Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 531.38+532.5

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Буров А. А., Субханкулов Г. И.

Исследуется задача о движении твердого магнетика в постоянном однородном магнитном поле с учетом гиромагнитных эффектов. Выводятся уравнения движения, исследуется их гамильтонова структура, указываются случаи интегрируемости. Рассматриваются некоторые классы стационарных движений, исследуется их устойчивость.

Гиромагнитные эффекты обусловлены наличием у электронов спинового магнитного и механического моментов [1]. Вращение тела приводит к его намагничиванию (эффект Барнетта), а свободно подвешенное тело при намагничивании начинает вращаться (эффект Эйнштейна — де Хааса) [2]. Учет гиромагнитных явлений оказывается необходимым при анализе движения точных гироскопических систем.

1. Построение моделей сплошных сред, обладающих гиромагнитными свойствами, связано с введением в число определяющих параметров внутреннего момента количества движения [3, 4]. Пусть твердое тело движется в неограниченном объеме идеальной несжимаемой покоящейся на бесконечности жидкости и в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{h}$. Предположим, что скорость жидкости допускает однозначный потенциал. Плотность свободной энергии в объеме G, занимаемом телом, имеет вид [4]

$$F = \mathbf{B}^2/(8\pi) - \mathbf{M}\cdot\mathbf{B} + F_0(\mathbf{M}) + \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{M}/g \tag{1.1}$$

где $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля ($\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$), $\mathbf{M}$ — магнитный момент единицы объема, g — гиромагнитное отношение, $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения тела. Тогда $\mathbf{H} = 4\pi\partial F/\partial\mathbf{B} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ — напряженность магнитного поля ($\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$), $\mathbf{k} = -\partial F/\partial\mathbf{\Omega} = -\mathbf{M}/g$ — объемная плотность внутреннего механического момента. Предположим, что система находится в тепловом равновесии и диссипацией энергии можно пренебречь. Тогда $\partial F/\partial\mathbf{M} = 0$ и поэтому $\mathbf{B} = \partial F_0/\partial\mathbf{M} + \mathbf{\Omega}/g$.

Пусть жидкость линейно намагничивающаяся. Тогда в магнитостатическом приближении при фиксированных положении тела и угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ магнитное поле определяется из уравнений и граничных условий

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=0;\quad [\mathbf{B}_n]=0,\quad [\mathbf{H}_\tau]=0;\quad \mathbf{H}-\mathbf{h}\to 0,\quad |\mathbf{x}|\to\infty\\ \mathbf{B}=\mu_2\mathbf{H},\quad \mathbf{x}\in G^-=\mathbf{R}^3\setminus G\\ \mathbf{B}=\partial F_0/\partial\mathbf{M}+\mathbf{\Omega}/g,\quad \mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}\quad (\mathbf{x}\in G)\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{h}$ — напряженность постоянного однородного магнитного поля, μ_2 — магнитная проницаемость жидкости.

На решениях задачи (1.2) рассмотрим собственную свободную энергию системы

$$\Phi=\int\limits_{\mathbf{R}^3}\left(F-\frac{1}{8\pi}\mu_2\mathbf{h}^2\right)d\tau \tag{1.3}$$

где F при $\mathbf{x}\in G$ определяется из (1.1), $F = (8\pi)^{-1}\mu_2\mathbf{H}^2$ при $\mathbf{x}\in G^-$.

Вычислим вариацию Φ при варьировании $\mathbf{h}$ и $\mathbf{\Omega}$. Согласно (1.2), (1.3)

$$\delta\Phi=\int\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}-\mu_2\mathbf{h}\cdot\delta\mathbf{h})\,d\tau-\int\limits_{G}\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{\Omega}\,d\tau$$

