

УДК 532.5.534.1

О ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕМ ЗАПУСК ВИБРАТОРА В ДОЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНКЕ

Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.

Рассматривается задача о развитии двумерных линейных возмущений в пограничном слое, порожденных запуском вибратора. Для построения решения используются преобразование Фурье по продольной координате и Лапласа по времени. Обратные преобразования вычисляются для больших значений характерного времени t и всех значений продольной координаты x . Изучены области, расположенные вниз по потоку от вибратора, в первой из которых возмущения будут иметь вид волны Толлмина—Шлихтинга, переходящей в волновой пакет во второй области. Отмечается идентичность структуры волновых пакетов, отнормированных на максимальную амплитуду для данного пакета, для разных частот колебаний вибратора.

В экспериментальных устройствах для исследования устойчивости пограничного слоя часто используются вибрирующие ленты, расположенные либо на обтекаемой поверхности, либо внутри потока. Измерения ведутся, когда устанавливается гармонический режим работы вибратора, переходный процесс, возникающий при его запуске, считается мало интересным и по этой причине не рассматривается. Если частота вынужденных колебаний превышает критическую, то постановка соответствующей краевой задачи наталкивается на существенные трудности, поскольку решение необходимо искать в классе функций с экспоненциальным ростом по продольной координате. Условия, гарантирующие единственность решения, нарушаются, так как к любому решению можно прибавить экспоненциально возрастающую собственную функцию однородной краевой задачи с произвольным весом. Выход из создавшейся ситуации опирается на предложенный в [1] постулат, согласно которому решение в каждый фиксированный момент времени и в каждой заданной точке пространства должно являться непрерывной функцией параметров, включая частоту вынужденных гармонических возмущений. Этот постулат обеспечивает единственность в выборе весового коэффициента перед собственной функцией.

Чтобы обосновать или опровергнуть обсуждаемый постулат, следует построить решение более общей задачи с начальными данными о запуске вибратора, включаемого в некоторый момент времени. Такая задача рассматривалась в [2], где основное внимание сосредоточено на вычислении давления для неограниченно растущих моментов времени и больших, но конечных расстояний вдоль длины пластинки вниз по потоку от источника колебаний. Показано, что для рассматриваемых времен и расстояний возмущения за вибратором принимают в соответствии с' выдвинутым в [1] постулатом форму монохроматической волны Толлмина—Шлихтинга с частотой, равной частоте источника.

Ниже изучается течение в промежуточной области, где происходит сопряжение расположенного впереди нее невозмущенного пограничного слоя с находящейся вслед за ней волной Толлмина—Шлихтинга. Эта область занята вихревым пятном (волновым пакетом), характеризующим запуск вибратора. Перемещающийся наиболее быстро вперед язык вихревого пятна несет в своей структуре информацию о начальной стадии движения выведенного из покоя вибратора, однако в этой части амплитуда колебаний газа мала. Центр пятна содержит пульсации с наибольшей амплитудой, причем их характер определяется внутренними свойствами пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. В задней части пятна размах колебаний снова уменьшается, здесь поле возмущений зависит от частоты вынуждающей силы, но на докритических частотах эта зависимость проявляется слабо. В экспериментальных устройствах вибратор, работающий на докритической частоте, можно применять для генерирования ламинарных вихревых пятен.

1. Формулировка задачи. Пусть на пластинку с расположенным на ее поверхности вибратором набегают равномерный дозвуковой поток совершенного газа. Выберем частоту, продольный размер и амплитуду колебаний источника такими, чтобы возбуждаемое им движение могло быть описано теорией свободного взаимодействия пограничного слоя [3—5]. Выразив как независимые переменные, так и искомые функции в единицах специальной безразмерной системы этой теории, устремим интенсивность возмущений к нулю. В названной системе t — время, x и y — декартовы координаты пространства, а u' и v' — составляющие вектора пульсационной скорости, которые находятся из решения линеаризованных уравнений Прандтля

$$(1.1) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + y \frac{\partial u'}{\partial x} + v' = \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p'}{\partial y} = 0$$

для несжимаемой жидкости, где не известное заранее избыточное давление p' удовлетворяет дополнительному предельному условию

$$(1.2) \quad u' \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(t, x_2)}{x_2 - x_1} dx_2, \quad y \rightarrow \infty$$

Примем, что запуск вибратора осуществляется в момент $t = 0$, следовательно, при $t < 0$ поток набегают на гладкую пластинку $y_w = 0$. Когда $t \geq 0$, будем считать подвижную часть обтекаемой поверхности (мембрану) имеющей треугольную форму и колеблющейся по гармоническому закону; отсюда

$$(1.3) \quad y_w = f(x) \sin \omega_0 t$$

$$(1.4) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } x \geq a \\ 2x, & 0 \leq x \leq b \\ 2b(a-x)/(a-b), & b \leq x \leq a \end{cases}$$

Частота ω_0 и параметры a , b положительны.

Поскольку исходный пограничный слой Блазиуса невозмущенный, начальное условие гласит:

$$(1.5) \quad u' = 0, \quad t = 0$$

Условия прилипания газа к вибрирующей мембране

$$(1.6) \quad u' = -f(x) \sin \omega_0 t, \quad v' = \omega_0 f(x) \cos \omega_0 t, \quad y = 0, \quad t \geq 0$$

2. Применение интегральных преобразований. Разложим искомое решение задачи (1.1)—(1.6) в интегралы Лапласа по времени и Фурье по продольной координате

$$\begin{aligned} & [\bar{u}(\omega, k, y), \bar{v}(\omega, k, y), \bar{p}(\omega, k)] = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega t + ikx)} [u'(t, x, y), v'(t, x, y), p'(t, x)] dt \end{aligned}$$

В результате их подстановки в линеаризованные уравнения Прандтля получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций-образов \bar{u} , \bar{v} и \bar{p} . Интегрирование этой системы следует развитой в [6—9] схеме и опирается на введение независимой комплексной переменной

$$(2.1) \quad z = \Omega + i^{1/2} k^{1/2} y, \quad \Omega = i^{-2/3} \omega k^{-2/3}$$

Основная трудность состоит, как всегда, в построении оригиналов при помощи обратных преобразований. Из всех рассматриваемых образов

наиболее простое выражение имеет \bar{p} благодаря независимости от поперечной координаты y . Обозначим $\text{Ai}(z)$ функцию Эйри и положим

$$(2.2) \quad F(\Omega, k) = \Phi(\Omega) - Q(k)$$

$$\Phi = \frac{d \text{Ai}(\Omega)}{d\Omega} I^{-1}(\Omega), \quad I = \int_{\Omega}^{\infty} \text{Ai}(z) dz, \quad Q = i^{1/3} k^{1/3} |k|$$

Принимая во внимание, что

$$f_F = -\frac{2}{k^2} \left(1 - \frac{a}{a-b} e^{-ibk} + \frac{b}{a-b} e^{-iak} \right)$$

является преобразованием Фурье функции f , заданной равенством (1.4), имеем [6—9]

$$(2.3) \quad \bar{p} = -\omega_0 |k| f_F(k) \Phi(\Omega) [(\omega^2 + \omega_0^2) F(\Omega, k)]^{-1}$$

Выясним, как изменяется давление вдоль пограничного слоя. Вычисление составляющих вектора возмущенной скорости, хотя и более сложное в техническом отношении, не наталкивается на решение каких-либо новых принципиальных вопросов.

Обращение формулы для \bar{p} требует знания структуры обеих комплексных плоскостей ω и k . Если начать с вычисления обратного преобразования Лапласа, то в нем k будет играть роль действительного (отрицательного или положительного) параметра. При этом условия в плоскости ω отсутствуют другие особенности помимо счетного набора полюсов функции-образа. Вторая плоскость, на которой идет последующее рассмотрение обратного преобразования Фурье, выглядит намного сложнее. Действительно, переход к переменной z при помощи соотношений (2.1) и выделение однозначной ветви у функции $k^{1/3}$ требует, прежде всего, проведения разреза вдоль мнимой положительной полуоси из начала координат до бесконечности. Далее, величина $F(\Omega, k)$ из знаменателя формулы (2.3) для \bar{p} содержит неаналитическую функцию $|k|$. Будучи приравненной нулю, она дает дисперсионное соотношение [6—9]

$$(2.4) \quad \Phi(\Omega) = Q(k)$$

связывающее частоту с волновым числом свободных колебаний. Наконец, в комплексной плоскости k расположено счетное количество точек ветвления, появление которых обусловлено возможностью пересечения дисперсионных кривых и которые необходимо принимать во внимание при деформации пути интегрирования в обратном преобразовании Фурье. Существенно, однако, что ни одна из рассматриваемых точек ветвления не попадает на действительную ось.

