Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 531.36

О МЕРЕ БЛИЗОСТИ НЕЙТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ К ВНУТРЕННЕМУ РЕЗОНАНСУ

Гольцер Я. М.

Для некоторых классов параметрически возмущенных резонансных систем, нейтральных в линейном приближении, вводится количественная характеристика близости системы к резонансу: величина критического значения расстройки резонанса δ^*, при которой впервые, по мере удаления системы от резонанса, происходит смена устойчивости. Задача нахождения этого критического значения осложняется нелинейным характером смены устойчивости в нейтральных системах. Ниже она решается для резонансов третьего порядка в ситуации, гарантирующей переход неустойчивости в асимптотическую устойчивость по мере удаления системы от резонанса.

Знание величины δ^* позволяет в пространстве параметров оценить область сильной неустойчивости [1, 2], охарактеризовать опасность резонанса, выявить в системе конструктивный параметр — сдвиг резонансных фаз, варьирование которого позволяет увеличивать или уменьшать опасность резонанса.

1. Постановка задачи. Основные предположения. В l-мерном действительном пространстве R^l рассмотрим систему дифференциальных уравнений, непрерывно зависящую от параметра $\mu \in D$

$$z^{\cdot} = A(\mu) z + \sum_{j=k-1\geqslant 2}^{\infty} F^{(j)}(\mu, t, z) \tag{1.1}$$

где $D \subseteq R^d$ — некоторая замкнутая d-мерная область, содержащая начало координат, $F^{(j)}$ — l-мерные вектор-формы j-го порядка коэффициенты которых — почти-периодические функции t равномерно по $\mu \in D$.

Пусть матрица $A(\mu)$ имеет в D n пар различных чисто мнимых собственных значений $\pm i\nu_s(\mu), s = 1, \ldots, n$, а остальные собственные значения имеют в D отрицательные вещественные части.

Придерживаясь определений из [3], считаем, что (1.1) — F-система и при $\mu = 0$ в ней имеется резонанс k-го порядка ($m_s \geqslant 0$ — целые):

$$\lambda = \langle m, \nu(0)\rangle \in N_2'^k, \quad m = (m_1, \ldots, m_n), \quad k = |m| = m_1 + \ldots + m_n. \tag{1.2}$$

Понятие F-системы и множество $N_2'^k$ подробно описаны в [3]. Напомним, что непрерывная нормальная форма F-систем приводима к автономному виду, а $N_2'^k$ содержится в минимальном модуле, порожденном спектром коэффициентов нелинейности.

Ограничимся изучением чисто критической системы, когда $l = 2n$. Случай $l > 2n$ сводится к нему при помощи принципа сведения [4].

Кроме исходных параметров удобно ввести параметры $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ и расстройку резонанса δ, полагая

$$\varepsilon_s(\mu) = \nu_s(\mu) - \nu_s(0), \quad \delta(\mu) = \langle m, \varepsilon(\mu)\rangle$$

Уравнение $\delta = 0$ определяет в D некоторую k-резонансную поверхность Γ_k. В пространстве параметров ε k-резонансная поверхность отображается на k-резонансную плоскость Π_k: $\langle m, \varepsilon(\mu)\rangle = 0$. Величина $|\delta|$

характеризует расстояние до плоскости Π_k. В дальнейшем будем считать, что вектор μ имеет размерность $d \geqslant n$ и образ отображения $\varepsilon(\Gamma_k)$ есть некоторая окрестность нуля в подпространстве, определяемом плоскостью Π_k.

Условие R. В ε-пространстве отсутствуют q-резонансные плоскости с $q \leqslant k+1$, отличные от Π_k.

Дальнейшие предположения существенно используют непрерывную и обычную нормальную форму F-систем [3]. Выполним в D непрерывную нормализацию F-системы (1.1). Выписывая явно младшие члены внутреннего и тождественного резонансов, получим

$$u_s^{\boldsymbol{\cdot}} = i\nu_s u_s + \alpha_s e^{i\lambda t}\bar{u}^{m-\delta_s} + u_s \sum_{|p|=N} \alpha_p^{(s)}\omega^p + O(\|u\|^{2N+2}) \tag{1.3}$$

$N = [k/2]$, $s = 1, 2, \ldots, n$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ $\omega_s = |u_s|^2$, $\omega^p = \omega_1^{p_1} \ldots \omega_n^{p_n}$ (δ_s — орт в R^n). Замена $u_s = v_s \exp(i\nu_s(0)t)$ переводит (1.3) в систему, автономную до $(2N+2)$-го порядка

$$v_s^{\boldsymbol{\cdot}} = i\varepsilon_s v_s + \alpha_s\bar{v}^{m-\delta_s} + v_s \sum_{|p|=N} \alpha_p^{(s)}\omega^p + O(\|v\|^{2N+2}) \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь область D^*, которая получается удалением из D k-резонансной поверхности Γ_k. Обычная нормальная форма F-системы (1.1) в D^* не будет содержать членов внутреннего резонанса. Ее можно получить уничтожая в (1.4) эти члены. Нужное преобразование имеет вид

$$v_s = v_s^* + i\alpha_s\delta^{-1}v^{*m-\delta_s} \tag{1.5}$$

которое переводит (1.4) в систему

$$v_s^{\boldsymbol{\cdot}*} = i\varepsilon_s v_s^* + v_s^* \sum_{|p|=N} \alpha_p^{(s)*}\omega^{*p} + O(\|v^*\|^{2N+2}) \tag{1.6}$$