Выражение в скобках под знаком первого интеграла представим в виде

$$-(\mathbf{B}-\mu_2\mathbf{H})\cdot\delta\mathbf{h}+\mathbf{H}\cdot\delta(\mathbf{B}-\mu_2\mathbf{h})+(\mathbf{B}-\mu_2\mathbf{h})\cdot\delta\mathbf{h}=$$
$$=-(\mathbf{B}-\mu_2\mathbf{H})\cdot\delta\mathbf{h}+\operatorname{div}[\delta(\mathbf{A}-\mathbf{A}_0)\times\mathbf{H}+(\mathbf{A}-\mathbf{A}_0)\times\delta\mathbf{h}]$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_0$ — векторные потенциалы полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_0=\mu_2\mathbf{H}$ соответственно. В силу (1.2) интеграл от второго слагаемого обращается в нуль. Обозначая

$$(1.4)\qquad \mathbf{m}=\frac{1}{4\pi}\int_G(\mathbf{B}-\mu_2\mathbf{H})\,d\tau,\qquad \mathbf{K}_1=\int_G\mathbf{k}\,d\tau$$

полный магнитный и полный внутренний механический моменты системы, получаем

$$(1.5)\qquad \delta\Phi=-\mathbf{m}\cdot\delta\mathbf{h}-\mathbf{K}_1\cdot\delta\mathbf{\Omega}$$

Формула (1.5) позволяет определить зависимость Φ от $\mathbf{h}$ и $\mathbf{\Omega}$, если по решению задачи (1.2) величины $\mathbf{m}$ и $\mathbf{K}_1$ уже найдены.

В ортогональной системе координат $Ox^1x^2x^3$, жестко связанной с телом, компоненты тензоров наделяются индексами i, j, k. Символы δ и $(\ )^{\cdot}$ означают вариацию и производную по времени в этой подвижной системе координат.

Пусть

$$(1.6)\qquad F_0(\mathbf{M})=\Theta^iM_i+{}^1/_2\Theta^{ij}M_iM_j+{}^1/_6\Theta^{ijk}M_iM_jM_k+\ldots$$

где Θ^i, Θ^{ij}, ... — заданные функции точек тела. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование; по повторяющимся индексам в скобках суммирование отсутствует.

Так как поле $\mathbf{h}$ однородно, то в силу (1.2)—(1.4) свободная энергия тела Φ зависит лишь от Ω_i и h^i. Тогда из (1.5) следует

$$(1.7)\qquad \mathbf{m}=-\partial F/\partial\mathbf{h},\quad \mathbf{K}_1=-\partial F/\partial\mathbf{\Omega}$$

2. Пусть $T=T(\mathbf{\Omega},\ \mathbf{u})$ — кинетическая энергия жидкости и тела, где $\mathbf{u}$ — скорость точки O. Тогда

$$T={}^1/_2\alpha_0{}^{ij}\Omega_i\Omega_j+\beta^{ij}u_j\Omega_i+{}^1/_2\gamma^{ij}u_iu_j$$

Движение тела определяется из принципа Гамильтона — Остроградского

$$(2.1)\qquad \delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0,\quad L=T-\Phi=L(\mathbf{\Omega},\mathbf{u},\mathbf{h})$$

при вариации закона движения, обращающейся в нуль при $t=t_{1,2}$. Используя формулы для вариации

$$\delta\mathbf{\Omega}=(\delta\boldsymbol{\theta})^{\cdot}+\mathbf{\Omega}\times\delta\boldsymbol{\theta},\quad \delta\mathbf{u}=(\delta\mathbf{l})^{\cdot}+\mathbf{\Omega}\times\delta\mathbf{l}+\mathbf{u}\times\delta\boldsymbol{\theta},\quad \delta\mathbf{h}=\mathbf{h}\times\delta\boldsymbol{\theta}$$

