Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 531.38

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА КОВАЛЕВСКОЙ

Брюм А. З., Савченко А. Я.

Получены достаточные условия орбитальной устойчивости периодического решения уравнений движения гироскопа Ковалевской в случае интегрируемости Бобылева — Стеклова.

Для неустановившихся движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, трудно ожидать их устойчивости по Ляпунову, так как уже для простейших из них — периодических — характерна зависимость частоты колебаний от начальных условий [1]. Вместе с тем, более грубое свойство периодических решений уравнений Эйлера — Пуассона — орбитальная устойчивость [2] — не является предметом специальных исследований в динамике твердого тела. Алгоритм настоящего исследования использует восходящую к Жуковскому [3] трактовку орбитальной устойчивости как устойчивости движения по Ляпунову при специальном выборе переменной, играющей роль времени (см. также [4]), и метод Четаева [5] построения функции Ляпунова из первых интегралов уравнений возмущенного движения. Последнее обстоятельство позволяет при исследовании орбитальной устойчивости поставить метод Четаева в один ряд с методами, примененными в работах [1, 4, 6—9] и др.

1. При условиях Ковалевской уравнения Эйлера — Пуассона и первые интегралы в безразмерных переменных имеют вид [10]

$$2p^{\cdot} = qr, \quad 2q^{\cdot} = -rp - \gamma'', \quad r^{\cdot} = \gamma' \tag{1.1}$$
$$\gamma^{\cdot} = \gamma' r - \gamma'' q, \quad \gamma^{\cdot\prime} = \gamma'' p - \gamma r, \quad \gamma^{\cdot\prime\prime} = \gamma q - \gamma' p$$

$$2(p^2+q^2) + r^2 - 2\gamma = 6l_1, \quad 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l \tag{1.2}$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad (p^2 - q^2 + \gamma)^2 + (2pq + \gamma')^2 = k^2$$

Если постоянные интегрирования k, l_1, l связаны соотношениями $l = (k^2 - p_0^4 - 1)/(2p_0)$, $l_1 = (3p_0^4 + 1 - k^2)/(6p_0^2)$, где $p_0 \neq 0$ — постоянная, механический смысл которой указан ниже, уравнения (1.1) допускают семейство периодических решений, соответствующих случаю интегрируемости Бобылева — Стеклова [11]

$$p = p_0, \ q = 0, \ r = r_0(t) = [2k\cos\varphi(t) + p_0^{-2}(1 - k^2 - p_0^4)]^{1/2}, \tag{1.3}$$
$$\gamma = \gamma_0(t) = k\cos\varphi(t) - p_0^2$$
$$\gamma' = \gamma_0'(t) = -k\sin\varphi(t), \quad \gamma'' = \gamma_0''(t) = -p_0 r_0(t)$$

Эллиптическая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi^{\cdot} = r_0(t) \tag{1.4}$$

Решения, определяемые соотношениями (1.3), (1.4), существенным образом зависят от произвольных постоянных p_0 и k и выделяют в шестимерном фазовом пространстве системы (1.1) замкнутые орбиты [2], обозначаемые $M(k, p_0)$. Не нарушая общности, далее считаем $k \geqslant 0$.

Ограничимся изучением периодических решений (1.3), (1.4), в которых третья компонента угловой скорости $r_0(t) \neq 0$ во все время движения. Указанное условие удовлетворяет тогда и только тогда, когда

$$k + p_0^2 < 1 \tag{1.5}$$

При выполнении условия (1.5) из уравнения (1.4) следует, что $\varphi(t)$ монотонно возрастает в промежутке $[\varphi(t_0); +\infty[$. В силу автономности системы (1.1) всюду далее полагаем $t_0 = \varphi(t_0) = 0$.

2. Конфигурация орбит $M(k, p_0)$ в пространстве R^6 определится лишь соотношениями (1.3), где φ можно рассматривать как параметр. Закон движения изображающей точки по этим орбитам задается уравнением (1.4).