Пусть $\Omega_m(k)$ — m -й корень уравнения (2.4), а $\omega_m(k)$ — соответствующая ему дисперсионная кривая, причем $m = 1, 2, \dots$. Из определения (2.2) функций F и Φ вытекает дифференциальная связь

$$(2.5) \quad \frac{d \text{Ai}[\Omega_m(k)]}{d\Omega} \frac{d\Phi[\Omega_m(k)]}{d\Omega} = \Phi[\Omega_m(k)] \frac{\partial H[\Omega_m(k), k]}{\partial \Omega}$$

$$(2.6) \quad H = F(\Omega, k) I(\Omega) = d \text{Ai}(\Omega)/dz - i^{1/3} k^{1/3} |k| I(\Omega)$$

При действительных k действительная часть $\omega_1(k)$ может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Все остальные дисперсионные кривые $\omega_m(k)$ лежат целиком в левой полуплоскости ω . Равенство $\text{Re} \omega_1(k) = 0$ фиксирует критическую частоту $\omega_* = 2,298$ и волновое число $k_* = 1,0005$, которые характеризуют нейтральные колебания.

Воспользовавшись тем, что при действительных k все особенности \bar{p} в плоскости ω сводятся к счетному набору полюсов, разложим обратное преобразование Лапласа в ряд по вычетам подынтегральной функции. При $t \gg 1$ главными из всех членов ряда будут два, применение леммы Лапласа к сумме оставшихся членов ведет к оценке $O(t^{-6})$ равномерно по x [2]. Дальнейший анализ основан на пренебрежении названной суммой.

Произведенное упрощение позволяет записать обратное преобразование Фурье в виде [2, 9]

$$(2.7) \quad p' = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [I_1(x) \exp(i\omega_0 t) + I_2(t, x)]$$

$$I_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |k| f_F(k) \frac{d \operatorname{Ai} [\Omega_0(k)]}{d\Omega} e^{ikx} \frac{1}{H[\Omega_0(k), k]} dk$$

$$I_2 = -i^{3/2} \omega_0 \int_0^{\infty} k^{3/2} f_F(k) \frac{d \operatorname{Ai} [\Omega_1(k)]}{d\Omega} \exp(\omega_1(k) t + ikx) \times$$

$$\times \{[\omega_1^2(k) + \omega_0^2] \partial H[\Omega_1(k), k] / \partial \Omega\}^{-1} dk$$

если положить $\Omega_0 = i^{3/2} \omega_0 k^{-3/2}$ и обратиться к дифференциальной связи (2.5) в сочетании с определением (2.6) функции H .

Первое слагаемое в выражении (2.7) для p' задает пульсации избыточного давления вблизи вибратора, которые, согласно [8], затухают как $O(x^{-2})$, для всех частот, кроме критической. Поскольку основная цель — выяснение формы возмущений в пределе, когда не только $t \gg 1$, но и $x \gg 1$, то это слагаемое можно, вообще говоря, за малостью опустить, но для полноты картины обусловленная им поправка учитывалась при построении некоторых из приводимых ниже графиков, относящихся к умеренным моментам времени и расстояниям от источника.

3. Комплексные плоскости Ω и k . Для докритических частот $\omega_0 < \omega_*$ интеграл I_2 дает вклад $O(t^{-6})$ в пульсации давления в области $x < V_b t$, где V_b — постоянная. При работе вибратора на закритических частотах $\omega_0 > \omega_*$ тот же интеграл описывает волну Толлмина — Шлихтинга с экспоненциально нарастающей амплитудой колебаний в указанной области. Изложенные результаты, которые были получены в [2], служат обоснованием выдвинутого в [1] постулата, определяющего структуру возмущений при переходе частоты гармонического осциллятора через критическую.

Вычислим постоянную V_b и изучим, что происходит в области $x > V_b(t)$ как при докритических, так и закритических частотах. Интеграл I_2 после дифференцирования равенства (2.6) принимает вид

$$(3.1) \quad I_2 = -i^{3/2} \omega_0 \int_0^{\infty} \chi(k; \omega_0) \exp(t\varphi(k; V)) dk$$

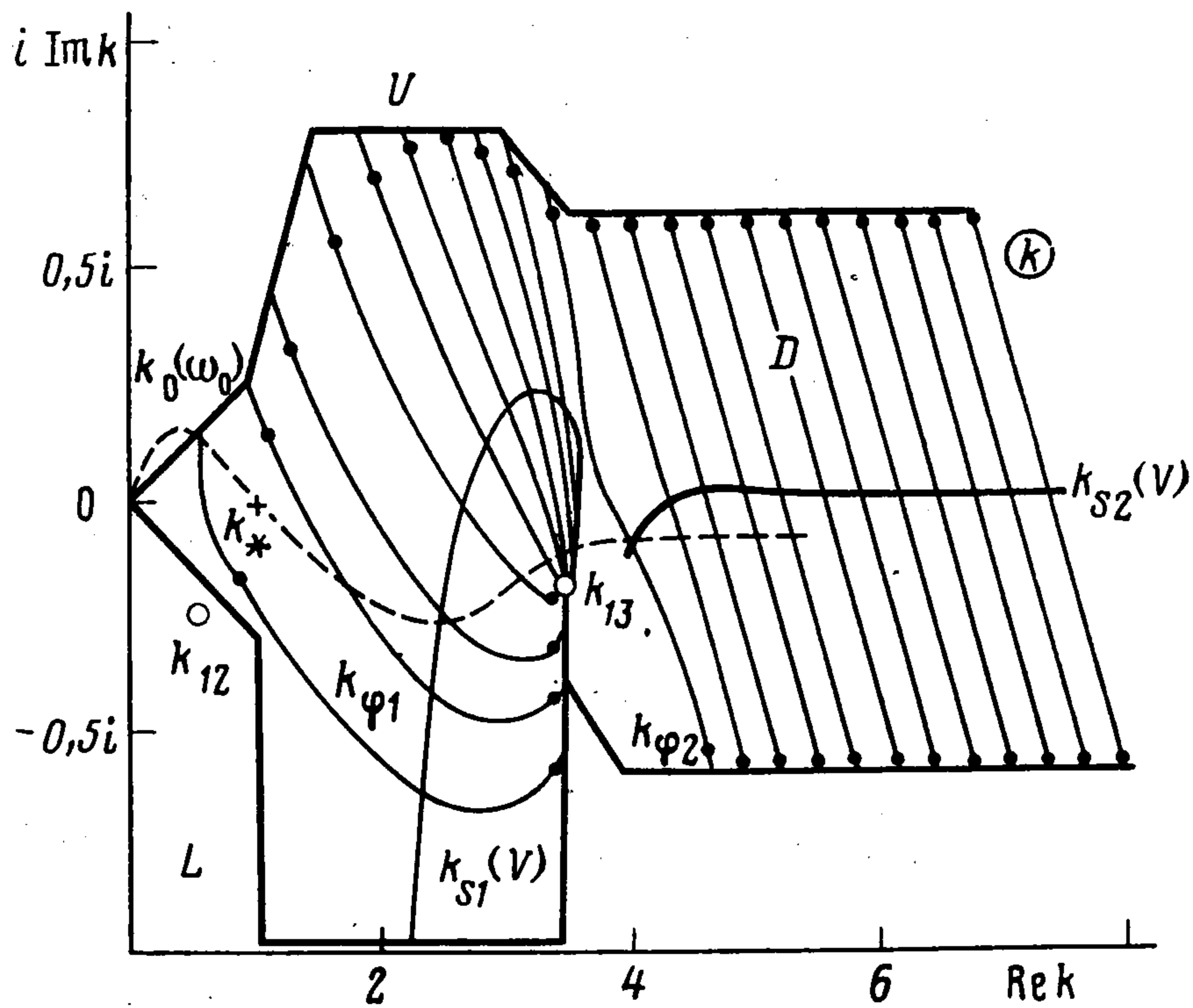
$$\chi = k^{3/2} f_F(k) \frac{d \operatorname{Ai} [\Omega_1(k)]}{d\Omega} \{[\omega_1^2(k) + \omega_0^2] [\omega_1(k) + ik^2] \operatorname{Ai} [\Omega_1(k)]\}^{-1}$$