где $\delta\boldsymbol{\theta}$, $\delta\mathbf{l}$ — бесконечно малые поворот и поступательное перемещение тела, получим

$$(2.2)\qquad \delta_1\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt+L\delta t\,|_{t_1}^{t_2}=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\{(-\mathbf{K}^{\cdot}+\mathbf{K}\times\mathbf{\Omega}+\mathbf{p}\times\mathbf{u}+\mathbf{m}\times\mathbf{h})\cdot\delta\boldsymbol{\theta}+(-\mathbf{p}^{\cdot}+\mathbf{p}\times\mathbf{\Omega})\cdot\delta\mathbf{l}\}\,dt+$$
$$+[\mathbf{K}\cdot\delta_1\boldsymbol{\theta}+\mathbf{p}\cdot\delta_1\mathbf{l}-\mathbf{H}\delta t]_{t_1}^{t_2},\quad \delta_1\mathbf{l}=\delta\mathbf{l}+\mathbf{u}\delta t,\quad \delta_1\boldsymbol{\theta}=\delta\boldsymbol{\theta}+\mathbf{\Omega}\delta t$$

Здесь δ_1 — полная вариация величин при варьировании закона движения тела и времени. Переменные $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{u}$, $\mathbf{K} = \partial L/\partial \mathbf{\Omega}$, $\mathbf{m} = \partial L/\partial \mathbf{h}$ — импульс, механический и магнитный моменты системы, $\mathbf{H} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{\Omega} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{u} - L$ — энергия системы.

Рассмотрим $\mathbf{H}$ как функцию переменных $\mathbf{K}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{h}$. Тогда $\mathbf{\Omega} = \partial H/\partial \mathbf{K}$, $\mathbf{u} = \partial H/\partial \mathbf{p}$, $\mathbf{m} = -\partial H/\partial \mathbf{h}$ и в силу (2.1), (2.2)

$$\mathbf{K}^{\cdot} = \mathbf{K}\times\partial H/\partial \mathbf{K} + \mathbf{p}\times\partial H/\partial \mathbf{p} + \mathbf{h}\times\partial H/\partial \mathbf{h}, \quad \mathbf{p}^{\cdot} = \mathbf{p}\times\partial H/\partial \mathbf{K} \tag{2.3}$$

Уравнение

$$\mathbf{h}^{\cdot} = \mathbf{h}\times\partial H/\partial \mathbf{K} \tag{2.4}$$

описывающее изменение вектора $\mathbf{h}$ в подвижной системе координат, позволяет получить замкнутую систему уравнений относительно $\mathbf{K}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{h}$.

3. Для вычисления Φ примем некоторые упрощающие предположения. Будем считать, что функция $F_0(M)$ задается первыми двумя слагаемыми из разложения (1.6). Тогда решение задачи (1.2) линейно зависит от $\mathbf{h}$ и $\mathbf{\Omega}$ и в силу (1.2), (1.4) величины $\mathbf{m}$ и $\mathbf{K}_1$ можно записать в виде

$$m_j = M_j - d_{ij}^{(1)}h^i - \eta_j^{\ i}\Omega_i, \qquad K_1^{\ i} = \varkappa^i - \eta^i_{\ j}h^j + \alpha_1^{\ ij}\Omega_j \tag{3.1}$$

где M_j, $\varkappa^i$, $d_{ij}^{(1)}$, $\eta^i_{\ j}$, $\alpha_1^{\ ij}$ — постоянные, определяемые геометрией тела и величинами μ_2, Θ^i, Θ^{ij}, g. Подставляя (3.1) в (1.5), получим с точностью до аддитивной постоянной выражение для свободной энергии

$$\Phi = -\mathrm{M}_j h^j - \varkappa^i\Omega_i + {}^1/_2 d_{ij}^{(1)}h^ih^j + \eta_j^{\ i}\Omega_ih^j - {}^1/_2\alpha_1^{\ ij}\Omega_i\Omega_j \tag{3.2}$$

В общем случае аналитическое отыскание входящих в выражение (3.2) постоянных достаточно сложно. Рассмотрим некоторые примеры, когда их удается выписать в явном виде.