Рассмотрим сколь угодно близкие в начальный момент времени изображающие точки P_1 и P_2, движущиеся по орбитам $M(k, p_0)$ и $M(k + \delta k, p_0 + \delta p_0)$ соответственно. Модуль эллиптической функции $\varphi(t)$ зависит от k и p_0, поэтому периоды движения по $M(k, p_0)$ и $M(k + \delta k, p_0 + \delta p_0)$ различны и через некоторое время расстояние между P_1 и P_2 обязательно превзойдет некоторую наперед заданную величину. Таким образом, решение (1.3), (1.4) неустойчиво по Ляпунову при любых p_0 и k, удовлетворяющих неравенству (1.5).

Прежде чем приступить к исследованию орбитальной устойчивости (1.3), (1.4), изложим некоторый общий подход к изучению этого свойства периодических решений автономных систем.

Зафиксируем $x_0 \in R^n$ и введем обозначения

$$I = [0; +\infty[, \quad S_\alpha = \{\xi \in R^n : \|\xi - x_0\| < \alpha\}$$

Рассмотрим при всевозможных $\xi \in S_\alpha$ решения

(2.1) $$x = \eta(t, \xi), \quad \eta(0, \xi) = \xi$$

автономной системы

(2.2) $$\dot{x} = f(x)$$

Отображение f обладает гладкостью, обеспечивающей существование при $t \in I$, $\xi \in S_\alpha$ и единственность решения уравнений (2.2).

Предположим, что система (2.2) имеет периодическое решение

(2.3) $$x = \eta(t, x_0)$$

орбиту которого обозначим M.

Определение. Функционал $\Pi : I \times S_\alpha \to I$ задает устойчивую по отношению к (2.3) параметризацию множества решений (2.1), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любом $\xi \in S_\delta$ выполняются условия:

1) отображение $\tau \to t = \Pi(\tau, \xi)$ — гомеоморфизм I на I;

2) для всех $\tau \in I$ справедливо неравенство

$$\|\eta(\Pi(\tau, \xi), \xi) - \eta(\Pi(\tau, x_0), x_0)\| < \varepsilon$$

Пусть множество решений (2.1) допускает устойчивую по отношению к (2.3) параметризацию Π. Функционал Π при фиксированном ξ обладает свойствами, следующими из его определения:

$$\Pi(0, \xi) = 0, \quad \lim_{\tau \to +\infty} \Pi(\tau, \xi) = +\infty$$

В каждый момент $\tau \in I$ точка $\eta(\Pi(\tau, \xi), \xi)$ возмущенной траектории близка к точке $\eta(\Pi(\tau, x_0), x_0)$ орбиты M. Это соответствие между возмущенным и невозмущенным решением не влечет за собой устойчивости последнего в смысле Ляпунова, так как, вообще говоря, $\Pi(\tau, \xi) \neq \Pi(\tau, x_0)$. Однако наличие устойчивой по отношению к (2.3) параметризации множества (2.1) является, очевидно, достаточным условием орбитальной устойчивости периодического решения (2.3).

Укажем некоторый алгоритм проверки существования устойчивой параметризации, не использующий явный вид решений (2.1).

Для этого дополним систему (2.2) одним уравнением

(2.4) $\tau^{\cdot} = 1/g(x)$

и начальным условием $\tau(0) = 0$. Здесь функция g непрерывно дифференцируема в окрестности орбиты M и удовлетворяет при $\tau \in I$ неравенству (β — постоянная)

(2.5) $g(\eta(t, x_0)) \geqslant \beta > 0$

Для изучения поведения интегральных кривых системы (2.2) в окрестности орбиты M введем новую независимую переменную τ. Получим уравнения

(2.6) $dx/d\tau = f(x)\,g(x)$

На периодическом решении (2.3) зависимость переменной τ от времени такова:

(2.7) $$\tau = \int\limits_0^t \frac{d\theta}{g(\eta(\theta, x_0))}$$

В силу неравенства (2.5) функционал (2.7) гомеоморфно отображает I на I. Если обозначить Π обратное к (2.7) отображение $\tau \to t = \Pi(\tau, x_0)$, то система (2.6) будет допускать периодическое решение

(2.8) $x(\tau) = \eta(\Pi(\tau, x_0), x_0)$

орбита которого совпадает с M.

Теорема 1. Если решение (2.8) системы (2.6) устойчиво по Ляпунову, то множество (2.1) допускает устойчивую по отношению к решению (2.3) параметризацию.