Из (1.5) видно, что некоторые коэффициенты при нелинейных членах в (1.6), зависящие от δ^{-1}, при приближении системы к резонансной поверхности ($\delta \to 0$) неограниченно увеличиваются. Можно установить, что такие коэффициенты имеются уже в $(2k-3)$-м порядке. При $k = 3$ они появляются уже в третьем порядке. Поэтому рассматриваемая задача имеет особенности при $k \geqslant 3$.

Ограничимся изучением случая $k = 3$. Системы (1.4) и (1.6) принимают вид

$$v_s^{\boldsymbol{\cdot}} = i\varepsilon_s v_s + \alpha_s\bar{v}^{m-\delta_s} + v_s \sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj}\omega_j + O(\|v\|^4) \tag{1.7}$$

$$v_s^{\boldsymbol{\cdot}*} = i\varepsilon_s v_s^* + v_s^* \sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj}^*\omega_j^* + O(\|v^*\|^4) \tag{1.8}$$

Существенную роль в анализе играет взаимосвязь между коэффициентами обеих нормальных форм, устанавливаемая при помощи (1.5). Опуская вычисления, приведем для каждого типа резонанса третьего порядка значения n, m, λ, δ и формулы связи.

Одночастотный резонанс

$$n = 1, \quad m = 3, \quad \lambda = 3\nu_1(0), \quad \delta = 3\varepsilon_1, \quad \alpha_{11}^* = \alpha_{11} - i\delta^{-1}\alpha_1\bar{\alpha}_1 \tag{1.9}$$

Двухчастотный резонанс

$$n = 2,\ m = (1, 2),\ \lambda = \nu_1(0) + 2\nu_2(0),\ \delta = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$$

$$(1.10)\qquad \alpha_{11}^* = \alpha_{11}, \quad \alpha_{12}^* = \alpha_{12} - 2i\delta^{-1}\alpha_1\bar{\alpha}_2$$
$$\alpha_{21}^* = \alpha_{21} - i\delta^{-1}\alpha_2\bar{\alpha}_2, \quad \alpha_{22}^* = \alpha_{22} - i\delta^{-1}\alpha_2\bar{\alpha}_1$$

Трехчастотный резонанс

$$n = 3, \quad m = (1, 1, 1), \quad \lambda = \nu_1(0) + \nu_2(0) + \nu_3(0)$$
$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \alpha_{ss}^* = \alpha_{ss}$$
$$(1.11)\qquad \alpha_{sj}^* = \alpha_{sj} - i\delta^{-1}\alpha_s\bar{\alpha}_r, \quad j, s, r = 1, 2, 3, \quad j \neq s \neq r$$

Рассмотрим F-систему (1.1). Если $\delta = 0$, то система строго резонансная. При увеличении $|\delta|$ система (1.1) сходит с резонансной поверхности. Для достаточно широкого класса систем по мере возрастания $|\delta|$ возможно появление такого момента, что при $\delta = \delta^*$ впервые происходит смена устойчивости. Назовем δ^* критическим значением расстройки резонанса. Введем дополнительные предположения, при которых будет решаться задача определения δ^*.

Условие N. F-система (1.1) неустойчива во втором приближении на резонансной поверхности Γ_3 ($\delta = 0$).

Условие U. F-система (1.1) асимптотически устойчива при $\delta = \infty$ (вдали от резонанса) и при $\forall\mu \in D$.

Оба эти условия гарантируют наличие нужной ситуации: перехода неустойчивости в асимптотическую устойчивость ($H \to AY$) при увеличении $|\delta|$ (переход $AY \to H$ здесь не рассматриваем). Результаты, полученные авторами [5], позволяют в каждом из случаев одно-, двух- и трехчастотного резонанса выписать условия N и U на языке коэффициентов нормальных форм.

Замечание. Условие U означает, что если в непрерывной нормальной форме зачеркнуть члены внутреннего резонанса, то оставшаяся система будет асимптотически устойчивой в D. Действительно, полагая $\delta^{-1} = 0$, из формул (1.9) — (1.11), связывающих оба типа нормализации, видно, что тогда $\alpha_{sj}^* = \alpha_{sj}$.