$$(3.2) \quad \varphi(k; V) = \omega_1(k) + iVk; V = x/t$$

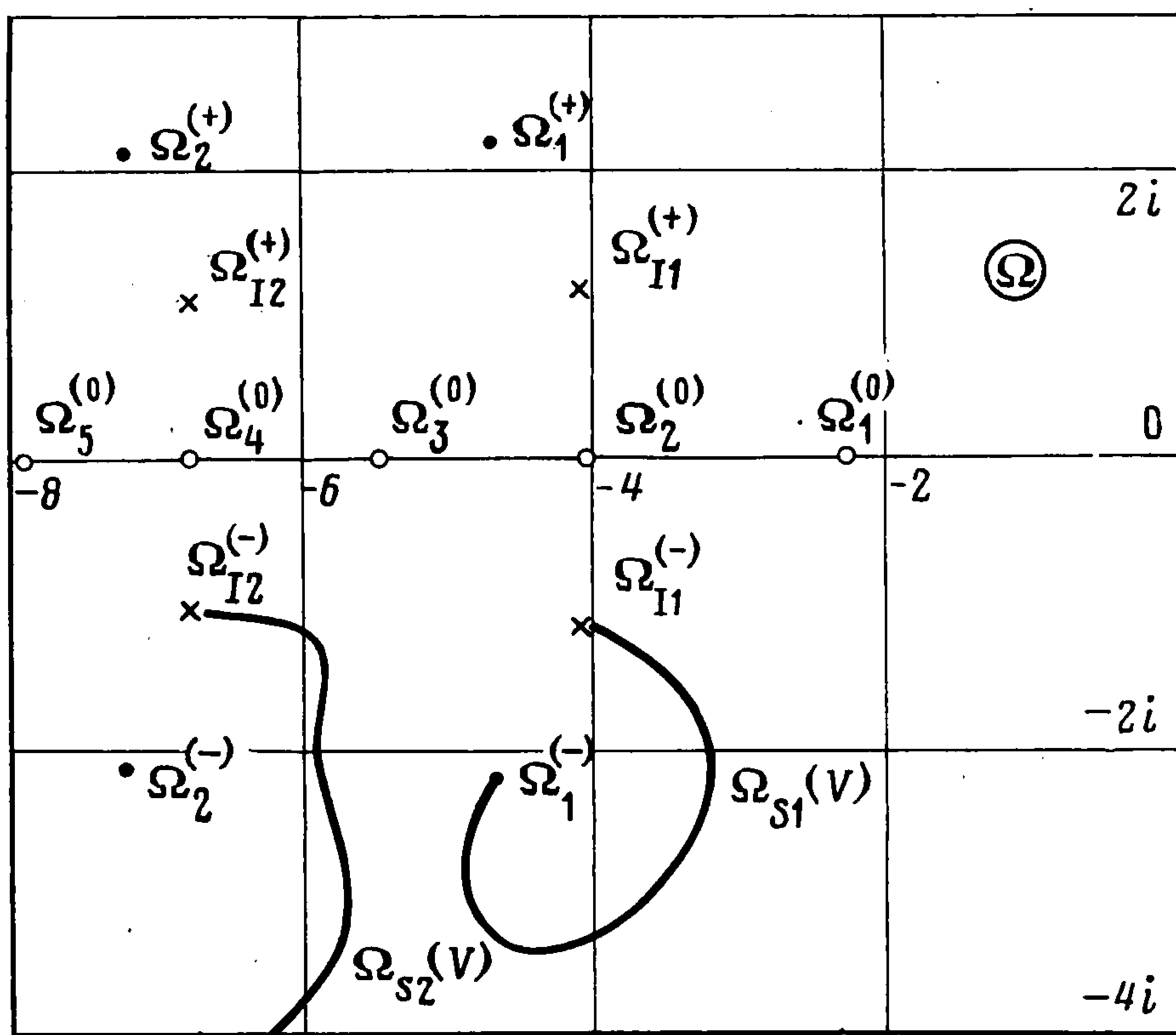
Асимптотическое разложение ω_1 при $|k| \rightarrow \infty$ и $-\pi/8 < \arg k < \pi/2$ гласит:

$$(3.3) \quad \omega_1 = -ik^2 + \sqrt{2}(1-i)/2 + \dots$$

откуда для действительных положительных k в первом приближении $\operatorname{Re} \varphi = \sqrt{2}/2$. В связи с этим производить интегрирование в первой из формул (3.1) вдоль действительной оси затруднительно, поскольку сходи-



Фиг. 1



Фиг. 2

мость I_2 достигается тогда за счет функции χ , которая при $|k| \rightarrow \infty$ убывает как $|k|^{-3}$. При больших значениях $|k|$ путь интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил в четвертом квадранте плоскости k , например параллельно, но ниже действительной оси. Указанная деформация обеспечивает стремление к нулю подынтегрального выражения в I_2 по экспоненциальному закону благодаря тому, что в данном случае главный член $\text{Re } \varphi = 2 \text{Re } k \cdot \text{Im } k$, а $\text{Im } k < 0$. Разумеется, деформируя исходный путь интегрирования, надлежит принимать во внимание полюсы и точки ветвления подынтегральной функции, которые попадают в область, ограниченную новым контуром.

Положение первой особой точки, простого полюса $\omega_1(k) = -i\omega_0$, зависит от частоты ω_0 вибратора, его траектория k_0 показана на фиг. 1, причем ω_0 возрастает вдоль кривой по мере удаления от начала координат. При $\omega_0 = \omega_*$ она пересекает действительную ось в точке $k = k_*$. Когда $\omega_0 \rightarrow \infty$, форма траектории устанавливается при помощи асимптотического разложения (3.3) для ω_1 .

Существование других нулей знаменателя функции χ из подынтегрального выражения в I_2 обусловлено обращением в нуль произведения $\text{Ai}[\Omega_1(k)] [\omega_1(k) + ik^2]$.

Корни полученного таким образом уравнения являются двойными корнями дисперсионного соотношения (2.4). В комплексной плоскости Ω они изображаются общими точками Ω_{mn} его простых корней $\Omega_m(k)$ и $\Omega_n(k)$. Действительно, пусть Φ и $d\Phi/d\Omega$ остаются ограниченными при $\Omega \rightarrow \Omega_{mn}$, тогда наряду с самим дисперсионным соотношением двойные корни должны удовлетворять дополнительному равенству

$$(3.4) \quad d\Phi/d\Omega = \text{Ai}(\Omega) [\Omega + \Phi(\Omega)] I^{-1}(\Omega) = 0$$

откуда вытекает сформулированное выше утверждение. Из (3.4) следует, что при сделанном предположении точки Ω_{mn} порождены нулями одной из функций $\text{Ai}(\Omega)$, либо $\psi = \Omega + \Phi(\Omega)$. Как известно, нули $\Omega_j^{(0)}$ функции Эйри лежат на действительной отрицательной полуоси (на фиг. 2 они обозначены светлыми точками). Все пары комплексно-сопряженных нулей $\Omega_j^{(-)}$ и $\Omega_j^{(+)}$ функции ψ расположены в левой полуплоскости и отмечены темными точками.

Рассмотрим характер особенностей, возникающих при прохождении через нуль интеграла I из знаменателя выражений как для функции Φ , так и ее производной $d\Phi/d\Omega$. Соответствующие точки $\Omega_{Ij}^{(-)}$ и $\Omega_{Ij}^{(+)}$ являются комплексно-сопряженными и также находятся в левой полуплоскости (на фиг. 2 они обозначены крестиками). В их окрестности справедливо разложение

$$\Omega - \Omega_{Ij}^{(\mp)} = -i^{-1/3} \frac{d \text{Ai}[\Omega_{Ij}^{\mp}]}{d\Omega} \frac{1}{\text{Ai}[\Omega_{Ij}^{(\mp)}] k^{4/3}} + \dots |k| \rightarrow \infty$$

Поскольку на плоскости с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси из начала координат до бесконечности $k^{-4/3}$ представляет однозначную функцию, нули интеграла I не дают новых точек ветвления у корней дисперсионного соотношения. Во всех обсуждавшихся выше случаях j пробегает значения 1, 2, ...