Доказательство. Обозначим $\eta_*(\tau, \xi)$ решение системы (2.6) с начальными данными $\eta_*(0, \xi) = \xi$. При этом

$$\eta(\Pi(\tau, x_0), x_0) = \eta_*(\tau, x_0)$$

Устойчивость по Ляпунову решения (2.8) означает, что

(2.9) $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\xi \in S_\delta)(\forall\tau \in I): \|\eta_*(\tau, \xi) - \eta_*(\tau, x_0)\| < \varepsilon$

Выбирая в (2.9) ε достаточно малым, при помощи (2.5) получим

$$g(\eta_*(\tau, \xi)) \geqslant \beta/2 > 0$$

при $\tau \in I$, $\xi \in S_\delta$. Следовательно, отображение $\Pi_* : \tau \to t$ по правилу

$$t = \Pi_*(\tau, \xi) = \int\limits_0^\tau g(\eta_*(\theta, \xi))\,d\theta$$

является гомеоморфизмом I на I.

Непосредственная проверка показывает, что функция

(2.10) $x = \eta_*(\Pi_*^{-1}(t, \xi), \xi) \equiv \eta(t, \xi)$

представляет собой решение системы (2.2), обращающееся в ξ при $t = 0$. Последнее равенство в (2.10) следует из теоремы единственности и эквивалентно следующему:

(2.11) $\eta_*(\tau, \xi) \equiv \eta(\Pi_*(\tau, \xi), \xi), \quad \xi \in S_\delta$

Соотношения (2.9), (2.11) свидетельствуют о том, что функционал Π_* задает устойчивую относительно (2.3) параметризацию множества решений (2.1) системы (2.2).

Следствие. Если решение (2.8) системы (2.6) устойчиво по Ляпунову, то решение (2.3) системы (2.2) орбитально устойчиво.

Итак, основная трудность на пути сведения исследования орбитальной устойчивости к изучению устойчивости по Ляпунову решения некоторой вспомогательной системы заключается в нахождении подходящей функции $g : x \to g(x)$.

Замечание. Формулировка указанного в следствии теоремы 1 критерия орбитальной устойчивости в идейном отношении близка к определению «прочности движения» по Жуковскому [3]. В качестве вспомогательной переменной τ Жуковский выбирал одну из фазовых переменных исследуемой системы.

3. Перейдем к исследованию указанным способом орбитальной устойчивости решений (1.3), (1.4) уравнений (1.1).

В качестве τ введем переменную Суслова [10], дополнив (1.1) уравнением

$$\tau^{\cdot} = r \tag{3.1}$$

Отметим, что правая часть (3.1) удовлетворяет условию (2.5), так как в силу (1.5) $r_0(t) \neq 0$.

Исключая из (1.1) и (3.1) переменную t, приходим к системе

$$2\frac{dp}{d\tau} = q,\quad 2\frac{dq}{d\tau} = -p - \frac{\gamma''}{r},\quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{\gamma'}{r}$$
$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{q}{r}\gamma'' + \gamma',\quad \frac{d\gamma'}{d\tau} = -\gamma + \frac{p}{r}\gamma'',\quad \frac{d\gamma''}{d\tau} = \frac{q\gamma - p\gamma'}{r} \tag{3.2}$$

Эти уравнения допускают пять первых интегралов [10], три из которых совпадают с первыми тремя соотношениями (1.2), а остальные два имеют вид (A и B — произвольные постоянные)

$$\begin{aligned}(p^2 - q^2 + \gamma)\cos\tau - (2pq + \gamma')\sin\tau &= A\\ (p^2 - q^2 + \gamma)\sin\tau + (2pq + \gamma')\cos\tau &= B\end{aligned} \tag{3.3}$$

Решениям (1.3), (1.4) системы (1.1) соответствуют следующие 2π-периодические решения системы (3.2):

$$\begin{aligned}&p = p_0,\ q = 0,\ r = r_0(\tau) = [2k\cos\tau +\\ &+ p_0^{-2}(1 - k^2 - p_0^4)]^{1/2},\ \gamma = \gamma_0(\tau) = k\cos\tau - p_0^2\\ &\gamma' = \gamma_0'(\tau) = -k\sin\tau,\ \gamma'' = \gamma_0''(\tau) = -p_0 r_0(\tau)\end{aligned} \tag{3.4}$$

