Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 531.36

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМ СЛУЧАЕ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА

Куницын А. Л., Ташимов Л. Т.

Исследуется устойчивость периодического движения в критическом случае n пар чисто мнимых характеристических показателей. Показано, что при резонансе когда отношение модуля одного из характеристических показателей к частоте невозмущенного движения — целое число, как правило, имеет место неустойчивость. Полученный результат используется для исследования автоколебаний автономной квазилинейной системы в случае, когда неприменим критерий Андронова — Витта [1]. Доказывается неустойчивость автоколебаний маятника Фроуда в бифуркационной точке.

1. Рассмотрим задачу об устойчивости периодического движения периода ω системы с n степенями свободы в критическом случае n пар чисто мнимых характеристических показателей $\pm\lambda_s$ ($s = 1, \ldots, n$). Тогда уравнения возмущенного движения можно представить в виде [2]

$$\xi^{\cdot} = \lambda\xi + \sum_{l=2}^{\infty} \Xi^{(l)}(\xi, \eta, t), \quad \eta^{\cdot} = -\lambda\eta + \sum_{l=2}^{\infty} \mathrm{H}^{(l)}(\xi, \eta, t) \tag{1.1}$$
$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n), \quad \lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Здесь ξ и η — комплексно-сопряженные переменные, $\Xi^{(l)}$ и $\mathrm{H}^{(l)}$ — комплексно-сопряженные вектор-формы l-го порядка с ω-периодическими по t коэффициентами.

В приложениях наиболее интересны случаи, в которых задача решается первыми нелинейными членами системы (1.1). Как известно, это прежде всего случаи внутреннего резонанса третьего и четвертого порядка. При этом, за исключением канонических систем, рассматривавшихся в [3—5], почти всегда предполагалось, что ни одно из отношений $\nu_s \equiv \lambda_s\omega/(\pi i)$ не является целым числом. Было показано [6, 7], что даже при $n = 1$ случай ν_s целого характеризуется повышенной сложностью; причем, принципиальное значение имеет четность указанного отношения: при четном его значении вопрос об устойчивости решается уже квадратичными членами системы (1.1) и критерий устойчивости записывается в виде алгебраических неравенств, накладываемых на коэффициенты нормальной формы. При ν_s нечетном низший порядок членов нормализованной системы — третий, а условия устойчивости не могут быть записаны в виде явной системы алгебраических неравенств для коэффициентов нормальной формы.

Ниже будет рассмотрен случай $n \geqslant 1$ в предположении, что одно из указанных отношений есть четное число. Не нарушая общности, предположим, что этому условию удовлетворяет величина ν_1.

Полагая в (1.1)

$$\Xi_s^{(l)} = \sum_{h+k=l} R_s^{(h_1, \ldots, h_n, k_1, \ldots, k_n)} \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{h_j} \eta_j^{k_j}$$
$$k = k_1 + \ldots + k_n; \quad h = h_1 + \ldots + h_n; \quad s = 1, \ldots, n$$

и выполняя нормализацию [8], систему (1.1) можно привести к нормальной форме в новых комплексно-сопряженных переменных $u = (u_1, \ldots, u_n)$

и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ (подсистема для $v^{\cdot}$ опущена)

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} & u_1^{\cdot} = c_{20}u_1^2 + c_{11}u_1v_1 + c_{02}v_1^2 + O(|u|^3) \\ & u_\alpha^{\cdot} = O(|u|^3), \quad \alpha = 2, \ldots, n \\ & c_{20} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega R_1^{(2,0,\ldots,0)}(t)\exp(i\lambda_1 t)\,dt \\ & c_{02} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega R_1^{(0,2,0,\ldots,0)}(t)\exp(-3i\lambda_1 t)\,dt \\ & c_{11} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega R_1^{(1,1,0,\ldots,0)}(t)\exp(-i\lambda_1 t)\,dt \end{aligned}$$

Рассмотрим вещественную систему, соответствующую системе (1.2), положив $u_s = x_s + iy_s$, $c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + ib_{\alpha\beta}$:

