и указанному уравнению можно удовлетворить положив $q_{00} = de_0$, где $d = (\nu_0/\varkappa)^{1/(m-1)}$. При этом x_2 содержит члены с $e^{-\tau}$ степеней, не меньших ζ_1.

Оценим собственные значения оператора $v''_{m+1}(q_{00})$. По теореме Эйлера об однородных функциях

$$v''_{m+1}(q_{00})\,e_0 = d^{m-1}v''_{m+1}(e_0)\,e_0 = (\nu_0 m/\varkappa)\,v'_{m+1}(e_0) = \nu_0 m e_0$$

Поскольку e_0 — точка максимума v_{m+1} на единичной сфере, собственные числа оператора $v''_{m+1}(q_{00})$, действующего на инвариантном подпространстве $e_0^{\perp}$, будут неположительны ($e_0^{\perp}$ — подпространство, перпендикулярное к e_0).

Пусть найдены коэффициенты $a_0, \ldots, a_{k-2}$, $b_0, \ldots, b_{k-2}$, $c_0, \ldots$ $\ldots, c_{k-2}$ и $x_k = F(q_k, \tau)$ содержит члены с $e^{-\tau}$ степеней, не меньших ζ_{k-1}. Найдем a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, подставив в (3.1) q_{k+1} и собрав члены при $e^{-\zeta_{k-1}\tau}$. Выражения $\Gamma(q_{k+1}, \dot q_{k+1})$, и $e^{\tau}\Omega(q_{k+1})\,\dot q_{k+1}$ $(k-1)$-х коэффициентов не дадут; эти коэффициенты удовлетворяют уравнению

$$c_{k-1} - b_{k-1} - v''_{m+1}(q_{00})\,a_{k-1} = \Psi_{k-1} \tag{3.3}$$

где Ψ_{k-1} — некоторый «полином» от $a_0, \ldots, a_{k-2}$, $b_0, \ldots, b_{k-2}$, $c_0, \ldots$ $\ldots, c_{k-2}$.

Пусть $1 < k < m$, тогда $a_{k-1} = q_{(k-1)0}$, $b_{k-1} = -\zeta_{k-1}q_{(k-1)0}$, $c_{k-1} = \zeta^2_{k-1}q_{(k-1)0}$. Уравнение (3.3) примет вид

$$\begin{gathered}\nu_{k-1}q_{(k-1)0} - v''_{m+1}(q_{00})\,q_{(k-1)0} = \Psi_{k-1}\\ \nu_k = \frac{(k+2)(m+k+1)}{(m-1)^2}, \quad \nu_0 m = \nu_{m-1}\end{gathered} \tag{3.4}$$

Величина Ψ_{k-1}, очевидно, от τ не зависит. При $1 < k < m$ матрица $(\nu_{k-1}E - v''_{m+1}(q_{00}))$ невырождена, поэтому $q_{10}, \ldots, q_{(m-2)0}$ находятся однозначно.

Пусть $k > m$. Можно показать, что максимальная степень τ, содержащаяся в Ψ_{k-1}, равна $[(k-1)/(m-1)]$. Представим Ψ_{k-1} в виде

$$\Psi_{k-1} = \sum_{(m-1)j\leqslant k-1} \Psi^{(j)}_{k-1}\tau^j$$

и, приравняв в (3.3) члены с одинаковыми степенями τ, получим

$$\begin{gathered}\nu_{k-1}q_{(k-1)j} - v''_{m+1}(q_{00})\,q_{(k-1)j} - \eta_{k-1}q_{(k-1)(j+1)} +\\ +(j+1)(j+2)\,q_{(k-1)(j+2)} = \Psi^{(j)}_{k-1}\\ \eta_k = \frac{(2k+m+3)(j+1)}{m-1}, \quad j \leqslant l, \quad l = [(k-1)/(m-1)]\\ q_{(k-1)(l+1)} = q_{(k-1)(l+2)} = 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

$\Psi^{(j)}_{(k-1)}$ зависят только от коэффициентов q_{rs} $(m-1)s \leqslant r < k-1$. Поскольку при $k > m$ матрица $(\nu_{k-1}E - v''_{m+1}(q_{00}))$ невырождена, то, применяя убывающую по j индукцию, можно однозначно найти коэффициенты $q_{(k-1)j}$.