В соответствии с п. 2 для исследования орбитальной устойчивости решения (1.3), (1.4) системы (1.1) изучим устойчивость по Ляпунову решения (3.4) уравнений (3.2). Условия устойчивости решения (3.4) будем искать методом функций Ляпунова. Для этого, полагая

$$p = p_0 + p_1,\ q = q_1,\ r = r_0(\tau) + r_1,\ \gamma = \gamma_0(\tau) + \gamma_1$$
$$\gamma' = \gamma_0'(\tau) + \gamma_1',\ \gamma'' = \gamma_0''(\tau) + \gamma_1''$$

и опуская нижний индекс при возмущениях, выпишем первые интегралы уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned}&W_1 = 4p_0p + 2r_0r - 2\gamma + 2p^2 + 2q^2 + r^2\\ &W_2 = 2\gamma_0 p + 2\gamma_0' q + \gamma_0'' r + 2p_0\gamma +\\ &+ r_0\gamma'' + 2p\gamma + 2q\gamma' + r\gamma''\\ &W_3 = 2\gamma_0\gamma + 2\gamma_0'\gamma' + 2\gamma_0''\gamma'' + \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2\\ &W_4 = 2p_0\cos\tau p - 2p_0\sin\tau q + \gamma\cos\tau -\\ &- \gamma'\sin\tau + (p^2 - q^2)\cos\tau = 2p\,q\sin\tau\\ &W_5 = 2p_0\sin\tau p + 2p_0\cos\tau q + \gamma\sin\tau +\\ &+ \gamma'\cos\tau + (p^2 - q^2)\sin\tau + 2pq\cos\tau\end{aligned} \tag{3.5}$$

Отметим, что все интегралы (3.5) зависят от переменной τ, играющей роль времени. Это делает необходимым распространение способа Пожарицкого [12] применения метода Четаева [5] построения функции Ляпунова на случай зависимости от времени первых интегралов уравнений возмущенного движения.

Введем некоторые обозначения. Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемые по x и непрерывные по t функции

$$V_i(x, t) = V_i^{(1)}(x, t) + V_i^{(2)}(x, t) + o(\| x \|^2)$$
$$(x \in R^n,\ t \in R;\ i = 1, \ldots, m)$$

Здесь $V_i^{(1)}$ $(V_i^{(2)})$ — линейные (квадратичные) относительно x и T-периодические по t члены разложений $V_i(x, t)$ в ряды Тейлора в окрестности $x = 0$; $o(\| x \|^2)/\| x \|^2 \to 0$ при $\| x \| \to 0$ равномерно по $t \geqslant t_0$.

Тогда справедливо следующее предложение, распространяющее теорему Ризито [13] на случай неавтономных первых интегралов.

Теорема 2. Для существования дважды непрерывно дифференцируемой функции $\psi: R^m \to R$, такой, что $\psi(V_1, \ldots, V_m)$ и ее матрица Гесса, вычисленная при $x = 0$, являются положительно определенными, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ выполнялись условия:

1) $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i V_i^{(1)} \equiv 0$

2) если $\sum\limits_{i=1}^{m} [V_i^{(1)}]^2 = 0$ и $x \neq 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i V_i^{(2)} > 0$

Доказательство этой теоремы без существенных изменений воспроизводит известные рассуждения ([13], с. 125—128).

Применим теорему 2 для построения функции Ляпунова из интегралов (3.5). Интегральная связка, не содержащая линейные слагаемые, такова:

$$W = -p_0^2 W_1 - 2p_0 W_2 - W_3 + 2kW_4 = \\ = -\{(2p_0^2 - 2k\cos\tau)p^2 + (2p_0^2 + 2k\cos\tau)q^2 + \\ + 4k\sin\tau pq + 4p_0 p\gamma + 4p_0 q\gamma' + \gamma^2 + \gamma'^2 + (p_0 r + \gamma'')^2\} \tag{3.6}$$