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} & x_1^{\cdot} = X_1^{(2)} + X_1^{(3)} + \ldots, \quad y_1^{\cdot} = Y_1^{(2)} + Y_1^{(3)} + \ldots \\ & x_s^{\cdot} = X_s^{(3)} + \ldots, \quad y_s^{\cdot} = Y_s^{(3)} + \ldots, \quad s = 2, 3, \ldots, n \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} & X_1^{(2)} = (a_{20} + a_{02})(x_1^2 - y_1^2) + a_{11}(x_1^2 + y_1^2) + 2(b_{02} - \\ & - b_{20})x_1y_1 \\ & Y_1^{(2)} = (b_{20} + b_{02})(x_1^2 - y_1^2) + b_{11}(x_1^2 + y_1^2) + 2(a_{20} - \\ & - a_{02})x_1y_1 \end{aligned}$$

а $X_\alpha^{(3)}$ и $Y_\alpha^{(3)}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ — формы третьего порядка переменных x_α, y_α.

Выясним, в каких случаях задача устойчивости решается рассмотрением одних лишь членов второго порядка, а в каких этого недостаточно. Покажем, что в первом случае тривиальное решение системы (1.3) всегда неустойчиво, а во втором, как и в критических случаях первого приближения, должны выполняться дополнительные условия типа равенств. Для доказательства воспользуемся теоремой Г. В. Каменкова о неустойчивости в критическом случае N нулевых корней [9], согласно которой тривиальное решение системы (1.3) будет неустойчиво, если хотя бы на одном вещественном решении уравнения

$$F \equiv x_1Y_1^{(2)}(x_1, y_1) - y_1X_1^{(2)}(x_1, y_1) = 0$$

форма

$$R = x_1X_1^{(2)}(x_1, y_1) + y_1Y_1^{(2)}(x_1, y_1)$$

может принимать положительные значения. Если же формы F и R не имеют различных вещественных корней, то вопрос об устойчивости не решается рассмотрением одних лишь членов второго порядка.

Поскольку R — форма нечетного порядка, то будем иметь неустойчивость во всех случаях, когда уравнение

$$F(\varkappa) = y_1^3\,[\varkappa Y_1^{(2)}(\varkappa, 1) - X_1^{(2)}(\varkappa, 1)] = 0, \quad \varkappa = x_1/y_1$$

имеет хотя бы один вещественный относительно $\varkappa$ корень, для которого

$$R(\varkappa) = y_1^3\,[\varkappa X_1^{(2)}(\varkappa, 1) + Y_1^{(2)}(\varkappa, 1)] \neq 0$$

Задача об устойчивости не будет решаться рассмотрением одних лишь членов второго порядка, если: 1) $F(\varkappa)$ и $R(\varkappa)$ имеют только один общий вещественный корень $\varkappa_*$, а многочлен $F(\varkappa)/(\varkappa - \varkappa_*)$ не имеет вещественных корней; 2) $F(\varkappa)$ и $R(\varkappa)$ имеют три общих вещественных корня.

Рассмотрим первый случай, предполагая отсутствие дополнительных вырождений. Видно, что $F(\varkappa)$ и $R(\varkappa)$ будут иметь общие корни только в том случае, когда таковые имеют многочлены $X_1^{(2)}(\varkappa)$ и $Y_1^{(2)}(\varkappa)$. Достаточность этого условия очевидна.

Доказать необходимость можно от противного.

Действительно, рассматривая равенства $F(\varkappa) = 0$ и $R(\varkappa) = 0$ как систему уравнений относительно $X_1^{(2)}$ и $Y_1^{(2)}$, видим, что ее определитель $\Delta = \varkappa^2 + 1$ не обращается в нуль ни при каком вещественном $\varkappa$, а следовательно, указанная система имеет только тривиальное решение, что противоречит сделанному предположению.

Предполагая, что

(1.5) $$a = a_1 + a_2 + a_3 \neq 0, \quad b = b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$$

представим выражения (1.4) в виде

(1.6) $$X_1^{(2)} = a(\varkappa - \varkappa_*)(\varkappa - \varkappa_1), \quad Y_1^{(2)} = b(\varkappa - \varkappa_*)(\varkappa - \varkappa_2)$$

При $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ будем иметь

$$\varkappa_* = \frac{q_1 - q_2}{p_2 - p_1}, \quad \varkappa_1 = \frac{q_1}{\varkappa_*}; \quad p_1 = 2\frac{b_{02} - b_{20}}{a}, \quad p_2 = \frac{a_{20} - a_{02}}{b}$$
$$q_1 = (a_{11} - a_{02} - a_{20})/a, \quad q_2 = (b_{11} - b_{20} - b_{02})/b$$