2. Одночастотный резонанс. Из рассмотрения уравнения (1.7) на Γ_3 следует, что при $\alpha_1 \neq 0$ система (1.1) неустойчива. Этот факт устанавливается так же, как в периодическом случае [6]. Условие N сводится к требованию $\alpha_1 \neq 0$, $\forall\mu \in \Gamma_3$.

Рассматривая далее уравнение (1.8), устанавливаем, что условие U сводится к требованию $\operatorname{Re}\alpha_{11} < 0$, $\forall\mu \in D$. Из (1.9) видно, что $\operatorname{Re}\alpha_{11}^* = \operatorname{Re}\alpha_{11}$. Это равенство показывает, что при выполнении условий $\alpha_1 \neq 0$, $\operatorname{Re}\alpha_{11} < 0$ критическое значение расстройки резонанса $\delta^* = 0$. Иначе говоря, влияние одночастотного резонанса слабое: оно не меняет свойства асимптотической устойчивости в любой близости от резонанса, делая систему неустойчивой лишь при строгом резонансе.

3. Двухчастотный резонанс (общий случай). Рассмотрим систему (1.7) и введем обозначения: $A = \operatorname{Im}\alpha_1\bar{\alpha}_2$, $a_{sj} = \operatorname{Re}\alpha_{sj}$, $a_{sj}^* = \operatorname{Re}\alpha_{sj}^*$, $\sigma = a_{11} + 2a_{21}$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Будем считать, что выполнены условия общего случая [2]:

$$a_{11} \neq 0, \quad \sigma \neq 0, \quad A \neq 0 \quad (\forall\mu \in \Gamma_3)$$

Конкретизация условий N и U. Рассмотрим систему (1.7) на Γ_3. В общем случае автоматически выполняется условие N: $A \neq 0$. Действительно, при $A \neq 0$ система (1.7) неустойчива $\forall\mu \in \Gamma_3$ (см. теорему 2.1 [2]).

Для формулировки условия U рассмотрим систему (1.8). Согласно теореме 2.2 [2], для ее асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, чтобы квадратичная форма

$$\gamma_1 a_{11}^* \omega_1^{*2} + (\gamma_1 a_{12}^* + \gamma_2 a_{21}^*)\, \omega_1^* \omega_2^* + \gamma_2 a_{22}^* \omega_2^{*2}$$

была определенно-отрицательная в конусе $\omega_{1,2}^* \geqslant 0$. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно выполнения одной из двух групп условий:

α^*: 1) $a_{11} < 0$; 2) $a_{22} - A\delta^{-1} < 0$; 3) $a_{12} + 2A\delta^{-1} < 0$ или $a_{21} < 0$;

β^*: 1) $a_{11} < 0$; 2) $a_{22} - A\delta^{-1} < 0$; 3) нарушается третье условие α^*, но $\Delta > \sigma A\delta^{-1}$.

Если пренебречь отношением $A\delta^{-1}$, то получим условие U, которое требует выполнения одной из следующих групп условий:

α: 1) $a_{11} < 0$; 2) $a_{22} < 0$; 3) $a_{12} < 0$ или $a_{21} < 0$;

β: 1) $a_{11} < 0$; 2) $a_{22} < 0$; 3) $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$, $\Delta > 0$

Формулировка результата. Для нахождения δ^* рассматриваются четыре логически возможных случая, связанных с выполнением одного из условий α или β, при фиксированном знаке величины $A\delta$. Найденные значения $\delta^* \neq 0$, охватывающие все случаи перехода $H \to AY$ при возрастании $|\delta|$, представлены в табл. 1.

Во всех остальных случаях выполнения условий α или β, не включенных в табл. 1, $\delta^* = 0$. В этих случаях всегда $A\delta > 0$. Система (1.1) ведет себя следующим образом: асимптотическая устойчивость при $A\delta > 0$ сменяется неустойчивостью при $\delta = 0$, которая сохраняется при $A\delta < 0$ до тех пор, пока $|\delta| < |\delta^*|$, где δ^* (при $A\delta < 0$) можно определить по соответствующей строке табл. 1.

Таблица 1

α	1°	$A\delta < 0$	$\lvert\delta^*\rvert = \lvert A a_{22}^{-1}\rvert$
	2°	$A\delta > 0$, $a_{21} > 0$, $\sigma > 0$	$\lvert\delta^*\rvert = \min\{2\lvert A\rvert a_{21}^{-1}, \sigma A\delta^{-1}\}$
β	3°	а) $A\delta < 0$, $\sigma > 0$	$\lvert\delta^*\rvert = \lvert A a_{22}^{-1}\rvert$
	4°	б) $A\delta < 0$, $\sigma < 0$, $2\lvert a_{22}\rvert \geqslant a_{12}$	
		в) $A\delta < 0$, $\sigma < 0$, $2\lvert a_{22}\rvert < a_{12}$	$\lvert\delta^*\rvert = \lvert\delta A\Delta^{-1}\rvert$
		г) $A\delta > 0$, $\sigma > 0$	