Пример 1 (ср. [5]). Пусть ∂G — эллипсоид, $\Theta^{ij} = \delta^{ij}\mu_1\chi_1^{-1}$, величины g, Θ^i, μ постоянны в G. Тогда известно точное решение задачи (1.2) [2]. При этом поле $\mathbf{H}$ постоянно внутри тела и в главных осях эллипсоида имеет вид

$$H^i = (h^{(i)} + 4\pi N_{(i)}\Gamma^{(i)}\chi_1\mu_2^{-1})\,Z^{(i)}, \quad \Gamma^i = \Theta^i + \Omega^i g^{-1}, \quad Z^i = (1 + 4\pi\chi N_i)^{-1}$$

Здесь χ_1 и χ_2 — магнитные восприимчивости жидкости и тела, $\chi = (\mu_1 - \mu_2)/4\pi\mu_2$, N_i — размагничивающие факторы эллипсоида [2]. Из (1.4) находим (V — объем эллипсоида)

$$m^i = \mu_2 V(\chi h^{(i)} - \Gamma^{(i)}\chi_1\mu_2^{-1})\,Z^{(i)}, \qquad K_1^{\ i} = -V\chi_1(h^{(i)} - \Gamma^{(i)}(1 - 4\pi N_{(i)}\chi_2\mu_2^{-1}))\,Z^{(i)}g^{-1}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
&d_{ij}^{(1)} = d_{(i)}^{(1)}\delta_{(i)j}, \quad \eta_j^{\ i} = \eta_{(j)}\delta^i_{(j)}, \quad \alpha_1^{\ ij} = \alpha_1^{(i)}\delta^{(i)j}\\
&\mathrm{M}_i = -\chi_1\Theta_{(i)}VZ^{(i)}, \quad d_i^{(1)} = -\mu_2\chi VZ^i, \quad \eta_i = \chi_1 VZ^i g^{-1}\\
&\alpha_1^{\ i} = \chi_1 Vg^{-2}(1 - 4\pi\chi_2\mu_2^{-1}N_{(i)})\,Z^{(1)}\\
&\varkappa^i = \chi_1\Theta^{(i)}Vg^{-1}(1 - 4\pi\chi_2\mu_2^{-1}N_{(i)})\,Z^{(i)}
\end{aligned}$$

Пример 2. Пусть форма тела произвольна, $\mu_1 = \mu_2$ и g, Θ^i постоянны в G. Тогда решение задачи (1.2) имеет вид

$$\mathrm{H}^i = h^i - \chi_2\mu_2^{-1}(\Omega^j g^{-1} + \Theta^j)\,\nabla^i\nabla_j P, \quad P(\mathbf{x}) = \int\limits_G |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}d\tau_y$$

В силу (1.4), (3.1) (V — объем тела)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_i = -\chi_2\Theta_i V, \quad \eta_j^{\ i} = \eta\delta_j^{\ i}, \quad \eta = \chi_2 Vg^{-1}, \quad d_{ij}^{(1)} = 0\\
&\varkappa^i = \chi_2 g^{-1}T^{ij}\Theta_j, \quad \alpha_1^{\ ij} = \chi_2 g^{-2}T^{ij}, \quad T^{ij} = \int\limits_G (\delta^{ij} + \chi_2\mu_2^{-1}\nabla^i\nabla^j P)\,d\tau
\end{aligned}$$

Отметим, что учет в разложении (1.6) слагаемых степени три и выше приводит к появлению в разложении Φ по $\mathbf{h}$ и $\mathbf{\Omega}$ слагаемых степени выше двух.

4. Получим явное выражение для функции $H = H(\mathbf{K}, \mathbf{p}, \mathbf{h})$ в предположениях п. 3. Согласно (2.1), (3.2)

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & L = T - \Phi = {}^1/_2\alpha^{ij}\Omega_i\Omega_j + \beta_{ij}\Omega_i u_j + {}^1/_2\gamma^{ij}u_i u_j - \\
& - \eta_j{}^i\Omega_i h^j - {}^1/_2 d_{ij}^{(1)}h^i h^j + \mathrm{M}_i h^i + \varkappa^i\Omega_i, \quad \alpha^{ij} = \alpha_0{}^{ij} + \alpha_1{}^{ij}
\end{aligned}
$$