Рассматриваемые точки в плоскости Ω порождают особые точки k_{mn} в плоскости k , из которых при деформации пути интегрирования в I_2 необходимо учитывать $k_{12} = k_1^{(0)} = 0,590 - 0,244i$ и $k_{13} = k_1^{(-)} = 3,444 - 0,207i$. Последние определяются равенствами $\text{Ai}[\Omega_1(k)] = 0$ и $\omega_1(k) + ik^2 = 0$, т. е. служат точками, где первый корень $\Omega_1(k)$ дисперсионного соотношения принимает равные значения со вторым $\Omega_2(k)$ и третьим $\Omega_3(k)$ корнями. Отсюда следует, что особые точки k_{12} и k_{13} являются не только нулями знаменателя χ , но и точками ветвления функции $\omega_1(k)$ из подынтегрального выражения в I_2 .

4. Выбор контура интегрирования. Принимая во внимание сделанные замечания, деформируем путь интегрирования в I_2 вдоль действительной положительной полуоси в новый контур, обозначенный на фиг. 1 буквой L , таким образом, чтобы оставить в стороне точку k_{12} . Деформированный контур окружает вторую особую точку k_{13} , приближаясь к ней и отходя от нее по берегам проведенного через эту точку разреза. При $\text{Re } k \geq 3,8$ в качестве L служит прямая, расположенная ниже траектории k_0 параллельно действительной оси. Расстояние между L и действительной осью будет выбрано в дальнейшем. Когда $|k| \rightarrow \infty$, преимущества интегрирования вдоль L очевидны. Целесообразность перехода к новому контуру при небольших и умеренных значениях $|k|$ нуждается в обсуждении. Решение этого вопроса зависит от того, каковы величины времени t и постоянной V в формулах (3.2) для показателя экспоненты $t\varphi$. В лабораторных экспериментах рост амплитуды вихревых пятен сменяется процессом их нелинейного развития уже на небольших расстояниях от источника по прошествии конечного промежутка t после запуска [10]. Чтобы иметь возможность сравнить теоретические результаты с опытными данными недостаточно рассмотреть только предельный случай $t \gg 1$.

Перепишем интеграл I_2 следующим образом:

$$(4.1) \quad I_2 = i^{-2/3} \omega_0 \left\{ \int_L \chi(k; \omega_0) \exp(t\varphi(k; V)) dk - \right. \\ \left. - 2\pi i \theta(\omega_0 - \omega_*) \text{res} [\chi(k; \omega_0) \exp(t\varphi(k; V))]_{k=k_0(\omega_0)} \right\}$$

где θ — единичная функция Хевисайда. При $\omega_0 > \omega_*$ второй член в правой части (4.1) представляет волну Толлмина — Шлихтинга. Как показали вычисления, первый член при $V \leq 2,4$ стремится к нулю, если $t \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что постоянная $V_b = 2,4$, а использование L в качестве пути интегрирования оправдано в указанном диапазоне V . Ограничив временной интервал неравенствами $3 \leq t \leq 10$, можно расширить диапазон применения L вплоть до $V \leq 3,5$. Однако при увеличении V до 4,0 подынтегральное выражение во втором члене из правой части (4.1) получается быстро колеблющимся, что требует введения очень мелкого шага интегрирования. Сам интеграл сильно возрастает: при $t = 10$ он имеет порядок 10^4 . Несмотря на быструю сходимость этого интеграла при $|k| \rightarrow \infty$, гарантировать высокую точность вычислений становится затруднительно, если $V > 3,5$. Ясно, что необходима дальнейшая деформация L в новый контур или даже в систему контуров.

Их поиск опирается на идею, лежащую в основе метода перевала. Однако при сравнительно небольших временах $3 \leq t \leq 10$ метод перевала в его классической формулировке дает существенную ошибку при вычислении первого члена из правой части (4.1). При любом фиксированном V координаты точки перевала удовлетворяют уравнению

$$(4.2) \quad d\varphi/dk = d\omega_1/dk + iV = 0$$

решение которого обозначим посредством $k_s = k_s(V)$. Как показали вычисления, проведенные на ЭВМ, функция $k_s(V)$ имеет счетное множество ветвей. Для расчета p' необходимо использовать лишь две ветви $k_{s1}(V)$ и $k_{s2}(V)$, изображенные на фиг. 1. Первая из них связана с особой точкой k_{13} , в ее окрестности справедливо разложение

$$(\Omega_1 - \Omega_{13})^2 = \frac{8}{3} i^{1/3} k_{13}^{1/3} [d^2\Phi(\Omega_{13})/d\Omega^2]^{-1} (k - k_{13}) + \dots$$

$$d^2\Phi(\Omega_{13})/d\Omega^2 = -\Omega_{13} \text{Ai}(\Omega_{13}) [d\text{Ai}(\Omega_{13})/d\Omega]^{-1}, \quad \Omega_{13} = -i^{1/3} k_{13}^{4/3}$$

которое позволяет найти производную

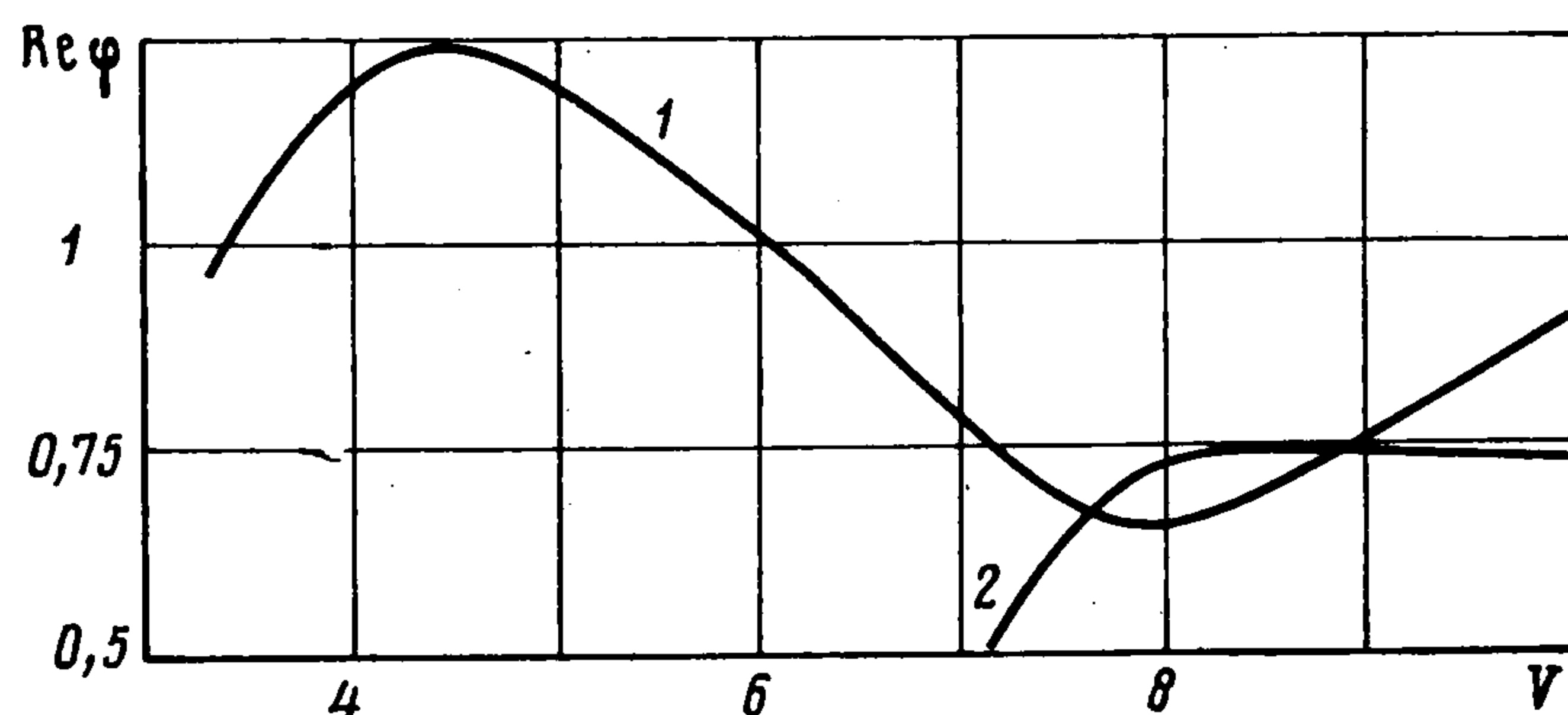
$$d\omega_1/dk = 2/3 i^{2/3} k^{-1/3} \Omega_1(k) + i^{2/3} k^{2/3} d\Omega_1/dk$$