Рассмотрим, наконец, случай $k = m$. Величина Ψ_{m-1} степеней τ не содержит, поэтому можно записать

$$\Psi_{m-1} = \Psi^{(0)}_{m-1} = \alpha e_0 + f, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad f \in e_0^{\perp}$$

Для определения $q_{(m-1)0}$, $q_{(m-1)1}$ имеем тогда систему равенств

$$\begin{gathered}\nu_{m-1}q_{(m-1)0} - v''_{m+1}(q_{00})\,q_{(m-1)0} - \eta_{m-1}q_{(m-1)1} = \alpha e_0 + f\\ \nu_{m-1}q_{(m-1)1} - v''_{m+1}(q_{00})\,q_{(m-1)1} = 0\end{gathered} \tag{3.6}$$

Положив $q_{(m-1)1} = -(\alpha/\eta_{m-1}) e_0$, удовлетворим второму равенству, а первое разрешим на подпространстве $e_0^{\perp}$, где оператор $(\nu_{m-1}E - v''_{m+1}(q_{00}))$ невырожден.

4. Рассмотрим банаховы пространства $\mathbf{E}^{(0)}_{\tau_0,\alpha}$, $\mathbf{E}^{(2)}_{\tau_0,\alpha}$: $\mathbf{E}^{(2)}_{\tau_0,\alpha}$ — пространство функций q: $[\tau_0, +\infty) \to \mathbf{R}$ дважды непрерывно дифференцируемых на бесконечном полуинтервале $[\tau_0, +\infty)$, $\tau_0 > 0$, для которых конечна норма

$$\| q \|^{(2)}_{\tau_0,\alpha} = \sup_{\tau \geqslant \tau_0} \{ e^{\alpha\tau} [\, | q^{\cdot\cdot}(\tau) | + | q^{\cdot}(\tau) | + | q(\tau) | \,] \}, \quad \alpha > 0$$

$\mathbf{E}^{(0)}_{\tau_0,\alpha}$ — пространство функций p: $[\tau_0, +\infty) \to \mathbf{R}$, непрерывных на $[\tau_0, +\infty)$, для которых конечна норма

$$\| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha} = \sup_{\tau \geqslant \tau_0} \{ e^{\alpha\tau} | p(\tau) | \}$$

и дифференциальный оператор

$$D: \mathbf{E}^{(2)}_{\tau_0,\alpha} \to \mathbf{E}^{(0)}_{\tau_0,\alpha}; \quad D = \frac{d^2}{d\tau^2} + a\frac{d}{d\tau} + b, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Лемма. Пусть $\operatorname{Re} \mu_1, \mu_2 > -\alpha$, где μ_1, μ_2 — корни уравнения

$$\mu^2 + a\mu + b = 0$$

Тогда оператор D имеет ограниченный обратный, и для любого $p \in \mathbf{E}^{(0)}_{\tau_0,\alpha}$

$$\| D^{-1} p \|^{(2)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant C \| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha} \tag{4.1}$$

причем постоянная $C > 0$ зависит только от a, b, α и не зависит от τ_0.

Доказательство. Используя метод вариации постоянных для решения дифференциального уравнения с «начальными» условиями

$$\begin{gathered} q^{\cdot\cdot} + aq^{\cdot} + b = p(\tau), \; p \in \mathbf{E}^{(0)}_{\tau_0,\alpha} \\ q(+\infty) = q^{\cdot}(+\infty) = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

можно получить явные формулы

$$\begin{gathered} q(\tau) = (\mu_2 - \mu_1)^{-1} \{ e^{\mu_1\tau} I(\tau, \mu_1) - e^{\mu_2\tau} I(\tau, \mu_2) \} \\ \mu_1 \neq \mu_2, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R} \\ q(\tau) = e^{\mu\tau} \int_{\tau}^{+\infty} I(s, \mu)\, ds, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad \mu \in \mathbf{R} \\ q(\tau) = \omega^{-1} e^{\gamma\tau} \{ \cos \omega\tau I_1(\tau) - \sin \omega\tau I_2(\tau) \} \\ \mu_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{-1}\,\omega, \quad \gamma, \omega \in \mathbf{R} \\ I(\tau, \mu) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\mu s} p(s)\, ds \\ I_1(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\gamma s} \sin \omega s p(s)\, ds \\ I_2(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\gamma s} \cos \omega s p(s)\, ds \end{gathered} \tag{4.3}$$

В силу того что $\operatorname{Re} \mu_1, \mu_2 > -\alpha$, все интегралы в (4.3) сходятся. При помощи дифференцирования соотношений (4.3) и мажорирования соответствующих интегралов экспоненциально убывающими функциями для решения (4.2) получим оценки

$$\| q \|^{(2)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant \left\{ 1 + | \mu_2 - \mu_1 |^{-1} \left[\frac{\mu_1^2 + \mu_1 + 1}{\alpha + \mu_1} + \frac{\mu_2^2 + \mu_2 + 1}{\alpha + \mu_2} \right] \right\} \| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha}, \quad \mu_1 \neq \mu_2, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R} \tag{4.4}$$

$$\| q \|^{(2)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant \left\{1 + \frac{2|\mu|+1}{\alpha+\mu} + \frac{\mu^2+\mu+1}{(\alpha+\mu)^2}\right\} \| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha}\ \mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad \mu \in \mathbf{R}$$

$$\| q \|^{(2)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant \{1 + 2(|\omega|(\alpha+\gamma))^{-1}[|\gamma^2-\omega^2| + $$
$$+ 2|\omega\gamma| + |\gamma| + |\omega| + 1]\} \| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha}$$
$$\mu_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{-1}\omega, \ \gamma, \ \omega \in \mathbf{R}$$

поскольку модуль интеграла $I(\tau, \mu)$ мажорируется, например, функцией $\| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha} (\alpha + \mu)^{-1} e^{-(\alpha+\mu)\tau}$.