Полные механический и магнитный моменты, импульс и энергия имеют вид

$$
\begin{aligned}
(4.2)\qquad & K^i = \partial L/\partial\Omega_i = \alpha^{ij}\Omega_j + \beta^{ij}u_j - \eta_j{}^i h^j + \varkappa^i \\
& m_j = \partial L/\partial h^j = - d_{ij}^{(1)}h^i - \eta_j{}^i\Omega_i + \mathrm{M}_j \\
& p_i = \partial L/\partial u_i = \beta^{ij}\Omega^j + \gamma^{ij}u_j \\
& H = {}^1/_2 a_{ij}K^i K^j + b_{ij}K^i p_j + {}^1/_2 c_{ij}p^i p^j + {}^1/_2 d_{ij}h^i h^j + \\
& + e_{ij}K^i h^j + f_{ij}p^i h^j \\
& - a_{ij}\varkappa^i K^j - b_{ij}\varkappa^i p^j - (\mathrm{M}_i + e_{ij}K^j)h^i + {}^1/_2 c_{ij}\varkappa^i\varkappa^j \\
& \left\| \begin{matrix} \|\alpha^{ij}\| & \|\beta^{ij}\| \\ \|\beta^{ij}\| & \|\gamma^{ij}\| \end{matrix} \right\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} \|a_{ij}\| & \|b_{ij}\| \\ \|b_{ij}\| & \|c_{ij}\| \end{matrix} \right\| \\
& d_{ij} = d_{ij}^{(1)} + a_{km}\eta_i{}^k\eta_j{}^m, \quad e_{ij} = a_{ik}\eta_j{}^k, \quad f_{ij} = b_{ik}\eta_j{}^k
\end{aligned}
$$

В силу (4.1) тензор $\alpha_1{}^{ij}$, играющий роль присоединенного тензора инерции, обусловленного магнитными свойствами вещества, оказывает существенное влияние на движение твердого тела G.

Так, например, для тела эллипсоидальной формы (пример 1) при $\chi_1 > 0$ матрица $\|\alpha_1{}^{ij}\|$ положительно определена и, следовательно, для раскрутки тела необходима дополнительная работа, равная по величине при $\varkappa^i = 0$ энергии системы Φ в образующемся при вращении тела магнитном поле. Следует отметить, что тензор $\alpha_1{}^{ij}$ в общем случае не является положительно-определенным.

Для ферромагнетиков $M_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\varkappa^i = 0$. Это свойство объясняется тем, что упорядочение спинов электронов в каком-либо направлении создает ненулевые собственные магнитный и механический моменты уже у покоящегося тела в нулевом внешнем магнитном поле. В общем случае $M_i = 0$ не влечет $\varkappa_i = 0$ за счет, например, наличия в теле постоянных кольцевых токов.

Величины e_{ij}, f_{ij}, $\varkappa^i$ обращаются в нуль при $g \to \infty$, т. е. наличие в (4.2) соответствующих слагаемых существенно связано с проявлением гиромагнитных эффектов.

Пусть $M_i = 0$, $\varkappa^i = 0$. Обозначим $K_C{}^i = \alpha^{ij}\Omega_j + \beta^{ij}u_j$, $m_{Cj} = -\Omega_i\eta_j{}^i$ механический и магнитный моменты системы, обусловленные движением тела, $K_1{}^i = -\eta_j{}^i h^j$, $m_{1j} = -d_{ij}{}^{(1)}h^i$ — моменты, связанные с наличием внешнего поля $\mathbf{h}$. Уравнения (2.3), (2.4) запишем в виде

$$
\mathbf{K}_C{}^{\cdot} = \mathbf{K}_C\times\mathbf{\Omega} + \mathbf{p}\times\mathbf{u} + \mathbf{m}_1\times\mathbf{h} + \mathbf{M}_g, \quad \mathbf{p}^{\cdot} = \mathbf{p}\times\mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{h}^{\cdot} = \mathbf{h}\times\mathbf{\Omega}
$$