Рассмотрим форму (3.6) на многообразии, задаваемом равенствами

$$\begin{aligned} W_1^{(1)} &= 4p_0 p + 2r_0 r - 2\gamma = 0 \\ W_2^{(1)} &= 2p\gamma_0 + 2q\gamma_0' + r\gamma_0'' + 2p_0\gamma + r_0\gamma'' = 0 \\ W_3^{(1)} &= \gamma_0\gamma + \gamma_0'\gamma' + \gamma_0''\gamma'' = 0 \\ W_4^{(1)} &= 2p_0\cos\tau p - 2p_0\sin\tau q + \gamma\cos\tau - \gamma'\sin\tau = 0 \\ W_5^{(1)} &= 2p_0\sin\tau p + 2p_0\cos\tau q + \gamma\sin\tau + \gamma'\cos\tau = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Соотношения (3.7) позволяют выразить γ, γ', γ'', r через p и q:

$$\gamma = -2p_0 p, \quad \gamma' = -2p_0 q, \quad \gamma'' = -\frac{2}{r_0}(\gamma_0 p + \gamma_0' q), \\ r = -\frac{4p_0}{r_0} p \tag{3.8}$$

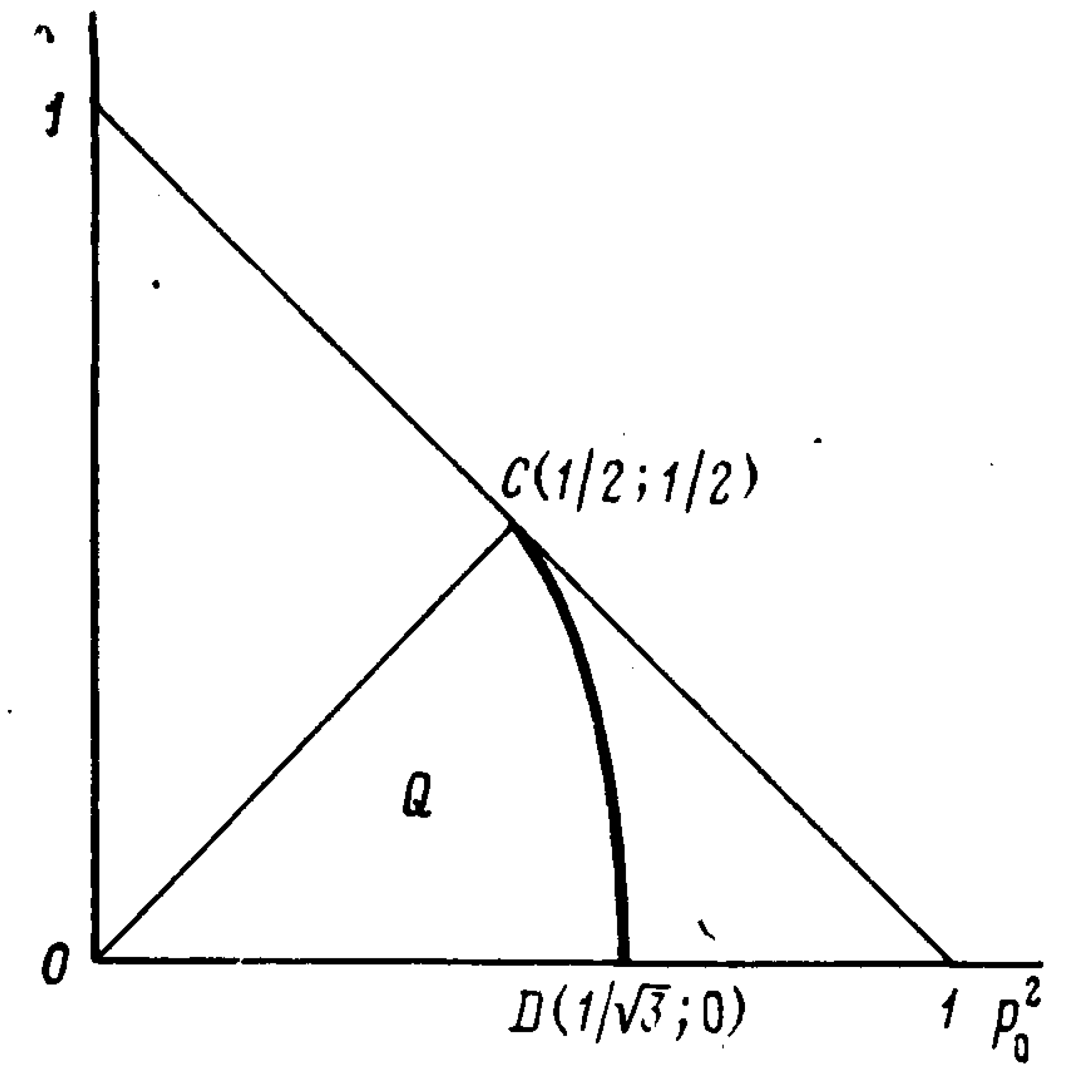
Используя (3.8), находим форму (3.6) на многообразии (3.7)