Таким образом, оператор D имеет ограниченный обратный, и из (4.4) следует (4.1).

Если ряд (3.2) сходится, то существует асимптотическое решение уравнений (3.1). Найдем решение уравнений (3.1) в виде $q = q_m + y$, где q_m — приближенное решение, найденное на $(m-1)$-м шаге, а y — неизвестный равномерно сходящийся на некотором бесконечном полуинтервале $[\tau_0, +\infty)$, $\tau_0 > 0$ ряд вида (3.2) при $k > m-1$.

Рассмотрим три экземпляра пространств таких рядов. $\mathbf{B}^{(l)}_{\tau_0,\alpha}$ — C^l-пространства вектор-функций y: $[\tau_0, +\infty) \to \mathbf{R}^n$, представимых в виде рядов (3.2) при $k > m-1$ с нормами

$$\| y \|^{(l)}_{\tau_0,\alpha} = \sup_{\tau \geqslant \tau_0} \left\{ e^{\alpha\tau} \left[\sum_{r=0}^{l} \| y^{(r)}(\tau) \| \right] \right\}$$
$$l = 0, 1, 2, \quad \alpha = (m+1+\delta)/(m-1), \quad 0 < \delta \leqslant 1$$
$$\mathbf{B}^{(0)}_{\tau_0,\alpha} \supset \mathbf{B}^{(1)}_{\tau_0,\alpha} \supset \mathbf{B}^{(2)}_{\tau_0,\alpha}$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D: \mathbf{B}^{(2)}_{\tau_0,\alpha} \to \mathbf{B}^{(0)}_{\tau_0,\alpha}; \quad D = \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{d}{d\tau} - v''_{m+1}(q_{00})$$

Разложим $\mathbf{R}^n$ в ортогональную сумму одномерных собственных подпространств оператора $v''_{m+1}(q_{00})$. Пусть P_λ — проектор на подпространство, отвечающее собственному значению λ:

$$P_\lambda D = D_\lambda P_\lambda; \quad D_\lambda = \frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{d}{d\tau} - \lambda$$

Рассмотрим корни уравнения $\mu^2 - \mu - \lambda = 0$. При $\lambda \leqslant -1/4$ имеем $\operatorname{Re} \mu_1, \mu_2 = 1/2$, при $-1/4 < \lambda \leqslant 0$ корни вещественны и принадлежат отрезку $[0; 1]$. У оператора $v''_{m+1}(q_{00})$ имеется только одно положительное собственное число $\lambda = \nu_{m-1} = m\nu_0$. При этом $\mu_1 = 2m/(m-1)$, $\mu_2 = -(m+1)/(m-1)$. В любом случае $\operatorname{Re} \mu_1, \mu_2 > -\alpha$, $\alpha = (m+1+\delta)/(m-1)$ и в силу леммы оператор D_λ обратим, причем

$$\| D_\lambda^{-1} p \|^{(1)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant \| D_\lambda^{-1} p \|^{(2)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant C(\lambda) \| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha}$$

Поскольку пространство $\mathbf{R}^n$ конечномерно, то данную оценку можно сделать равномерной по λ. Следовательно, оператор D обратим и для любого $p \in \mathbf{B}^{(0)}_{\tau_0,\alpha}$

$$\| D^{-1} p \|^{(1)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant C \| p \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha}$$

где $C > 0$ не зависит от τ_0.

Запишем (3.1) в виде функционального уравнения

$$y = D^{-1}\Phi(y) \tag{4.5}$$
$$\Phi(y) = -v''_{m+1}(q_{00})\,y + (\Gamma(q, q^{\cdot}) - \Gamma(q_m, q_m^{\cdot}) +$$
$$+ e^{\tau}(\Omega(q)\,q^{\cdot} - \Omega(q_m)\,q_m^{\cdot}) + e^{2\tau}(f(q) - f(q_m))) - x_m$$

Используя методику работы [2], можно получить оценку

(4.6) $\quad \| \Phi(y_1) - \Phi(y_2) \|^{(0)}_{\tau_0,\alpha} \leqslant C_1(\tau_0) \| y_1 - y_2 \|^{(1)}_{\tau_0,\alpha}$ причем $C_1(\tau_0) \to$