Нахождение δ^*. Если условия α (β) выполняются, то при достаточно большом $|\delta|$ выполняются условия α^* (β^*) и система (1.1) асимптотически устойчива вдали от резонанса при конечных значениях δ. По мере уменьшения $|\delta|$ неустойчивость возникает при тех значениях δ, когда нарушается хотя бы одно из неравенств в условиях α^* или β^*. Как видно из (1.10), при изменении δ могут нарушиться только вторые и третьи неравенства в условиях α^* и β^*. Нахождение δ^* требует определения наименьших значений $|\delta|$, при которых нарушается впервые хотя бы одно из этих неравенств.

Анализ удобно вести в следующих четырех случаях: 1°. α и $A\delta < 0$; 2°. α и $A\delta > 0$; 3°. β и $A\delta < 0$; 4°. β и $A\delta > 0$.

Приведем его только для случая 3° (анализ в остальных случаях аналогичен).

Итак, пусть выполняется условие β и $A\delta < 0$. Неустойчивость при уменьшении $|\delta|$ может возникнуть только за счет нарушения второго и третьего условия β^*. Второе условие β^* нарушается при $|\delta| < |\delta_1| \equiv |A a_{22}^{-1}|$. Проанализируем третье условие β^*. Нарушение неравенства $a_{12} + 2A\delta^{-1} > 0$ ранее второго неравенства β^* переводит условия β^* в условия α^* и при таких $|\delta| > |\delta_1|$ система остается асимптотически устойчивой. Неустойчивость при выполнении второго условия β^* может наступить лишь при тех δ, для которых одновременно верны неравенства

(3.1) $\qquad a_{12} + 2A\delta^{-1} > 0, \quad \Delta < \sigma A\delta^{-1}$

Учитывая, что $a_{12} > 0$, $A\delta < 0$, $\Delta > 0$, убеждаемся, что система (3.1) совместна только при

(3.2) $\qquad \sigma < 0, \quad a_{12} > 2 \mid a_{22} \mid$

и систему неравенств (3.1) можно переписать в виде

(3.3) $\qquad \mid \delta_2 \mid \equiv 2 \mid A \mid a_{12}^{-1} < \mid \delta \mid < \mid \sigma A \mid \Delta^{-1} \equiv \delta_3$

Сравнение $\mid \delta_1' \mid$ с $\mid \delta_2 \mid$ и $\mid \delta_3 \mid$ показывает, что в условиях (3.2) верно неравенство $\mid \delta_2 \mid < \mid \delta_1 \mid < \mid \delta_3 \mid$. Отсюда следует, что при выполнении условий (3.2) имеем $\mid \delta^* \mid = \mid \delta_3 \mid$, а при нарушении этих условий $\mid \delta^* \mid = \mid \delta_1 \mid$ (случаи а), б), в), табл. 1).

4. Трехчастотный резонанс (общий случай). Рассмотрим систему (1.7) при $n = 3$. Вновь обозначим $a_{sj} = \operatorname{Re} \alpha_{sj}$ и, кроме того, положим $c_{sj} = \operatorname{Im} \alpha_s\bar{\alpha}_k$, $s \neq j \neq k$. Заметим, что $c_{sj} = -c_{kj}$. Для краткости будем использовать обозначения $c_{13} = \alpha$, $c_{21} = \beta$, $c_{12} = \gamma$.

Из равенств (1.11) для $a_{sj}^* = \operatorname{Re} \alpha_{sj}^*$ получим

(4.1) $\qquad a_{ss}^* = a_{ss}, \quad a_{sj}^* = a_{sj} + c_{sj}\delta^{-1}, \; s, j = 1, 2, 3, \quad s \neq j$

Для изучения системы (1.1) в D^* используем теорему А. М. Молчанова [7] в применении к системе (1.8). Для этого модельную систему, соответствующую (1.8), запишем в переменных ω_s^*:

(4.2) $$\frac{1}{2}\dot{\omega}_s^* = \omega_s^* \sum_{j=1}^{3} a_{sj}^*\omega_j^*$$

Система «вдали от резонанса» следующая:

(4.3) $$\frac{1}{2}\dot{\omega}_s^* = \omega_s^* \sum_{j=1}^{3} a_{sj}\omega_j^*$$

Введем для (4.2) матрицу $A^* = (a_{sj}^*)$, j-е главные миноры A_j^* ($j = 1, 2, 3$) и их определители Δ^*, Δ_j^*. Аналогичный смысл имеют обозначения A, A_j, Δ, Δ_j для системы (4.3). При помощи (4.1) определители Δ^*, Δ_j^* можно записать в виде

(4.4) $$\Delta^* = \Delta + L\delta^{-1} + \Delta_0\delta^{-2}$$
$$\Delta_j^* = \Delta_j - (a_{sr}c_{rs} + a_{rs}c_{sr})\,\delta^{-1} - c_{sr}c_{rs}\delta^{-2}, \quad j \neq s \neq r$$
$$L = \sum_{s,\, j=1,\, s\neq j}^{3} c_{sj}A_{sj}, \; \Delta_0 = -\alpha\gamma \sum_{j=1}^{3} a_{j1} + \alpha\beta \sum_{j=1}^{3} a_{j2} - \beta\gamma \sum_{j=1}^{3} a_{j3}$$

где A_{sj} — алгебраическое дополнение элемента a_{sj} матрицы A.