Подставляя найденные корни в один из многочленов (1.6) и приравнивая результат нулю, найдем условие существования у F и R общего вещественного корня $\varkappa_*$

(1.7) $$(q_1 - q_2)^2 = (p_2 - p_1)(p_2 q_1 - q_2 p_1)$$

С учетом (1.5) выражение для F можно теперь записать так:

$$F = b(\varkappa - \varkappa_*) f(\varkappa), \; f(\varkappa) = \varkappa^2 - (\varkappa_2 - a/b)\varkappa + (a/b)\varkappa_1$$

При выполнении неравенства

(1.8) $$\left(1 + q_2 \frac{b}{a\varkappa^*}\right)^2 < 4q_1 \frac{b}{a\varkappa_*}$$

многочлен $f(\varkappa)$ не имеет вещественных корней, а следовательно, $\varkappa_*$ — единственный общий вещественный корень F и R.

Замечание. В вырожденном случае невыполнения условия (1.5) можно получить условия типа (1.7), (1.8), если положить $\varkappa = y_1/x_1$.

При выполнении условия (1.5) случай трех общих вещественных корней у F и R невозможен.

Предположим противное. Тогда многочлены $X_1^{(2)}$ и $Y_1^{(2)}$ также должны иметь общие корни, следовательно, $X_1^{(2)} = a\varphi(\varkappa)$, $Y_1^{(2)} = b\varphi(\varkappa)$. Тогда

$$F = y_1^3 \varphi(\varkappa)(b\varkappa - a), \quad R = y_1^3 \varphi(\varkappa)(a\varkappa + b)$$

откуда видно, что оставшиеся корни всегда различны.

Рассмотрим еще один вырожденный случай, в котором

(1.9) $$a_{11} = a_{02} = a_{20} = 0$$

Тогда

(1.10) $$F = y^3(b\varkappa^2 + b_{11} - 3b_{02} + b_{20})\varkappa$$
$$R = y^3[(b_{11} + 3b_{02} - b_{20})\varkappa^2 + b_{11} - b_{02} - b_{20}]$$

Из (1.10) видно, что если не выполняется равенство

(1.11) $$b_{11} = b_{02} + b_{20}$$

при $\varkappa = 0$ будем иметь $R > 0$. Если выполняется (1.11), но

(1.12) $$|b_{20}| < |b_{02}|$$

то F будет иметь ненулевой вещественный корень, для которого $R > 0$. Таким образом, и при выполнении (1.9) почти всегда имеем неустойчивость. Исключение составляет случай дополнительного вырождения, характеризуемый одновременным выполнением равенства (1.11) и неравенства, противоположного (1.12). Вопрос об устойчивости в этом случае должен решаться с привлечением членов уравнений более высокого порядка. На основании проведенного анализа приходим к теореме.

Теорема. При наличии в системе (1.1) внутреннего резонанса вида $\lambda_1\omega = N\pi i$, где N — любое четное число, тривиальное решение неустойчиво независимо от членов выше второго порядка малости, если только не выполняются условия типа равенств (1.7), (1.11) и им подобные. Вопрос об устойчивости в этих вырожденных случаях не решается рассмотрением одних членов второго порядка.

2. Применим полученные результаты для доказательства неустойчивости автоколебаний, описываемых квазилинейным уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + k^2x = \mu f(x, x^{\cdot}, \mu)$$

у которого функция $f(x, x^{\cdot}, \mu)$ удовлетворяет условиям теоремы Пуанкаре о существовании периодического, аналитического по малому параметру μ решения $\varphi(\mu, t)$ с периодом

$$\omega = 2\pi k^{-1}\chi, \quad \chi = [1 + O(\mu)]_\omega \tag{2.1}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости этого решения при нарушении условия Андронова — Витта [1]

$$\int\limits_0^\omega \frac{\partial f(\varphi, \varphi^{\cdot}, \mu)}{\partial \varphi^{\cdot}}\, dt = 0 \tag{2.2}$$

При этом ограничимся членами первой степени по μ.