$\to 0+$ при $\tau_0 \to +\infty$, y_1 и y_2 принадлежат шару радиуса L в $\mathbf{B}^{(1)}_{\tau_0,\alpha}$, где $L = 2\| x_m \|^{(1)}_{\tau_0,\alpha}$. Следовательно, при достаточно большом τ_0 $D^{-1}\Phi(y)$ будет сжимающим оператором на некотором шаре в $\mathbf{B}^{(1)}_{\tau_0,\alpha}$. Поэтому $D^{-1}\Phi(y)$ имеет неподвижную точку [7], т. е. уравнение (4.5) имеет решение в виде сходящегося ряда (3.2) при $k > m-1$, что и доказывает сходимость построенного ранее формального решения.

Уравнения (2.1) тогда имеют частное асимптотическое решение в виде равномерно сходящегося ряда

$$q(t) = \sum_{(m-1)j \leqslant k}^{\infty} q_{kj} t^{-\zeta_k} \ln^j t \tag{4.7}$$

5. Замена времени $t \to c - t$ переводит рассматриваемую систему с функцией Рауса $R = R_2 + R_1 + R_0$ в систему с функцией Рауса $R^- = R_2 - R_1 + R_0$. Однако условия теоремы инвариантны относительно такой замены, поэтому асимптотические решения будут существовать и для системы с R^-, откуда для исходной системы будет следовать существование траекторий, выходящих на границу шара фиксированного радиуса из сколь угодно малой окрестности равновесия за конечное время, т. е. неустойчивость. Тем самым теорема полностью доказана.

Данная теорема является распространением теорем [1, 2] о существовании асимптотических траекторий на ненатуральные системы. Отметим, что в условиях теоремы не оговаривается знакопостоянство не зависящей от импульсов части функции Гамильтона, поэтому, в известном смысле, данная теорема обобщает результат [8].

В работе [9] сформулирована теорема о неустойчивости, доказательство которой, приведенное в [9], содержит ряд неточностей, хотя, судя по всему, теорема верна.

Пусть $H(p, q)$ — функция Гамильтона некоторой механической системы, удовлетворяющей условиям теоремы [9]. Тогда можно показать, что $H_0(q) = H(0, q) < 0$ для любого $q \in V_\varepsilon^+$, где $V_\varepsilon^+ = \{q \in \mathrm{R}^n\colon \|q\| < \varepsilon,\ V(q) > 0\}$ непусто и связно.

Покажем, что существуют системы, не удовлетворяющие условиям теоремы [9], но удовлетворяющие условиям теоремы данной работы.

Рассмотрим систему с функцией Рауса

$$R(q_1, q_2, q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}) = {}^1/_2(q_1^{\cdot 2} + q_2^{\cdot 2}) + q_1^2(q_1 q_2^{\cdot} - q_2 q_1^{\cdot}) + {}^1/_2 q_2^3$$

Здесь $q_1 = q_2 = 0$ — положение равновесия; $V(q_1, q_2) = v_3(q_1, q_2) = {}^1/_2 q_2^3$ принимает положительные значения при $q_2 > 0$, а порядок малости членов при $q_1^{\cdot}$, $q_2^{\cdot}$ в R_1 равен трем, т. е. согласно теореме данной работы имеет место неустойчивость. Функция Гамильтона рассматриваемой системы равна

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = {}^1/_2(p_1^2 + p_2^2) - q_1^2(p_2 q_1 - p_1 q_2) + H_0(q_1, q_2),\quad 2H_0(q_1, q_2) = q_1^4(q_2^2 + q_1^2) - q_2^3$$

Очевидно, что $H_0(q_1, q_2)$ может принимать положительные значения при $q_2 > 0$ в сколь угодно малой окрестности $q_1 = q_2 = 0$, т. е. данная система не удовлетворяет условиям теоремы [9].

Автор признателен В. В. Козлову за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Асимптотические решения уравнений кассической механики.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 573—577.
2. *Козлов В. В., Паламодов В. П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1982, т. 263, № 2, с. 285—289.
3. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.

4. *Routh E. J.* A treatise on the stability of a given state of motion. L.: McMilland and Co., 1892. 224 p.
5. *Salvadori L.* Criteri d'instabilitá per i moti merostatici di un sistema olonomo.— Rend. Accad. Sci. fis. e math. Soc. naz. sci. lett ed arti Napoli, 1960, v. 27, No. 4, p. 535—542.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.
8. *Hagedorn P.* Die instabilität konservativer Systeme mit gyroskopishen Kräften.— Abhande Akad. Wiss DDR, 1977, No. 5, S. 401—406.
9. *Сосницкий С. П.* К вопросу о гироскопической стабилизации.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 3—7.

Москва

Поступила в редакцию
8.IV.1986