Следующие условия выделяют основной случай [2], который и будем изучать:

(4.5) $\qquad a_{jj} \neq 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \neq 0, \quad \Delta, \Delta_0, \Delta_j \neq 0, \quad j = 1, 2, 3 \; (\forall\mu \in D)$

Конкретизация условий N и U. Рассмотрим систему (1.7) при $\mu \in \Gamma_3$. Применяя теорему 3.1 из [2], выполнение условия N обеспечим требованием, чтобы нарушалось равенство

(4.6) $\qquad \operatorname{sign} \alpha = \operatorname{sign} \beta = \operatorname{sign} \gamma$

Приведем теперь условия U. В соответствии с теоремой А. М. Молчанова эти условия сводятся к обеспечению отсутствия у системы (4.3) нейтральных и неустойчивых лучей в конусе $K = \{\omega_j^* \geqslant 0\}$. Отсутствие нейтральных лучей гарантируется условиями (4.5). Отсутствие неустойчивых лучей будет обеспечиваться семью группами условий: B_j, C_j, E ($j = 1, 2, 3$). Каждая группа — это условие отсутствия неустойчивых лучей на всех одномерных, двумерных гранях конуса K и внутри конуса K. Алгебраически это означает, что совокупность семи систем

$$(4.7j) \qquad a_{jj}q_j = 1, \quad j = 1, 2, 3$$

$$(4.8j) \qquad A_j q^{(j)} = l^{(j)}, \quad l^{(j)} = (1, 1), \quad q^{(j)} = (q_s, q_r), \quad s < r, \quad s, r \neq j$$

$$(4.9) \qquad Aq = l, \quad l = (1, 1, 1), \quad q = (q_1, q_2, q_3)$$

не имеет строго положительного решения. Тем самым условия асимптотической устойчивости (условия U) следующие:

$$B_j\colon\ a_{jj} < 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$C_j\colon\ (\exists\ s \neq j)\ (\Delta_j^{(s)}\Delta_j < 0), \quad s, j = 1, 2, 3$$

$$E\colon\ (\exists\ s)\ (\Delta^{(s)}\Delta < 0), \quad s = 1, 2, 3$$

где $\Delta_j^{(s)}$, $\Delta^{(s)}$ получаются из Δ_j, Δ заменой s-го столбца на $l^{(j)}$, l.

Аналогично формулируются условия асимптотической устойчивости для системы (4.2). Они получаются при замене в условиях C_j и E всех определителей на Δ^*, Δ_j^*, $\Delta^{*(s)}$, $\Delta_j^{*(s)}$. Получающиеся условия для (4.2) будем обозначать B_j, C_j^*, E^* (условия B_j не меняются). Соответствующие системы алгебраических уравнений будем обозначать (4.8_j^*), (4.9*). Выражения для $\Delta_j^{*(s)}$, $\Delta^{*(s)}$ следующие:

$$(4.10) \qquad \Delta^{*(s)} = \Delta^{(s)} + L_s\delta^{-1} - 3c_{sr}c_{sj}\delta^{-2}, \qquad \Delta_j^{*(s)} = \Delta_j^{(s)} - c_{sr}\delta^{-1}$$

$$L = c_{sr}(2a_{rj} - a_{sj} - a_{jj}) + c_{sj}(2a_{jr} - a_{sr} - a_{rr}), \quad s \neq j \neq r$$

Нахождение δ^*. Введем множества $H_0^\pm = \{\delta \gtrless 0 \mid \Delta^{*(s)}\Delta^* > 0,\ s = 1, 2, 3\}$, $H_q^\pm = \{\delta \gtrless 0 \mid \Delta_q^{*(s)}\ \Delta_q^* > 0, s \neq q\}$, $q = 1, 2, 3$ и их точные границы $m_i^\pm = \inf H_i^\pm$, $M_i^\pm = \sup H_i^\pm$, $i = 0, 1, 2, 3$. При $\delta \in \bigcup_{i=0}^{3} H_i^\pm$ система неустойчива. Из условий U вытекает, что все непустые множества H_i^+ ограничены сверху ($M_i^+ < +\infty$), а H_i^- — снизу ($m_i^- > -\infty$). Всюду ниже $s, q, j, r = 1, 2, 3$, $q \neq j \neq r$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Утверждение 1. Если H_0^+ (H_0^-) $\neq \varnothing$, то при любой комбинации знаков α, β, γ, отличной от (4.6), $m_0^+ > 0$ ($M_0^- < 0$).