из (4.2) при $k \rightarrow k_{13}$. Кривая $k_{s1}(V)$ начинается при $V = 0$ из бесконечно удаленной точки плоскости k , соответствующей в плоскости Ω точке $\Omega_{I1}^{(-)} = -4,107 - i1,144$. Затем она пересекает контур L , огибает точку k_{13} сверху и упирается в нее в пределе $V \rightarrow \infty$. Вторая ветвь $k_{s2}(V)$ при $V = 0$ исходит из бесконечно удаленной точки плоскости k , соответствующей $\Omega_{I2}^{(-)} = -6,798 - i1,035$, выходит на первый лист римановой поверхности из-под проведенного через k_{13} разреза, пересекает действительную ось и при $V \rightarrow \infty$ уходит вдоль действительной оси в бесконечно удаленную точку плоскости k , соответствующую бесконечно удаленной точке плоскости Ω . На фиг. 2 на плоскости Ω приведены траектории перевальных точек, порожденных ветвями $k_{s1}(V)$ и $k_{s2}(V)$

$$\Omega = \Omega_{s1}(V) = \omega_1(k_{s1}(V)) [ik_{s1}(V)]^{-2/3}$$

$$\Omega = \Omega_{s2}(V) = \omega_1(k_{s2}(V)) [ik_{s2}(V)]^{-2/3}$$

Характер изменения $\text{Re } \varphi(k_{s1}, V)$ и $\text{Re } \varphi(k_{s2}, V)$ вдоль кривых $k_{s1}(V)$ и $k_{s2}(V)$ можно уяснить из фиг. 3, где они помечены цифрами 1 и 2 соответственно.



Фиг. 3

Пропустим через каждую точку кривой $k_{s_1}(V)$ с фиксированной величиной V линию k_{φ_1} , несущую постоянное значение

$$\operatorname{Im} \varphi(k; V) = \operatorname{Im} \varphi[k_{s_1}(V); V]$$

На этой линии отметим темными кружками такие точки, где $\operatorname{Re} \varphi(k_{\varphi_1}; V) = 0$. При изменении V эти точки перемещаются, образуя две ветви, одна из которых почти целиком расположена в верхней полуплоскости k , другая проходит вблизи берегов проведенного через k_{13} разреза. Существенную роль играют два обстоятельства: первая ветвь пересекает контур L при $V \approx 3,2$, изгиб второй ветви сопровождается ее перемещением под разрез при $V \approx 7,4$.

Обратимся к области D на фиг. 1, которая ограничена сверху контуром U , а снизу — контуром L . Первый из них выбран с таким расчетом, чтобы при $3,2 < V < 7,4$ обе ветви образованной темными точками кривой не покидали D . Соединим точки контуров U и L системой линий k_{φ_1} . На отрезке каждой такой линии, отсекаемом двумя ветвями кривой из темных точек, $\operatorname{Re} \varphi(k_{\varphi_1}, V) \geq 0$ согласно фиг. 3, причем максимум достигается в точке перевала.

Диапазон, в котором второй член из правой части (4.1) получается путем интегрирования по L , можно сузить теперь до $0 \leq V \leq 3,2$, если рассматривать сравнительно небольшие времена $3 \leq t \leq 10$. Для каждого V из интервала $3,2 \leq V \leq 7,4$ следует брать свой контур интегрирования, состоящий из трех частей. Первую образует участок U от начала координат до точки пересечения с линией k_{φ_1} , несущей предписанные значения V и $\operatorname{Im} \varphi(k; V)$; вторая часть совпадает с отрезком k_{φ_1} из D ; третью дает участок L от точки пересечения с линией k_{φ_1} до бесконечности. Вдоль первой и третьей частей нового контура интегрирования $\operatorname{Re} \varphi(k; V) \leq 0$, что обеспечивает малость обусловленных этими частями вкладов в I_2 . Вдоль второй части $\operatorname{Im} \varphi(k; V) = \operatorname{const}$, быстро осциллирующий член $\exp[it \operatorname{Im} \varphi(k; V)]$ выносится за знак интеграла, а оставшееся подынтегральное выражение меняется плавно. В результате для интегрирования по k_{φ_1} можно использовать сравнительно крупный шаг. Аналогичная деформация контура составляет суть метода перевала, однако в нем искомый интеграл вычисляется по небольшому участку в непосредственной окрестности седловой точки в предположении, что $t \rightarrow \infty$. Изложенный выше более полный анализ, каким образом следует преобразовать путь интегрирования для расчета I_2 по формуле (4.1), позволяет рассматривать умеренные значения $3 \leq t \leq 10$.

Чтобы вычислить величину I_2 по формуле (4.1) при $7,4 \leq V < \infty$, естественно было бы построить систему линий k_{φ_2} , которые пропущены через точки кривой k_{s_2} с фиксированными V и несут постоянные значения

$$\operatorname{Im} \varphi(k; V) = \operatorname{Im} \varphi[k_{s_2}(V); V]$$

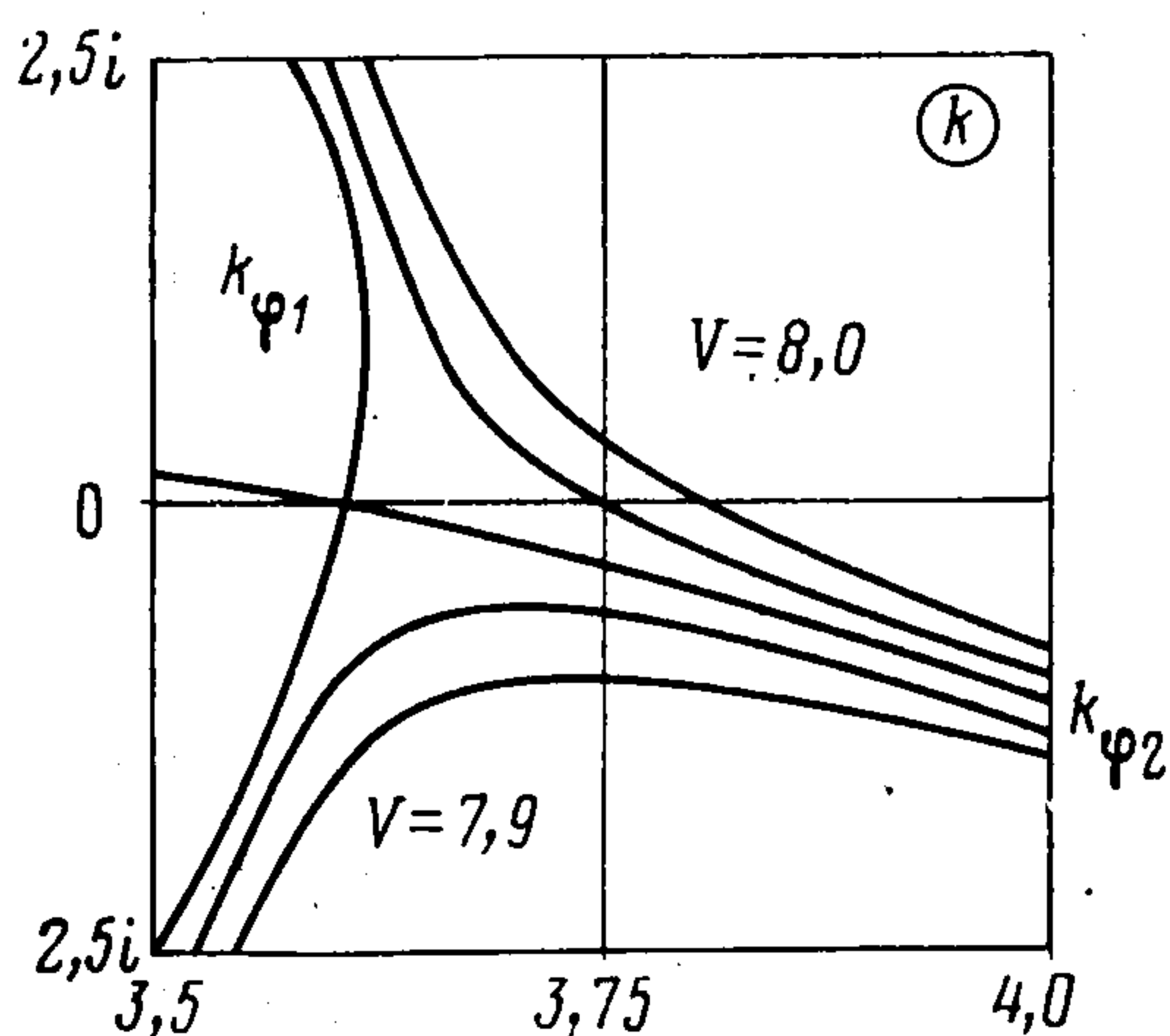
Однако эту программу нельзя реализовать полностью вследствие того, что при некотором V из интервала $7,93 < V < 7,95$ существует линия k_{φ_2} , соединяющая оба геометрических места k_{s_1} и k_{s_2} перевальных точек. Она определяется V из равенства

