи (1.4) — голоморфные функции, $r_n^2(\theta_n) = 0$ и $dr_n^2(\theta_n)/d\theta > 0$. Можно проверить, что функция $S_n(u, \omega_n)$ удовлетворяет всем условиям лемм 6.2.1—3 [9]. Применяя их с учетом того, что $S_n(u, \omega_n)$ — нечетная функция переменной u, и возвращаясь затем к исходной переменной θ, имеем:

1°. При малых $|\omega_n| \neq 0$ уравнение $d\Delta_n/d\theta = 0$ имеет только одно решение $\theta_{1n}(\omega_n)$, $\theta_{1n}(0) = -\theta_n$. Функция $\theta_{1n}(\omega_n)$ голоморфна при малых ω_n и

$$\theta_{1n}(\omega_n) = -\theta_n - \frac{\omega_n}{3}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \omega_n^k\right)$$

2°. Существует функция $u_1(t, \omega)$, голоморфная по (t, ω) в некоторой окрестности точки (0, 0), такая, что $u_1(0, \omega_n) = -\theta_n$, и после замены $\theta = u_1(\xi^2, \omega_n)$ функция $\Delta_n(\theta, \gamma)$ принимает вид

$$(4.3)\qquad \Delta_n(\theta, \gamma) = -S_0(\xi, B),\ S_0(\xi, B) = \xi^3/3 - \xi B$$
$$B = B(\omega_n),\quad B(\omega_n) = r_n^2\,[3\sin(\theta - \gamma)/(r_n^2)_\theta']^{2/3}_{\theta=\theta_{1n}}$$

В выражении для $B(\omega_n)$ выбрана арифметическая ветвь корня.

В обратной замене $\xi = (-\theta_n - \theta)^{1/2}\xi_1(-\theta_n - \theta, \omega_n)$ функция $\zeta_1(\tau, \omega)$ голоморфна по (τ, ω) в некоторой окрестности точки (0, 0).

3°. Функция $B(\omega_n)$ голоморфна в точке $\omega_n = 0$, причем

$$B(\omega_n) = \omega_n\left[\frac{1}{3}\,\frac{dr_n^2(\theta_{1n})}{d\theta}\right]^{1/3}[1 + O(\omega_n)]$$

Замена (4.3) преобразует интегралы (4.2) к виду

$$(4.4)\qquad Y_{n\nu}(R) = \operatorname{Re}\int_\infty^{i\infty} \xi^{1-\nu}\varphi_{n\nu}(\xi^2)\,E_\nu[RS_0(\xi, B)]\,d\xi$$
$$\varphi_{n\nu}(\xi^2) = \xi^{\nu-1}\Phi_{n\nu}\eta(\theta, \theta_0, -\theta_n)\,d\theta/d\xi$$

Там, где функции действительной переменной не определены, они продолжены нулями. Можно проверить, что $\varphi_{n\nu}(t) \in C^\infty$.

Асимптотику интегралов (4.4) находим интегрированием по частям, используя (2.3). На первом шаге имеем

$$(4.5)\qquad Y_{n\nu}(R) = \varphi_{n\nu}(B)\,J_{1-\nu}(R, B) - \nu R^{-1}\int_\infty^{i\infty}\xi D_1\varphi_{n\nu}(\xi^2)\ln|S_0|\,d\xi +$$
$$+ (-1)^\nu R^{-1}\int_\infty^{i\infty}\xi^\nu D_\nu\varphi_{n\nu}(\xi^2)\,E_{1-\nu}(RS_0)\,d\xi$$
$$J_{1-\nu}(R, B) = \operatorname{Re}\int_\infty^{i\infty}\xi^{1-\nu}E_\nu(RS_0)\,d\xi,\quad D_0\varphi(\xi^2) = (N + \xi^2 D_1)\,\varphi(\xi)^2$$
$$N\varphi(\xi^2) = [\varphi(\xi^2) - \varphi(B)]\,/\,(\xi^2 - B),\ D_1\varphi(\xi^2) = 2d\,[N\varphi(\xi^2)]/d\xi^2$$

Последний интеграл в (4.5) имеет тот же тип, что и исходный. Это позволяет рекуррентно вывести асимптотические при $R \to +\infty$ разложения интегралов (4.4). В результате получаем

$$(4.6)\qquad Y_{n\nu}(R) \sim -\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m R^{\nu-2m-2}\int_\infty^{i\infty}\xi D_1{}^\nu(D_{1-\nu}D_\nu)^m\varphi_{n\nu}(\xi^2)\ln|S_0|\,d\xi +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m R^{-2m}\,[J_{1-\nu}(R, B) + (-1)^\nu R^{-1}J_\nu(R, B)\,D_\nu]\times$$
$$\times (D_{1-\nu}D_\nu)^m\varphi_{n\nu}(B)$$

Вычислим интегралы $J_{1-\nu}(R, B)$. Из (2.5) следует, что

$$J_{1-\nu}(R, B) = (-1)^\nu I_{1-\nu}(R, B) + \pi\operatorname{Im}\left\{i^\nu\int_\infty^{i\infty}\xi^{1-\nu}\exp[iRS_0(\xi, B)]\,d\xi\right\}$$
$$I_{1-\nu}(R, B) = \operatorname{Re}\int_\infty^{i\infty}\xi^{1-\nu}E_\nu[-RS_0(\xi, B)]\,d\xi$$

Функции $H_\nu(\xi) = E_\nu[-RS_0(\xi, B)]$ голоморфны в области $0 < \arg\xi < \pi/2$, и, поскольку при $|\xi| \to \infty$, как это следует из (2.4), $H_\nu(\xi) = O(\xi^{-6+3\nu})$, можно проверить, что интегралы $I_{1-\nu}(R, B)$ равны нулю.