Действительно, пусть для определенности $\delta > 0$ и $H_0^+ \neq \varnothing$. Убедимся, что $m_0^+ > 0$. Считая $\delta > 0$ достаточно малым, из (4.4) получим $\operatorname{sign} \Delta^{*(s)} = -\operatorname{sign} c_{sr}c_{sj}$. Прямой проверкой убеждаемся, что при нарушении условий (4.6) среди $\Delta^{*(s)}$ имеются числа разных знаков. Следовательно, при достаточно малых δ верно условие E^*. Но тогда $\inf H_0^+ > 0$. Утверждение в случае $\delta > 0$ доказано. Аналогично рассматривается случай $\delta < 0$.

Прямой проверкой можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 2. Вблизи резонанса при любой комбинации знаков α, β, γ, отличной от (4.6), и любом знаке δ существует единственная система (4.8_j^*), для которой нарушается условие C_j^*.

Табл. 2 позволяет по известным знакам чисел α, β, γ, δ определить эту систему (найти значение j).

Здесь верхний индекс (плюс или минус) соответствует знаку δ.

Пример. В системе (1.1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ (1^+). Положительное решение имеет только система (4.8_3^*). Нарушается условие C_3^*.

№	$1^\pm$	$2^\pm$	$3^\pm$	$4^\pm$	$5^\pm$	$6^\pm$
α	+	—	—	+	+	—
β	+	—	+	—	—	+
γ	+	—	—	—	+	+
j $\delta > 0$	3	1	1	2	2	3
j $\delta < 0$	1	3	2	3	1	2

Для нахождения δ^* определим при фиксированных α, β, γ, δ число j из табл. 2. Обозначим $I^\pm = \{\delta \gtrless 0\}$ и введем множества $N_j^\pm = H_0^\pm \cup \cup H_q^\pm \cup H_r^\pm$, $A^\pm = I^\pm \setminus (N_j^\pm \cup H_j^\pm)$. Множества A^+, A^-, как следует из утверждений 1, 2, строго отделены от нуля, и по построению ясно, что $\delta^* = \inf A^+$ при $\delta > 0$ и $\delta^* = \sup A^-$ при $\delta < 0$.

Из (4.4) и (4.10) видно, что все непустые множества $H_i^\pm$ и $A^\pm$ — либо интервалы, либо объединение их конечного числа. Конкретизируем значения δ^* (ограничиваясь случаем $\delta > 0$). Если $M_j^+ < \min\{m_0^+, m_q^+, m_r^+\}$ или $M_j^+ \geqslant \max\{M_0^+, M_q^+, M_r^+\}$, то $\delta^* = M_j^+$. Если оба неравенства нарушаются и N_j^+ — интервал, то $\delta^* = \max\{M_i^+\}$. Если же N_j^+ — объединение нескольких непересекающихся интервалов, то имеет место несколько (не менее трех) переходов типа $H \to AY$, $AY \to H$ при возрастании $|\delta|$. Последняя смена устойчивости необходимо имеет вид $H \to \to AY$, что гарантируется условиями U.

Определение чисел $M_i^\pm$, $m_i^\pm$ сводится к решению линейных и квадратичных неравенств относительно δ и в общем виде делать это нецелесообразно.

В качестве примера приведем лишь значения M_j^+ в случае 1^+. В этом случае $j = 3$ и необходимо, учитывая (4.4) и (4.10), решить систему неравенств

$$\Delta_3^{-1}(\Delta_3^{(1)}\delta - \gamma)\, P^{-1}(\delta) \geqslant 0, \quad \Delta_3^{-1}(\Delta_3^{(2)}\delta - \beta)\, P^{-1}(\delta) \geqslant 0 \tag{4.11}$$

$$(P(\delta) = \delta^2 - (a_{12}\beta + a_{21}\gamma)\,\Delta_3^{-1}\delta - \beta\gamma\Delta_3^{-1})$$

Решение системы (4.11) следует вести в шести подслучаях, соответствующих допускаемым условиями C_3 знакам Δ_3, $\Delta_3^{(1)}$, $\Delta_3^{(2)}$. Перечень этих случаев и соответствующие значения M_3^+ даны в табл. 3.