$$\operatorname{Im} \varphi[k_{s_1}(V), V] = \operatorname{Im} \varphi[k_{s_2}(V); V]$$

и служит сепаратриссой: расположенные ниже нее линии k_{φ_2} уходят под проведенный через k_{13} разрез на второй лист римановой поверхности, и только лежащие выше нее линии k_{φ_1} связывают контур U с контуром L ,

образуя новый путь интегрирования. Топология кривых в плоскости k для рассматриваемого интервала V видна из фиг. 4.

Поскольку воспользоваться линиями k_{φ_2} при $7,4 \leq V \leq 7,95$ для вычисления интегрального члена из правой части формулы (4.1) невозможно,



Фиг. 4

составим путь интегрирования из участков контуров U и L , соединив их по-прежнему при помощи отрезков k_{φ_1} . В точке пересечения k_{φ_1} с L имеем $\text{Re } \varphi(k_{\varphi_1}; V) > 0$, поэтому вклады в I_2 , обусловленные интегрированием по k_{φ_1} и L , становятся сравнимы по величине. Разумеется, следует предъявить повышенные требования к методу приближенных расчетов, чтобы сохранить их точность (с ростом t эти требования естественно ослабляются).

При $7,95 \leq V < \infty$ каждая из линий k_{φ_2} не только связывает U с L , но и обладает двумя точками, где $\text{Re } \varphi(k_{\varphi_2}; V) = 0$. Кривые, проведенные по этим точкам, обозначенным темными кружками на фиг. 1, образуют ветви, одна из которых расположена в верхней полуплоскости, другая — в нижней. Уходящие на бесконечность горизонтальные прямые, которыми оканчиваются контуры U и L , помещаются на таком расстоянии от действительной оси, чтобы кривые, проведенные по темным кружкам, целиком лежали в области D .

Чтобы извлечь все преимущества метода перевала при вычислении интегрального члена из правой части формулы (4.1) в последнем диапазоне $7,95 \leq V < \infty$ и умеренных $3 \leq t \leq 10$, интегрирование следует начать вдоль контура U до пересечения с линией k_{φ_2} с заданным V , затем продолжить по k_{φ_2} , несущей постоянное значение $\text{Im } \varphi(k; V)$, и закончить вдоль контура L от точки его пересечения с линией k_{φ_2} до бесконечности. Неравенство $\text{Re } \varphi(k; V) < 0$, имеющее силу в каждой точке на первом и третьем участках рассматриваемого пути, обеспечивает малость вкладов в I_2 от соответствующих интегралов. Фактически для вычисления искомой величины существенным является только вклад, набираемый при интегрировании вдоль отрезка k_{φ_2} с седловой точкой примерно на его середине.

5. Результаты расчетов. Как указывалось выше, в лабораторных экспериментах рост амплитуды вихревых пятен довольно быстро сменяется существенно нелинейным процессом их развития [10]. Поэтому в расчетах моменты времени выбирались умеренными из диапазона $3 \leq t \leq 10$. Ввиду различий в величинах чисел Рейнольдса R , используемых в теории и достигаемых в опытах, количественное сопоставление тех и других результатов оказывается все же невозможным: по предположению, на котором базируется настоящий анализ, $R \rightarrow \infty$, в то время как на пластинке в малотурбулентной трубе до сих пор были реализованы сравнительно небольшие местные значения R . Приводимые ниже графики позволяют, однако, проследить, какие качественные закономерности присущи волновым пакетам при их формировании и распространении, наблюдаемые в экспериментах расстояния. Разумеется, иллюстративный материал содержит только часть полученных данных, вывод которых с ЭВМ осуществлялся с интервалом $\Delta t = 1$.

Вычислительный процесс был организован следующим образом. Для приближенного определения второго члена из правой части (4.1) в качестве пути интегрирования

использовался контур L , если $0,1 < V < 3,2$. Составные пути интегрирования применялись, когда $3,2 \leq V \leq 13$, причем помимо отрезков контуров U и L они включали линии k_{φ_1} при $3,2 \leq V < 8$ и линии k_{φ_2} при $8 \leq V \leq 13$. Шаг $\Delta V = 0,1$ во всех случаях обеспечивал необходимую точность вычислений, хотя в интервале $7,4 \leq V \leq 7,9$ интегралы по k_{φ_1} и L были сравнимы по величине.

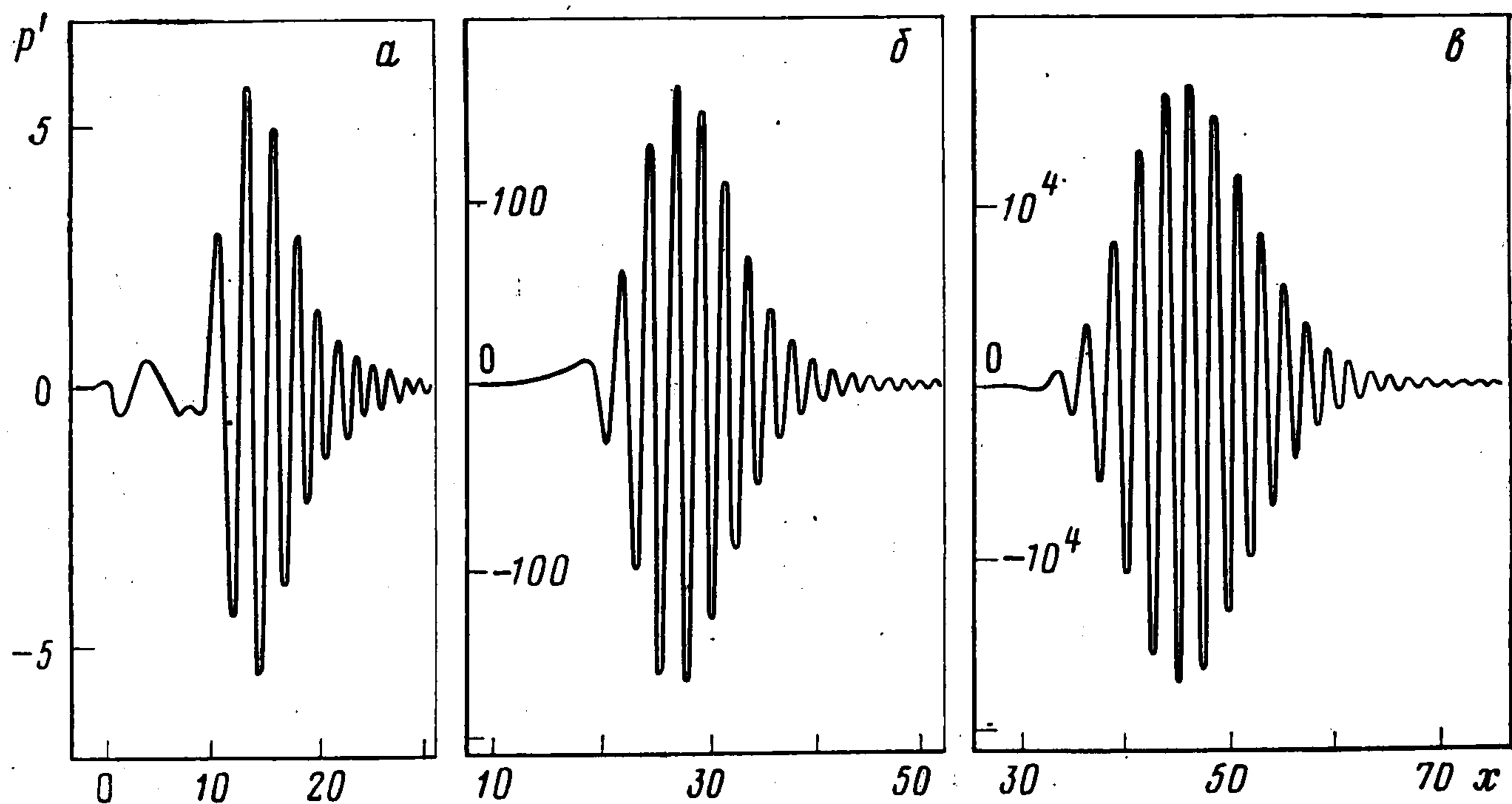
Длины контуров U и L фиксировались точками их пересечения с линией k_{φ_2} , проведенной через кривую k_{s_2} при условии $V = 13$. Здесь счет обрывался, поскольку амплитуда возмущений становилась весьма малой. Вдоль U и L функции $\omega_1(k)$ и $\chi(k; \omega_0)$ рассчитывались с довольно мелким шагом по k для любого заданного значения V . Так, на U располагалось 600 точек, а на L их количество достигало 1500 ввиду необходимости обхода по берегам проведенного через k_{13} разреза. Обе системы линий k_{φ_1} и k_{φ_2} выстраивались с шагом $\Delta V = 0,1$, вдоль каждой такой линии использовалось порядка 150 точек для расчета $\omega_1(k)$ и $\chi(k; \omega_0)$.