где $\mathbf{M}_g = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{\Omega} + \mathbf{m}_C \times \mathbf{h} - \mathbf{K}_1{}^{\cdot}$ —момент сил, действующих на механическую систему «тело плюс жидкость» со стороны поля, обусловленных гиромагнитными эффектами. Преобразуем $\mathbf{M}_g$ к виду

$$
(4.3)\qquad \mathbf{M}_g = -(\mathbf{\Lambda}\mathbf{h})\times\mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega}\mathbf{\Lambda})\times\mathbf{h} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{h}\times\mathbf{\Omega}), \quad \mathbf{\Lambda} = (\eta_j{}^i)
$$

Так как $< \mathbf{M}_g, \mathbf{\Omega} > = 0$, то силы, связанные с гиромагнитными эффектами, гироскопические. Если $\eta_j{}^i = \eta_{(j)}\delta_{(j)}{}^i$, то $M_g{}^i = e^{(i)jk}h_j\Omega_k(\eta_{(i)} + \eta_k - \eta_j)$. В частности, при $\eta_i = \eta$ получим

$$
(4.4)\qquad \mathbf{M}_g = -\eta\mathbf{\Omega}\times\mathbf{h}
$$

Вращение твердого тела с неподвижной точкой под действием момента сил вида (4.4) изучалось в работе [6].

5. Введем в пространстве бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbf{R}^9$ ($\mathbf{K}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{h}$), скобку Пуассона, полагая

(5.1) $$\{K^i, K^j\} = -e^{ijk}K^k, \ \{K^i, p^j\} = -e^{ijk}p^k, \ \{K^i, h^j\} = -e^{ijk}h^k$$
$$\{h^i, h^j\} = \{p^i, h^j\} = \{p^i, p^j\} = 0$$

Тогда систему (2.3), (2.4) можно переписать в виде [7]

(5.2) $$\mathbf{K}^{\cdot} = \{\mathbf{K}, H\}, \quad \mathbf{p}^{\cdot} = \{\mathbf{p}, H\}, \quad \mathbf{h}^{\cdot} = \{\mathbf{h}, H\}$$

Отметим, что скобка типа (5.1) была впервые применена в работе [8] при исследовании гамильтоновой структуры уравнений Кирхгофа.

Функции $I_1 = \mathbf{p}^2$, $I_2 = \mathbf{p}\cdot\mathbf{h}$, $I_3 = \mathbf{h}^2$ коммутируют с любой гладкой функцией на $\mathbf{R}^9$ ($\mathbf{K}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{h}$), т. е. скобка (5.1) вырождена. Из (5.2) следует, что I_1, I_2, I_3 — первые интегралы. Ограничение скобки (5.1) на них неособый совместный уровень

$$I_{123}(l_1, l_2, l_3) = \{I_1 = l_1^2 > 0, \ I_2 = l_2, \ I_3 = l_3^2 > 0\}$$

невырождено и в некоторых специальных переменных приводится к каноническому виду.

Размерность I_{123} равна шести, поэтому для интегрируемости системы (5.2) по Лиувиллю недостает двух дополнительных коммутирующих между собой первых интегралов.

Пусть уровень интегралов I_{123} является особым. Тогда $l_2 = l_1 l_3$ и существует вектор $\boldsymbol{\gamma}$: $\mathbf{p} = l_1\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{h} = l_3\boldsymbol{\gamma}$. На этом уровне функция Гамильтона (4.2) и скобка Пуассона (5.1) принимают вид

(5.3) $$H = {}^1/_2 A_{ij}K^iK^j + B_{ij}K^i\gamma^j + {}^1/_2 C_{ij}\gamma^i\gamma^j + D_iK^i + E_i\gamma^i$$