Таблица 3

№	1_1^+	1_2^+	1_3^+	1_4^+	1_5^+	1_6^+
Δ_3	—	—	—	+	+	+
$\Delta_3^{(1)}$	+	—	+	+	—	—
$\Delta_3^{(2)}$	+	+	—	—	+	—
M_3^+ $Q \leqslant 0$	$\delta_{2,3}$	δ_3	δ_2	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	δ_1
M_3^+ $Q > 0$	$\delta_{1,2,3}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,2}$			

Здесь

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta_3^{(1)} = a_{22} - a_{12}$$
$$\Delta_3^{(2)} = a_{11} - a_{21}, \quad \delta_1 = {}^1/_2\,(a_{12}\beta + a_{21}\gamma + \sqrt{Q})\,\Delta_3^{-1}$$
$$\delta_2 = \gamma\,(a_{22} - a_{12})^{-1}, \quad \delta_3 = \beta\,(a_{11} - a_{12})^{-1}, \quad \delta_{j,s} = \min\{\delta_j, \delta_s\}$$
$$Q = (a_{12}\beta + a_{21}\gamma)^2 + 4\beta\gamma\Delta_3$$

В случаях 1_4^+ — 1_6^+ всегда $Q > 0$.

5. Поведение критического значения расстройки резонанса. «Опасность» резонанса. Величину δ^* можно рассматривать как количественную характеристику опасности резонанса. Чем больше $|\delta^*|$, тем сильнее влияние резонанса на нерезонансные системы, тем позже резонансная неустойчивость сменяется асимптотической устойчивостью. Безопасный резонанс соответствует случаям, когда $\delta^* = 0$. Из п. 2 видно, что одночастотный резонанс — безопасный.

Запишем резонансные коэффициенты α_s в виде

$$\alpha_s = a_s + ib_s, \quad \sin\varphi_s = -a_s \mid \alpha_s \mid^{-1}, \quad \cos\varphi_s = b_s \mid \alpha_s \mid^{-1} \tag{5.1}$$

Формулы (5.1) вводят вспомогательные углы φ_s — резонансные фазы. Эти углы определяют разности $\varphi_s - \varphi_j$ — сдвиг резонансных фаз и являются теми конструктивными параметрами, регулируя которые можно получать любое значение для δ^*, увеличивая или уменьшая опасность резонанса.

Двухчастотный резонанс. Из табл. 1 видно, что значение δ^* прямо пропорционально числу $| A |$, которое, согласно (5.1), имеет вид

$$| A | = | \operatorname{Im} \alpha_1\bar{\alpha}_2 | = | \alpha_1\alpha_2 | \sin\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{5.2}$$

Из (5.2) видно, что при $\Delta\varphi \to 0, \pi$ имеем $\delta^* \to 0$ и резонанс становится безопасным. Наиболее опасный резонанс соответствует значению $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ при $A \gtrless 0$.

Трехчастотный резонанс. Вводя резонансные фазы φ_s, получим

$$\alpha = | \alpha_1\alpha_2 | \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \beta = | \alpha_2\alpha_3 | \sin(\varphi_2 - \varphi_3), \quad \gamma = | \alpha_1\alpha_3 | \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \tag{5.3}$$

Отождествим углы φ_s с точками единичной окружности. Условие N означает [1], что $\Delta\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ — тупоугольный или вырожденный (в точку или хорду, не совпадающую с диаметром).

При изменении φ_s так, что $\Delta\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ вырождается в точку или диаметр, сдвиги резонансных фаз стремятся к 0 или π, и тогда из (5.3) видно, что $\alpha, \beta, \gamma \to 0$.

При помощи (4.4) и (4.10) можно установить, что если $\alpha, \beta, \gamma \to 0$, то $\delta^* \to 0$. Поэтому условие вырожденности $\Delta\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ есть условие безопасности резонанса.

Замечание. Как видно из табл. 3, в некоторых случаях $\delta^* \to 0$, если только один или два параметра из тройки α, β, γ стремятся к нулю. В этом случае условие безопасности резонанса может включать случаи вырождения треугольника в хорду и прямоугольный треугольник.

Изложенное доказывает, что в обоих рассмотренных случаях $| \alpha_s |$ и сдвиги резонансных фаз являются конструктивными параметрами, позволяющими добиться, чтобы δ^* было наперед заданным числом. Выбором только сдвига резонансных фаз можно добиться, чтобы резонанс был безопасным.

6. Пример. Рассмотрим систему уравнений ($n = 2$)

$$z_s^{\cdot\cdot} + \nu_s^2(\mu) z_s = Z_s^{(2)}(\mu, z, z^{\cdot}) + Z_s^{(3)}(\mu, z, z^{\cdot}) + \ldots \tag{6.1}$$

Следуя [2], запишем формы $Z_s^{(2)}$, $Z_s^{(3)}$ в виде

$$Z_s^{(2)} = \sum_{j,h=1}^{2} a_{jh}^{(s)} z_j z_h + b_{jh}^{(s)} z_j z_h^{\cdot} + c_{jh}^{(s)} z_j^{\cdot} z_h^{\cdot}, \quad Z_s^{(3)} = \sum_{j,h,k=1}^{2} a_{jhk}^{(s)} z_j z_h z_k + b_{jhk}^{(s)} z_j z_h z_k^{\cdot} + c_{jhk}^{(s)} z_j z_h^{\cdot} z_k^{\cdot} + d_{jhk}^{(s)} z_j^{\cdot} z_h^{\cdot} z_k^{\cdot}$$