Необходимо выбрать еще параметры вибратора; в продолжение [2,8] положим $a = 2$, $b = 1$. Что касается частоты его колебаний ω_0 , то в качестве типичных рассмотрим три случая: $\omega_0 = 2,0$; $5,0$; $7,3$. Распределение давления вдоль пограничного слоя для первого из этих случаев показано на фиг. 5 для моментов времени $t = 3$; 6 ; 10 (за недостатком места аналогичные результаты, относящиеся к остальным двум случаям, лишь кратко комментируются). Критическая частота $\omega_* = 2,298$ лежит между первыми двумя частотами $\omega_0 = 2,0$ и $\omega_0 = 5,0$ работы вибратора. Третье значение $\omega_0 = 7,3$ соответствует свободным самовозбуждающимся колебаниям с максимальным инкрементом роста амплитуды по продольной координате. Для небольших времен и всех ω_0 следует учитывать поправку, даваемую в формуле (2.7) для p' интегралом I_1 . Способ его вычисления описан в [8].

Момент $t = 3$ можно считать переходным для всех режимов: по простивии столь небольшого промежутка времени после запуска вибратора возмущения в его окрестности хотя и значительно меньше, но все же по порядку величины сравнимы с пульсациями в центре вихревого пятна. Наиболее отчетливо незаконченный характер формирования волнового пакета проявляется на докритических частотах (фиг. 5, *a*), для закритических частот процесс представляется более завершенным.

Если $\omega_0 = 2,0$, то к моменту $t = 6$ вихревое пятно отрывается от источника (фиг. 5, *б*) и при $t = 10$ принимает вполне законченный вид (фиг. 5, *в*). В дальнейшем своем движении оно не подвержено воздействию источника колебаний, затухающих весьма быстро с расстоянием. На всех докритических частотах поле возмущений в передней части пятна и его центре практически не изменяется, а в задней части меняется слабо в зависимости от того, какова величина ω_0 . С этой точки зрения запуск гармонического осциллятора с докритической частотой мало отличается от импульсного включения, производившегося в экспериментах [10].

На закритических частотах, как показывают расчеты, в момент $t = 6$ задняя часть вихревого пятна непрерывно сопрягается с начинающейся у вибратора волной Толлмина — Шлихтинга с соответствующим заданной величине ω_0 волновым числом, которое находится из решения дисперсионного соотношения (3.4). Пульсации в центре и передней части волновых пакетов близки по характеру к уже обсуждавшимся на фиг. 5, *б*, несмотря на то, что имеют большую по порядку величины амплитуду. Здесь поле возмущений определяется, главным образом, внутренними свойствами пограничного слоя с самоиндуцированным давлением, однако согласно (1.6), вертикальная составляющая вектора скорости на поверхности мем-



Фиг. 5

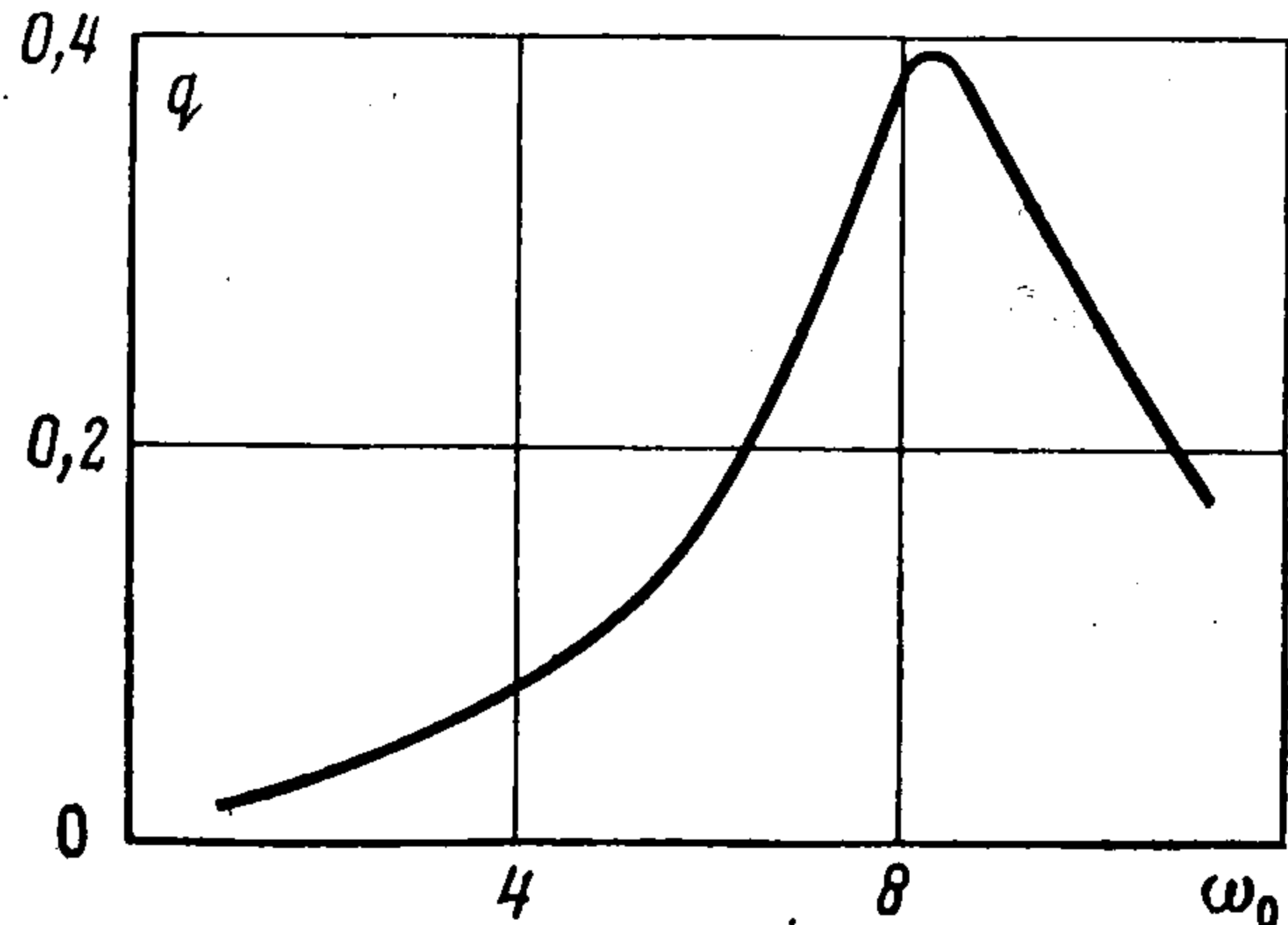
брани в начальный момент времени пропорциональна ω_0 , в результате размах колебаний меняется с увеличением частоты вынуждающей силы.