$$W_*(p, q) = \frac{2}{p_0^2 r_0^2}(a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2) \tag{3.9}$$
$$a_{11}(\tau) = (k\cos\tau + p_0^2)(1 - k^2 - 3p_0^4)$$
$$a_{12}(\tau) = -k\sin\tau(1 - k^2 - 3p_0^4)$$
$$a_{22}(\tau) = p_0^2(1 - 3k^2 - p_0^4) - k(1 - k^2 - 3p_0^4)\cos\tau$$

Необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы (3.9) с периодическими по τ коэффициентами отыскиваются при помощи критерия Сильвестра и неравенства (1.5). Они имеют вид

$$(3.10) \qquad 0 \leqslant k < p_0^2, \quad k^2 + 3p_0^4 < 1$$

По теореме 2 из интегралов (3.5) можно методом Четаева построить знакоопределенную связку, если параметры k и p_0 удовлетворяют неравенствам (3.10). При этом зависящее от k и p_0 периодическое движение (3.4) системы (3.2) устойчиво по Ляпунову. В силу следствия из теоремы 1 неравенства (3.10) дают достаточные условия орбитальной устойчивости решения (1.3), (1.4) системы (1.1).



Условия (3.10) определяют в плоскости параметров Okp_0^2 область Q, каждая точка которой соответствует орбитально устойчивому решению (1.3), (1.4) уравнений движения гироскопа Ковалевской в случае интегрируемости Бобылева — Стеклова (фигура).

Замечания. 1°. Изучаемое решение (1.3), (1.4) стационарно по компонентам p и q угловой скорости, поэтому из условия (3.10) орбитальной устойчивости следует устойчивость по Ляпунову этого решения относительно переменных p и q в смысле определения из работы [14].

2°. В случае Делоне [10], когда $k = 0$, решениям (1.3), (1.4) системы (1.1) соответствуют равномерные вращения гироскопа Ковалевской вокруг осей, не совпадающих с главными. Необходимые и достаточные условия устойчивости по Ляпунову этих движений

$$(3.11) \qquad 0 < p_0^2 < 1/\sqrt{3}$$

установлены в [15, 16]. При $k = 0$ неравенства (3.10) также дают условия (3.11), которым соответствует отрезок OD на фигуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954, с. 327—401.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
3. *Жуковский Н. Е.* О прочности движения. Собр. соч. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1948, с. 67—160.
4. *Аминов М. Ш.* Об устойчивости некоторых механических систем.— Тр. Казан. авиац. ин-та, 1950, т. 24, с. 3—69.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
6. *Мильштейн Г. Н.* Устойчивость и стабилизация периодических движений автономных систем.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 744—749.
7. *Старжинский В. М.* Орбитальная устойчивость в одном частном случае задачи трех тел.— Вопросы механики. Избранные вопросы динамики: Сб. статей. Моск. о-во испытателей природы. Секц. физики. М.: Наука, 1976, с. 7—11.
8. *Маркеев А. П., Сокольский А. Г.* Метод построения и исследования устойчивости периодических движений автономных гамильтоновых систем.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 52—65.
9. *Зубов В. И.* Теория колебаний. М.: Высш. школа, 1979. 400 с.
10. *Суслов Г. К.* Вращение тяжелого твердого тела около неподвижного полюса (случай С. В. Ковалевской).— Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания, 1895, т. 7, вып. 2, с. 1—3.
11. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
12. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 2, с. 145—154.

13. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
14. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии, 1957, вып. 4, с. 9—16.
15. *Румянцев В. В.* К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 3, с. 339—346.
16. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наук. думка, 1977. 160 с.

Донецк

Поступила в редакцию
21.III.1985