После замены $x_s = z_s - i\nu_s^{-1} z_s^{\cdot}$ получим вместо (6.1) систему

$$x_s^{\cdot} = i\nu_s(\mu) x_s + X_s^{(2)}(x, \bar{x}, \mu) + X_s^{(3)}(x, \bar{x}, \mu) + \ldots$$

Действительные части коэффициентов форм $X_s^{(2)}$ ($X_s^{(3)}$) образуются из коэффициентов первой группы членов: $z_j z_h^{\cdot}$ ($z_j z_h z_k^{\cdot}$, $z_j^{\cdot} z_h^{\cdot} z_k^{\cdot}$), а мнимые части — из коэффициентов второй группы членов: $z_j z_h$, $z_j^{\cdot} z_h^{\cdot}$ ($z_j z_h z_k$, $z_j z_h^{\cdot} z_k^{\cdot}$).

Пусть в системе (6.1) имеется резонанс $\nu_1(0) + 2\nu_2(0)$. Для выполнения условия N необходимо, чтобы во втором порядке в обоих уравнениях (6.1) имелись члены обеих групп. В частности, достаточно, чтобы $a_{22}^{(1)}$, $b_{22}^{(1)}$, $b_{21}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)} \neq 0$. Ниже приводится результат вычисления коэффициентов непрерывной нормальной формы в предположении, что во втором порядке все коэффициенты, кроме указанных, равны нулю:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4\nu_1}(b_{22}^{(1)}\nu_2 + ia_{22}^{(1)}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{4\nu_2}(-b_{21}^{(2)}\nu_1 + ic_{12}^{(2)}\nu_1\nu_2) \tag{6.2}$$

$$a_{11} = \frac{1}{8}(b_{111}^{(1)} + 3d_{111}^{(1)}\nu_1^2), \quad a_{12} = \frac{1}{4}(-b_{221}^{(1)} + d_{122}^{(1)}\nu_2^2) +$$

$$+ \frac{m}{8\nu_2(\nu_1-\nu_2)}, \quad a_{21} = \frac{1}{4}(b_{112}^{(2)} + d_{112}^{(2)}\nu_1^2)$$

$$a_{22} = \frac{1}{8}(b_{222}^{(2)} + 3d_{222}^{(2)}\nu_2^2) + \frac{m}{16\nu_2(\nu_1-2\nu_2)}, \quad m = a_{22}^{(1)}b_{21}^{(2)} - \nu_2^2 b_{22}^{(1)}c_{12}^{(2)}$$

Из выражений для a_{sj} видно, что для системы (6.1) могут выполняться условия α или β. Так, например, если

$$b_{111}^{(1)}, b_{222}^{(2)}, b_{112}^{(2)} < 0, \quad d_{111}^{(1)} = d_{112}^{(2)} = d_{222}^{(2)} = 0$$

то при всех значениях $\mu \in D$ выполняется условие α (при $\nu_1 > 0$, $\nu_2 < 0$).

В указанных условиях будем иметь при $A\delta < 0$ (первая строка табл. 1):

$$|\delta^*| = |Aa_{22}^{-1}|, \quad A = \nu_1(a_{22}^{(1)}b_{21}^{(2)} + b_{22}^{(1)}c_{12}^{(2)}\nu_2)$$

Для сдвига резонансных фаз при помощи (6.2) получим

$$\Delta\varphi = \arcsin(b_{22}^{(1)}c_{12}^{(2)}\nu_2^2 + a_{22}^{(1)}b_{21}^{(2)})\,|\alpha_1\alpha_2|^{-1}$$

При $A \gtrless 0$ равенство $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ дает условия, при которых резонанс наиболее опасен.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольцер Я. М.* О сильной устойчивости резонансных систем при параметрических возмущениях.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 251—261.
2. *Гольцер Я. М.* Бифуркации и устойчивость нейтральных систем в окрестности резонанса третьего порядка.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 429—440.
3. *Гольцер Я. М.* Непрерывная нормальная форма одного класса неавтономных параметрически возмущенных систем и ее применение.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 27—36.
4. *Веретенников В. Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1984. 320 с.
5. *Куницын А. Л., Маркеев А. П.* Устойчивость в резонансных случаях.— В кн. Итоги науки и техники: Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979, т. 4, с. 58—139.
6. *Куницын А. Л.* Нормальная форма и устойчивость периодических систем при внутреннем резонансе.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 431—438.
7. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения. — Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1961, т. 141, № 1, с. 24—27.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
11.II.1986