Только что описанная картина вихревых пятен, формирующихся на закритических частотах, сохраняется в момент $t = 10$. Дальнейшая эволюция волновых пакетов вызывает впечатление их отрыва от источника, которое является обманчивым. Дело в том, что амплитуда пульсаций в волне Толлмина — Шлихтинга вниз по потоку от вибратора нарастает по экспоненциальному закону. Для больших времен размах колебаний в его окрестности во много раз меньше, чем в промежуточной области, где волна Толлмина — Шлихтинга сопрягается с задней частью вихревого пятна. При $t = 10$ область между источником и пятном кажется свободной от возмущений, хотя эта оценка несколько сглаживается для частоты $\omega_0 = 7,3$, соответствующей свободным самовозбуждающимся колебаниям с максимальным ростом амплитуды по продольной координате. Отметим, что в центре вихревого пятна избыточное давление не достигает той величины, какая была бы при непрерывном продолжении волны Толлмина — Шлихтинга в названную область.

Как при докритических, так и закритических частотах вихревое пятно расширяется, распространяясь вниз по потоку. Согласно [11], в точках $k_1^* = 0,523$, $k_2^* = 2,716$, $k_3^* = 3,616$, $k_4^* = 4,346$, расположенных на действительной оси в плоскости k , имеют место экстремумы $\text{Re } \omega_1(k)$, причем во второй и четвертой из них реализуются положительные максимумы. Отсюда следует, что рассматриваемое вихревое пятно или волновой пакет состоит из двух слитых воедино подпакетов. Максимум в точке $k = k_2^*$ ярко выражен, амплитуда соответствующего ему подпакета обладает наибольшим инкрементом нарастания во времени. Это центр вихревого пятна, распространяющегося с групповой скоростью $V_2^* = -d \text{Im } \omega_1(k_2^*)/dk = 4,49$, здесь размах колебаний достигает максимальной величины. Локальный максимум при $k = k_4^*$ едва намечен по сравнению со значениями $\text{Re } \omega_1(k)$ в соседних точках на действительной оси, соответствующий ему волновой подпакет, групповая скорость которого $V_4^* = -d \text{Im } \omega_1(k_4^*)/dk = 8,63$, ничем не выделяется в передней части пятна. Граница между обоими подпакетами волн определяется локальным минимумом $\text{Re } \varphi(k_{s1}, V) = \text{Re } \varphi(k_{s2}, V)$, скорость ее перемещения $V_3 = -d \text{Im } \omega_1(k_3^*)/dk = 7,64$. Как и предыдущий, этот экстремум обозна-

чен слабо, в результате граница между подпакетами неразличима на фиг. 5, где вихревое пятно предстает в качестве единого образования на поздних стадиях ($t > 3$).

Волновое число $k = k_2^*$ определяет свободные самовозбуждающиеся колебания с наибольшим ростом амплитуды во времени. Их частота ω_2^* имеет параметры $\text{Re } \omega_2^* = 1,24$, $\text{Im } \omega_2^* = -8,16$. Выше отмечалась зависимость избыточного давления в центре вихревого пятна от частоты ω_0 работы вибратора. Эта зависимость для $t \gg 1$ и $x \gg 1$ может быть найдена при помощи метода перевала, причем, деформируя путь интегрирования при подсчете второго члена из правой части (4.1), следует воспользоваться линией $k_{\phi 1}$, пропущенной через точку кривой k_{s1} с $V = V_2^*$. Последняя совпадает, очевидно, с точкой $k = k_2^*$. Отсюда величина возмущений в центре пятна получается пропорциональной коэффициенту $q = \omega_0 | \omega_1^2 (k_2^*) + \omega_0^2 |^{-1}$, достигающему максимума при $\omega_0 = | \omega_1 (k_2^*) | = | \omega_2^* | = 8,25$. Изменение q с увеличением ω_0 показано на фиг. 6.



Фиг. 6

В заключение установим характер возмущений в вытянутом вперед длинном волновом языке. Его существование вытекает из того факта, что $\text{Re } \omega_1(k) \rightarrow \text{const} = \sqrt{2}/2$, когда $k \rightarrow \infty$ вдоль действительной оси. Избыточное давление в этой области мало, для его расчета в [9] был применен метод стационарной фазы Кельвина, опирающийся на предположение $V \gg 1$. Последнее согласуется с описанной выше процедурой вычислений, которые обрывались в точке пересечения контура L с линией $k_{\phi 2}$, несущей значение $V = 13$. Повторяя изложенные в [9] рассуждения, имеем

$$(5.1) \quad p' = \text{Re} \left\{ 2^4 \pi^{-1/2} \omega_0 \left[1 - \frac{a}{a-b} \exp(-ixb/(2t)) + \frac{b}{a-b} \exp(-ixa/(2t)) \right] t^{5/2} x^{-3} \exp(t/\sqrt{2}) \times \right. \\ \left. \times \exp(i(x^2/t - 2\sqrt{2}t + \pi)/4) \right\}$$

Из формулы (5.1) вытекают два заключения качественного порядка. Во-первых, структура возмущений в рассматриваемой области зависит от начальной стадии запуска вибратора, отличаясь от той, которая получается при импульсном вдуве струйки в пограничный слой сквозь отверстие, прорезанное в обтекаемой пластинке. Во-вторых, суперпозиция волн приводит к возникновению мелкомасштабных колебаний, определяемых отношением x^2/t в показателе экспоненты, уже в линейной стадии процесса взаимодействия различных мод. Однако амплитуда этих колебаний чрезвычайно мала. В экспериментах [10]¹ они зафиксированы не были.

Изложенный анализ основан на теории свободного взаимодействия пограничного слоя, которая правильно описывает асимптотику нижней ветви нейтральной кривой устойчивости. Как было показано недавно [12, 13], эта теория применима к изучению самовозбуждающихся колебаний

¹ См. также: Гилев В. М., Козлов В. В. Методика создания двумерных и трехмерных пакетов волн в пограничном слое.— Препринт Ин-та теорет. и прикл. механики СО АН СССР, Новосибирск, 1980, № 2. 16 с.

почти во всей области, заключенной между обеими ветвями нейтральной петли (исключение составляет ближайшая окрестность верхней ветви). Учет последней может выразиться лишь в более точном расчете возмущений амплитуда которых по сравнению с размахом пульсаций в центре вихревого пятна исчезающе мала.

Отношение частоты свободных самовозбуждающихся колебаний с максимальным инкрементом нарастания амплитуды по пространству к нейтральной частоте равно приблизительно 3,17, что вполне удовлетворительно согласуется с аналогичной величиной, приводимой в монографии [14] в качестве результата численного интегрирования уравнения Орра — Зоммерфельда уже при умеренных значениях числа Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах.— ПМТФ, 1982, № 4, с. 65—72.
2. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 264—272.
3. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.— Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529. 125 с.
4. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— In: Advances in Applied Mechanics. N. Y. e. a.: Acad. Press, 1974, v. 14, p. 145—239.
5. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Успехи механики, 1979, т. 2, вып. 4, с. 57—95.
6. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007—1023.
7. Ruzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure.— J. méс., 1980, v. 19, No. 3, p. 561—580.
8. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1049—1055.
9. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О некоторых свойствах вихревых пятен в пограничном слое на пластинке.— Докл. АН СССР, 1984, т. 276 № 3, с. 571—575.
10. Gaster M., Grant I. An experimental investigation of the formation and development of a wave packet in a laminar boundary layer.— Proc. Roy. Soc. A, 1975, v. 374, No. 1649, p. 253—269.
11. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1326—1329.
12. Жук В. И., Рыжов О. С. Об асимптотике решений уравнения Орра — Зоммерфельда, задающих неустойчивые колебания при больших значениях числа Рейнольдса.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 6, с. 1328—1332.
13. Жук В. И. Об асимптотике решений уравнений Орра — Зоммерфельда в областях, примыкающих к двум ветвям нейтральной кривой.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 3—11.
14. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1985