Полагая $y = x - \varphi(t, \mu)$ и вводя вместо t новую независимую переменную $\tau = k\chi^{-1} t$, получим уравнение возмущенного движения (штрихом обозначено дифференцирование по τ)

$$y'' + \chi^2 y = \mu k^{-2}\chi^2 \Delta\Phi \tag{2.3}$$

Здесь

$$\Phi(x, x', \mu) = f(x, k\chi^{-1}x^{\cdot}, \mu) \tag{2.4}$$
$$\Delta\Phi = \Phi_x y + \Phi_{x'} y' + {}^1/{}_2\Phi_{xx} y^2 + \Phi_{xx'} yy' + {}^1/{}_2\Phi_{x'x'} (y')^2 + \ldots$$

(производные Φ_x, Φ_{xx} и т.д. вычислены при $\mu = 0$ и являются 2π-периодическими функциями τ).

Согласно теории периодических решений автономных систем [1], линейное уравнение, соответствующее (2.3), всегда имеет один мультипликатор $\rho = 1$. При условии (2.2) второй мультипликатор также обращается в единицу и задача устойчивости относится к категории критических случаев. Нетрудно заметить, что это — критический случай пары чисто мнимых характеристических показателей, рассмотренный в п. 1.

Действительно, пользуясь известной формулой

$$\lambda_{1,2} = T^{-1}(\ln|\rho| + i \arg\rho \pm 2n\pi i), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

где T — период невозмущенного движения, и учитывая, что для системы (2.3) $T = 2\pi$, а при $\mu \to 0$ характеристические показатели стремятся к $\pm i$, получим $\lambda_1 T/(\pi i) = 2$, что и определяет резонансный характер задачи.

Подвергнем уравнение (2.3) линейному преобразованию с 2π-периодическими коэффициентами

$$y = y_1 [1 + \mu p_{11}(\tau)] + \mu p_{12}(\tau) y_2$$
$$y' = \mu p_{21}(\tau) y_1 + [1 + \mu p_{22}(\tau)] y_2$$

Неизвестные 2π-периодические функции $p_{\alpha\beta}(\tau)$ можно подобрать так, чтобы в переменных y_1, y_2 линейная часть системы была автономной и имела диагональную форму [1]. Тогда в комплексно-сопряженных переменных $z = y_2 + iy_1$, $z_* = y_2 - iy_1$ получим систему уравнений (комплексно-сопряженное уравнение не выписано)

$$z = iz + \mu k^{-2}\chi^2\delta^2\Phi$$

где $\delta^2\Phi$ — совокупность членов второго порядка в разложении (2.4).

Выделим члены, содержащие только первую степень μ

$$\mu Z^{(2)} = {}^1/_8\mu\,[(\Phi_{x'x'} - \Phi_{xx} - 2i\Phi_{xx'})\,z^2 +$$
$$+ (\Phi_{x'x'} - \Phi_{xx} + 2i\Phi_{xx'})\,z_*{}^2 + 2\,(\Phi_{xx'} - \Phi_{xx})\,zz_*]$$

Проводя нормализацию согласно п. 1, получим следующую систему в новых коемплексно-сопряженных переменных ξ, η (уравнение для $\eta^\cdot$ опущено):

$$\xi^\cdot = \frac{\mu}{16k^2\pi}\,(c_{20}\xi^2 + c_{11}\xi\eta + c_{02}\eta^2) + \ldots$$

Невыписанные члены имеют более высокий порядок малости по μ, а $c_{\alpha\beta}$ — постоянные комплексные коэффициенты нормальной формы, определяемые согласно формулам (1.3)

$$c_{20} = \int\limits_0^{2\pi} (\Phi_{x'x'} - \Phi_{xx} - 2i\Phi_{xx'})\,e^{i\tau}\,d\tau \tag{2.5}$$

$$c_{02} = \int\limits_0^{2\pi} (\Phi_{x'x'} - \Phi_{xx} + 2i\Phi_{xx'})\,e^{3i\tau}\,d\tau,$$

$$c_{11} = \int\limits_0^{2\pi} (\Phi_{xx'} - \Phi_{xx})\,e^{-i\tau}\,d\tau$$

Если коэффициенты (2.5) не удовлетворяют условиям типа (1.7), (1.11), то автоколебания неустойчивы по крайней мере при достаточно малых значениях μ.