Оставшиеся однократные интегралы после замены $\xi = R^{-1/3} t$ выражаются через функцию Эйри [8] и ее производную

$$J_0(R,\ B) = \pi^2 R^{-2/3}\,\mathrm{Ai}'(-BR^{2/3}) \tag{4.7}$$
$$J_1(R,\ B) = -\pi^2 R^{-1/3}\,\mathrm{Ai}(-BR^{-2/3})$$

Итак, формулы (4.1), (4.6), (4.7) вместе с (3.3) и (3.6) показывают, что равномерные по γ в окрестности переднего фронта $\gamma = \gamma_n$ асимптотические разложения при $R \to +\infty$ интегралов (2.6) представлены в виде сумм степенных рядов и рядов с функциями Эйри и ее производными. Выпишем главные члены асимптотических разложений при $|\gamma - \gamma_n| \ll 1$

$$w_n = -\pi^2 R^{-2/3}\,\mathrm{Ai}'(-BR^{2/3})\,\Phi_n \sqrt{-2/B^{1/2}\Delta''_{n\theta\theta}}\,\Big|_{\theta=\theta_{1n}} + O(R^{-4/3}) \tag{4.8}$$
$$\zeta_n = \pi^2 R^{-1/3}\,\mathrm{Ai}(-BR^{2/3})\,\Phi_n (r_n \cos\theta)^{-1} \sqrt{-2B^{1/2}/\Delta''_{n\theta\theta}}\,\Big|_{\theta=\theta_{1n}} + O(R^{-1})$$

При удалении от переднего фронта в глубь волновой зоны, когда аргумент функции Эйри становится большим, подстановка в (4.8) асимптотик Ai и Ai′ [8] дает главные члены асимптотических разложений вкладов простой стационарной точки θ_{1n}.

Аналогично рассматривается и второй случай слияния особенностей, когда $\theta_0 \to \theta_n$. При этом соответствующие (4.6) формулы вместо интегралов $J_\nu(R,\ B)$ содержат интегралы $I_\nu(R,\ B)$ и асимптотика вклада близких точек θ_0 и θ_n является только степенным рядом.

Главные члены (4.8) асимптотики вклада n-й моды в окрестности ее переднего фронта при $c > c_n$ аналогичны полученным впервые в [6]. Отличный от этого результат работы [5] объясняется тем, что в [5] рассмотрен предельный случай тонкого термоклина и стремящейся к бесконечности глубины жидкости. В таком приближении дисперсионная зависимость частоты ω от волнового числа r при малых значениях r раскладывается в ряд

$$\omega = c_0 r + br^2 + \ldots,\quad c_0,\ b = \text{const},\quad b \neq 0$$

Для жидкости конечной глубины дисперсионные зависимости $\omega_n(r)$ раскладываются в ряды по нечетным степеням r. Поскольку в окрестности переднего фронта n-й моды основной вклад в (2.6) дает интервал, соответствующий малым значениям волнового числа, отмеченное различие является принципиальным.

В заключение отметим, что вертикальные смещения $\eta(x,\ y,\ z)$, вызванные действием точечного диполя, ориентированного против потока и имеющего момент d, связаны с вертикальными смещениями $\zeta(x,\ y,\ z)$, вызванными действием точечного источника интенсивности q, простой формулой: $\eta = dq^{-1}\partial\zeta/\partial x$. Сравнивая ее с кинематическим соотношением $w = c\partial\zeta/dx$, находим, что $\eta = d(cq)^{-1}w$ и полученные в этой работе асимптотические формулы для w лишь постоянным множителем отличаются от формул для поля вертикальных смещений, вызванных действием диполя. Рассмотренные случаи слияния особенностей, когда $\theta_0 \to \pm\theta_n$, имеют место только при $c > c_n$. Асимптотические разложения интегралов (2.6) в случае $c < c_n$ рассматривались в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keller J. B., Munk W. H.* Internal wave wakes of body moving in stratified fluid.— Phys. Fluids, 1970, v. 13, No. 6, p. 1425—1431.
2. *Miles J. W.* Internal waves generated by a horizontally moving source.— Geophys. Fluid Dyn., 1970, v. 2, No. 1, p. 63—87.

3. *Стурова И. В., Сухарев В. А.* Генерация внутренних волн локальными возмущениями в жидкости с заданным изменением плотности по глубине.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 6, с. 625—631.
4. *Санников В. Ф., Черкесов Л. В.* Развитие пространственных внутренних волн в потоке стратифицированной жидкости.— В кн.: Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: Изд-е Мор. гидрофизич. ин-та АН УССР, 1981, с. 86—92.
5. *Gray E. P., Hart R. W., Farell R. A.* The structure of the internal wave Mach front generated by a point source moving in a stratified fluid.— Phys. Fluids, 1983, v. 26, No. 10, p. 2919—2931.
6. *Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я.* Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1984, т. 20, № 6, с. 526—532.
7. *Санников В. Ф.* Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости.— В кн.: Теоретические исследования волновых процессов в океана. Севастополь: Изд-е Мор. гидрофизич. ин-та, 1983, с. 68—76.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. Абрамовица М., Стигана И. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
10. *Санников В. Ф.* Установившиеся внутренние волны, генерируемые локальным источником возмущений в потоке.— В кн.: Моделирование поверхностных и внутренних волн. Севастополь: Изд-е Мор. гидрофизич. ин-та АН УССР, 1984, с. 26—31.

Севастополь

Поступила в редакцию
3.VI.1985