(5.4) $$\{K^i, K^j\} = -e^{ijk}K^k, \quad \{K^i, \gamma^j\} = -e^{ijk}\gamma^k, \quad \{\gamma^i, \gamma^j\} = 0$$
$$A_{ij} = a_{ij}, \quad B_{ij} = l_1 b_{ij} + l_3 e_{ij}, \quad C_{ij} = l_1^2 c_{ij} + l_3^2 d_{ij} + l_1 l_3 f_{ij}$$
$$D_i = -a_{ij}\varkappa^j, \quad E_i = -l_1 b_{ij}\varkappa^j - l_3(\mathrm{M}_i + e_{ij}\varkappa^j) = -B_{ij}\varkappa^j - l_3\mathrm{M}_i$$

Соответствующие уравнения Гамильтона

(5.5) $$\mathbf{K}^{\cdot} = \{\mathbf{K}, H\}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\cdot} = \{\boldsymbol{\gamma}, H\}$$

в пределе, при $l_1 = 0$ описывают движение тела вокруг неподвижной точки.

Система (5.5) обладает тремя первыми интегралами: энергии $J_0 = H$, площадей $J_1 = \mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\gamma}$, а также интегралом $J_2 = \boldsymbol{\gamma}^2$. Для ее полной интегрируемости недостает одного дополнительного интеграла.

Известны некоторые случаи, когда этот интеграл существует. Это случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева — Чаплыгина из задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, случаи Жуковского, Сретенского и динамической симметрии из задачи о движении гиростата, случаи динамической симметрии, Клебша, Ляпунова, Стеклова, Чаплыгина из задачи о движении твердого тела в идеальной жидкости.

Пусть $a_{ij} = a_{(i)}\delta_{(i)j}$, a_1, a_2, a_3 различны и положительны. Если $\mathbf{B} = \mathbf{C} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, то согласно [9, 10] при $\mathbf{E} \neq 0$ дополнительного интеграла в классе аналитических функций не существует. Если $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{E} = 0$, то дополнительный интеграл существует лишь в случае Клебша [11]. Если $\mathbf{B} \neq 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{E} = 0$, то необходимые условия существования дополнительного аналитического интеграла имеют вид [11]

(5.6) $$\mathrm{B} = \mathrm{diag}\,(b_1, b_2, b_3), \quad a_1^{-1}(b_2 - b_3) + a_2^{-1}(b_3 - b_1) + a_3^{-1}(b_1 - b_2) = 0$$

Для случая, рассмотренного в примере 2, при $\mathbf{M} = \varkappa = 0$ функция Гамильтона имеет вид

(5.7) $$H = {}^1/_2 a_i K_i^2 + \eta a_i K_i \gamma_i + {}^1/_2 \eta^2 a_i \gamma_i^2$$

Тогда, если a_1, a_2, a_3 различны, условие существования дополнительного интеграла (5.6) приводится к виду $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) = 0$. Следовательно, уравнения движения интегрируемы тогда и только тогда, когда среди a_i имеются два совпадающих, например $a_1 = a_2$ [12]. При этом дополнительный интеграл имеет вид $J_3 = K_3$.

6. Изучим стационарные движения тела в случае, рассмотренном в примере 2, в предположении $\mathbf{M} = \varkappa = 0$, $l_1 = 0$. Если $a_1 \neq a_2 \neq a_3$, то стационарные движения определяются из соотношения

$$\delta U_1 = 0, \quad U_1 = H + \lambda J_1 + {}^1/_2 \mu J_2 \quad (\eta = 1, \mathbf{h} \equiv \gamma)$$

Эти стационарные движения представляют собой равномерные вращения вокруг одной из осей инерции тела, причем условия устойчивости вращения вокруг i-й оси имеют вид $a_j > a_i$, $j \neq i$.

В силу гидродинамической аналогии перманентным вращениям гиромагнитного твердого тела соответствуют постоянно винтовые движения тела в жидкости. Устойчивость таких движений была исследована Ляпуновым [13].