3. Исследуем устойчивость автоколебаний маятника Фроуда, движение которого описывается уравнением [10]

$$I\varphi^{\cdot\cdot} + h\varphi^\cdot + mgl\varphi = M\,(\Omega - \varphi^\cdot) \tag{3.1}$$

где I — момент инерции маятника относительно оси вращения, h — коэффициент вязкого трения, $M\,(\Omega - \varphi^\cdot)$ — момент сил сухого трения, нелинейно зависящий от относительной угловой скорости маятника $\Omega - \varphi^\cdot$. Раскладывая эту функцию в ряд в окрестности $\varphi^\cdot = 0$ и вводя новую переменную $q = \varphi - M\,(\Omega)/(Ik^2)$, где $k^2 = mgl/I$, и новое «время» $\tau = kt$, вместо (3.1) получим

$$q'' + q = \mu\,[\alpha q' + \beta\,(q')^3 + \gamma\,(q')^5 + \ldots] \equiv \mu\Phi\,(q') \tag{3.2}$$

$$\mu = \frac{h}{Ik} \ll 1, \quad \alpha = -\frac{1}{h}\cdot\frac{dM}{d\Omega} - 1, \quad \beta = \frac{k^2}{6h}\cdot\frac{d^3M}{d\Omega^3},$$
$$\gamma = -\frac{k^4}{120h}\cdot\frac{d^5M}{d\Omega^5}$$

Амплитуда автоколебаний находится из уравнения [11]

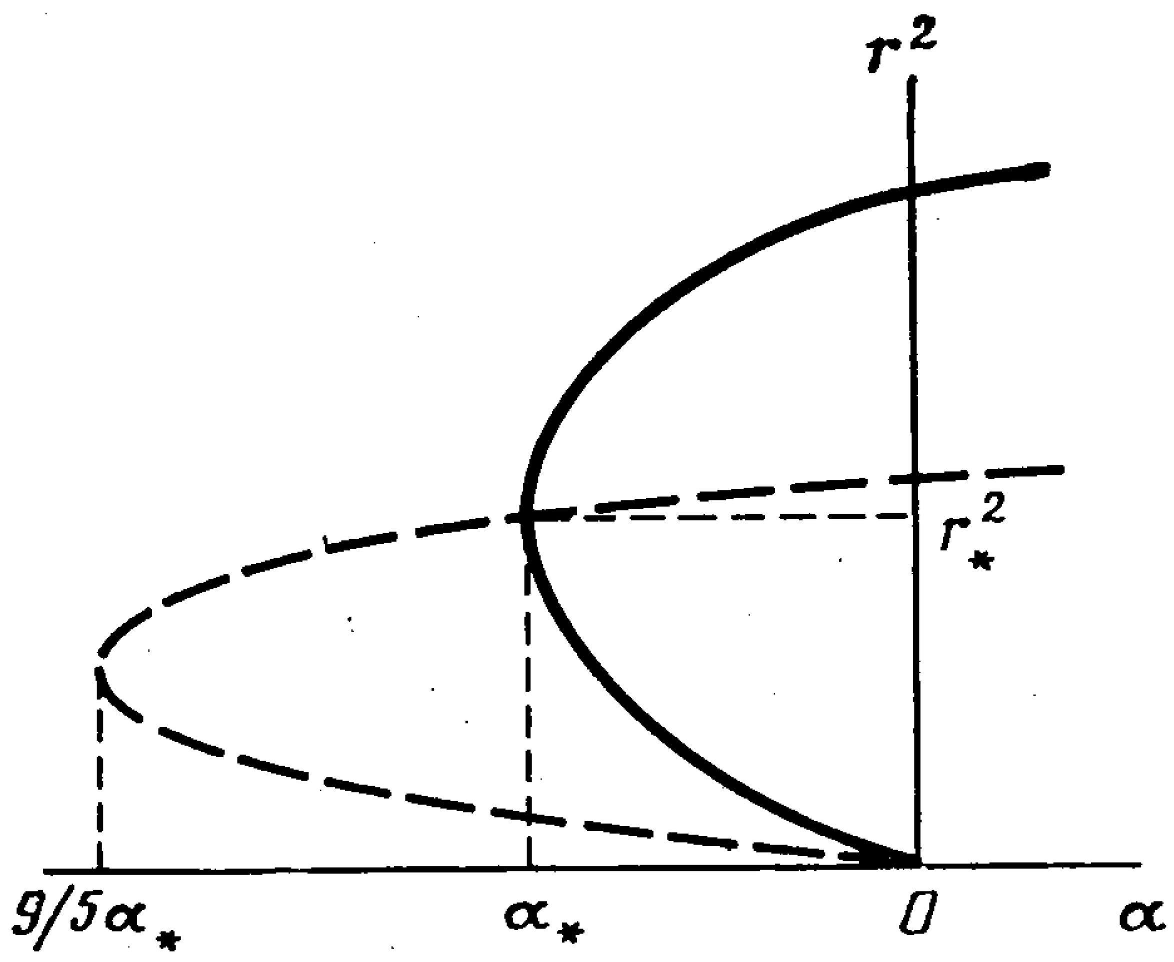
$$\Psi\,(r) = -\frac{1}{2}\,r\left(\alpha + \frac{3}{4}\,\beta r^2 + \frac{5}{8}\,\gamma r^4\right) = 0$$