В случае, когда тело динамически симметрично ($a_1 = a_2 = a$), в классе стационарных движений помимо перманентных вращений имеются регулярные прецессии. Стационарные движения определяются из условия

$$\delta U_2 = 0, \quad U_2 = H + \lambda J_1 + {}^1/_2 \mu J_2 - \omega J_3$$

Это условие имеет вид

(6.1) $$aK_\alpha + (a + \lambda) h_\alpha = 0, \quad (a + \lambda) K_\alpha + (a + \mu) h_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

(6.2) $$a_3 K_3 + (a_3 + \lambda) h_3 = \omega, \quad (a_3 + \lambda) K_3 + (a_3 + \mu) h_3 = 0$$

Система (6.1) допускает нетривиальное решение $(K_\alpha^\circ, h_\alpha^\circ)$, если выполнено условие $a(a + \mu) - (a + \lambda)^2 = 0$. Выражая отсюда μ и подставляя его значение во второе уравнение (6.2), получим уравнение

(6.3) $$(a_3 + \lambda) K_3 + (a_3 - a + a^{-1}(a + \lambda)^2) h_3 = 0$$

связывающее значение λ со значениями сохраняющихся на регулярных прецессиях величин $K_3 = K_0$, $h_3 = h_0$. При данных K_0, h_0 регулярная прецессия существует, если уравнение (6.3) можно разрешить относительно λ, т. е. при выполнении условия

(6.4) $$aK_0^2 - 4h_0(a_3 - a)(K_0 + h_0) \geqslant 0$$

Регулярная прецессия описывается уравнениями

$$K_1^\circ = \Lambda h_* \sin \omega t, \quad h_1^\circ = h_* \sin \omega t, \quad K_2^\circ = \Lambda h_* \cos \omega t, \quad h_2^\circ = h_* \cos \omega t$$

$$K_3 = K_0, \quad h_3 = h_0, \quad h_* = \sqrt{\mathbf{h}^2 - h_0^2}, \quad \Lambda = -(a + \lambda)/a$$

где h — величина напряженности внешнего магнитного поля.

Можно показать, что при выполнении условия

$$a(K_0 - 2\Lambda h_0)^2 + (a_3 - a + a\Lambda^2)(h^2 - h_0^2) > 0$$

соответствующее прецессионное движение устойчиво по отношению к переменным $u_\alpha = K_\alpha - \Lambda h_\alpha$, $\alpha = 1, 2, h_3, K_3$.

В пределе при $h_0 \to h$ регулярная прецессия переходит в перманентное вращение тела вокруг оси динамической симметрии. Условие устойчивости этого вращения по отношению к переменным K_i, h_i имеет вид

(6.5) $$aK_0^2 - 4h(a_3 - a)(K_0 + h) > 0$$

Заметим, что согласно (6.5) устойчивость вращения гиромагнитного твердого тела вокруг оси динамической симметрии существенно зависит не только от величины угловой скорости, но и от направления вращения.

Авторы благодарят А. Н. Голубятникова, А. В. Карапетяна, В. В. Козлова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М. Наука, 1983. 664 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. Т. 1. 528 с.; Т. 2. 560 с.
4. *Желнорович В. А.* Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами. М.: Изд-во МГУ, 1980. 174 с.
5. *Егармин Н. Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела. — В кн.: Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: Изд-е МФТИ, 1983, с. 95—96.
6. *Самсонов В. А.* О вращении тела в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 32—34.
7. *Буров А. А., Субханкулов Г. И.* О существовании дополнительных интегралов уравнений движения намагничивающегося твердого тела в идеальной жидкости при наличии магнитного поля.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 5, с. 745—749.
8. *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛШМ).— Функциональный анализ и его приложения, 1981, т. 15, вып. 3, с. 54—66.
9. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела.—: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
10. *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1980, т. 141, с. 287—303.
11. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1982, т. 266, № 6, с. 1298—1300.
12. *Козлов В. В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, вып. 6, с. 28—33.
13. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости.— В кн.: Ляпунов А. М. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954, т. 1, с. 276—319.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1985