Условие устойчивости, выводимое из анализа уравнений первого приближения, получается из рассмотрения знака производной [11]

$$\frac{d\Psi}{dr} = -\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{9}{4}\beta r^2 + \frac{25}{8}\gamma r^4\right)$$

а именно: при $d\Psi/(dr) > 0$ — устойчивость, при $d\Psi/(dr) < 0$ — неустойчивость, при $d\Psi/(dr) = 0$ реализуется рассмотренный выше критический случай.

Применим полученные результаты, полагая $\beta > 0$, $\gamma < 0$. Из рассмотрения кривых $\Psi(r) = 0$ и $d\Psi/(dr) = 0$, изображенных на фигуре сплошной и штриховой линией соответственно, видно, что при $\alpha < \alpha_* = 9\beta^2/(40\gamma)$ автоколебания невозможны, а при $\alpha > \alpha_*$ возможно два режима автоколебаний: неустойчивые с меньшей амплитудой и устойчивые с большей. Таким образом, значение α_* — бифуркационное и резонансное. Действительно, именно в точке бифуркации $\alpha = \alpha_*$, $r^2 = r_*^2 = -3\beta/(5\gamma)$ имеем $d\Psi/(dr) = 0$, а это и есть условие, при котором выполняется (2.2).



Вычисляя согласно (2.4) частные производные от функции $\Phi(q')$, представляющей правую часть уравнения (3.2), будем иметь

$$\Phi_{qq} = \Phi_{qq'} = 0, \quad \Phi_{q'q'} = q'(6\beta + 20\gamma q'^2)$$

где следует положить $q' = -r_* \sin\tau$.

Подставляя найденные значения производных в (2.5), получим

$$a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0, \quad b_{20} = -3r(2\beta + 5\gamma r^2)$$

$$b_{02} = 5\gamma r^3, \quad b_{11} = 6r(2\beta + 5\gamma r^2)$$

Несмотря на то что здесь реализуется вырожденный случай (1.9), равенство (1.11) не выполняется. Следовательно, на основании полученных выше результатов можно заключить о неустойчивости автоколебаний маятника Фроуда в бифуркационной точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях.— В кн.: Итоги науки и техники: Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979, т. 4, с. 58—139.
3. *Мерман Г. А.* О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса.— В кн.: Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 18—41.
4. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
5. *Иванов А. П., Сокольский А. Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 963—970.
6. *Куницын А. Л., Ташимов Л.* К задаче об устойчивости периодического движения при внутреннем резонансе.— В кн.: Аналитические методы механики в задачах динамики летательных аппаратов. М.: Изд-е Моск. авиац. ин-та, 1982, с. 13—21.
7. *Ташимов Л.* Об одном случае неустойчивости периодического движения в критическом случае пары чисто мнимых характеристических показателей.— Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1982, № 3, с. 75—78.
8. *Куницын А. Л.* Нормальная форма и устойчивость периодических систем при внутреннем резонансе.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 431—438.
9. *Каменков Г. В.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. 214 с.
10. *Бутенин Н. В.* Элементы теории нелинейных колебаний. Л.: Судпромгиз, 1962. 195 с.
11. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.II.1986