Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 531.01+517.55

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА — ДИРИХЛЕ

Козлов В. В.

Рассматриваются движения натуральных механических систем, стремящиеся к положениям равновесия при неограниченном возрастании времени. Исследуются случаи вырождения, когда несколько частот малых колебаний обращаются в нуль. Доказывается теорема о существовании асимптотических траекторий в предположении, что ряд Маклорена потенциальной энергии имеет вид $V_2 + V_m + V_{m+1} + \ldots$ (V_s — однородная форма степени s) и функция $V_2 + V_m$ не имеет в положении равновесия локального минимума. Ранее [1, 2] утверждение об асимптотических движениях было доказано для частного случая, когда $V_2 \equiv 0$. С помощью этой теоремы решается вопрос о существовании асимптотических траекторий в случае простых и унимодальных особенностей потенциальной энергии, для которых известны «канонические» нормальные формы. Аналогичные утверждения справедливы и для положений равновесия градиентных динамических систем. Из факта существования траектории, асимптотической к положению равновесия, вытекает, конечно, его неустойчивость в смысле определения Ляпунова.

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть $x = 0$ — положение равновесия натуральной механической системы с потенциалом $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $V(0) = 0$. В окрестности точки $x = 0$ гладкой функции V можно поставить в соответствие ее ряд Маклорена $V_2 + V_3 + \ldots$, не обязательно сходящийся (здесь V_s — однородная форма степени s). Будем исследовать асимптотические движения, т. е. нетривиальные решения уравнений движения $t \mapsto x(t)$, такие, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В силу обратимости времени функция $t \mapsto x(-t)$ тоже является движением. Отсюда вытекает неустойчивость равновесия при наличии асимптотических движений. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет локальный минимум, то асимптотических движений, очевидно, нет.

Было высказано [3] предположение о том, что в случае аналитической функции V асимптотические движения существуют, если $x = 0$ не является точкой локального минимума V. В бесконечно дифференцируемом случае условие аналитичности V можно, по-видимому, заменить условием отсутствия минимума у функции $V_2 + \ldots + V_k$ при некотором k. Без подобного рода дополнительных ограничений это предположение не справедливо, как показывает известный пример Пенлеве — Уинтнера (см. [3]).

Гипотеза об асимптотических движениях была доказана в следующих случаях:

а) $n \leqslant 2$, $x = 0$ — изолированная критическая точка V;

б) V — полуквазиоднородная функция на $\mathbf{R}^n$;

в) $V_2 = \ldots = V_{m-1} \equiv 0$, а форма V_m не имеет в точке $x = 0$ локального минимума.

В случаях а), б) доказательство существования асимптотических движений использует следующее утверждение, которое потребуется в дальнейшем.

Лемма 1 [3]. Пусть $x = 0$ — изолированная критическая точка потенциала V, не являющаяся его локальным минимумом. Если в области $U_\varepsilon^- = \{x : |x| < \varepsilon,\ V(x) < 0\}$ существует дифференцируемое векторное поле v, такое, что

$$(v, V_x') \leqslant 0 \text{ в } U_\varepsilon^-$$
$$(v_x'\xi, \xi) \geqslant c\xi^2 \text{ для всех } \xi \in \mathbf{R}^n \text{ и } x \in U_\varepsilon^-,\quad c > 0$$
$$|v(x)| \to 0 \text{ при } x \to 0$$

то уравнения движения имеют асимптотическое решение.

Случай $n = 1$ тривиален. В случае $n = 2$ поле v построено в [4] в связи с доказательством неустойчивости равновесия. В случае б) поле v указано в [5]. Доказательство существования асимптотического движения в предположении в) основано на других соображениях. Здесь уже не предполагается изолированности (в вещественном смысле) критической точки $x = 0$. В аналитическом случае асимптотические движения ищутся в виде сходящихся рядов, форма которых существенно зависит от четности m

$$m = 2,\quad x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e^{i\lambda t},\quad \lambda < 0,\quad x_i \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

$$m = 2k + 1,\quad x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{t^{i\mu}},\quad \mu = \frac{2}{2k-1},\quad x_i \in \mathbf{R}^n \tag{1.2}$$

$$m = 2k,\quad k \geqslant 2,\quad x(t) = \frac{1}{t^\mu} \sum_{i,\, j=0,\, j\leqslant \mu i}^{\infty} \frac{x_{ij} (\ln t)^j}{t^{i\mu}} \tag{1.3}$$

$$\mu = \frac{1}{k-1},\quad x_{ij} \in \mathbf{R}^n$$

Случай $m = 2$ составляет классический результат Ляпунова ([6], п. 24). Случай нечетного m рассмотрен в работе [1], а случай четного m, большего двух,— в [2]. На практике наиболее типична, конечно, ситуация, когда $m = 2$. В некоторых задачах приходится рассматривать случаи $m > 2$. К ним относится, например, задача об устойчивости системы зарядов в электростатическом поле. В этой задаче каждая нетривиальная форма разложения Маклорена (в том числе и V_m) является непостоянной гармонической функцией, которая принимает как положительные, так и отрицательные значения. Отсюда вытекает, в частности, строгое доказательство известной «теоремы Ирншоу» о неустойчивости равновесия системы свободных зарядов в стационарном электрическом поле [7].

Если функция Лагранжа натуральной механической системы бесконечно дифференцируема, но не аналитическая в $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_{\dot x}^n$ (скажем, функция V неаналитическая), то в предположениях случая в) уравнения движения снова имеют решения в виде рядов (1.1)—(1.3). Однако эти ряды, вообще говоря, расходятся, и в этой ситуации можно говорить о «формальной неустойчивости» положения равновесия. В связи с этим замечанием возникает интересная задача о том, вытекает ли из формальной неустойчивости неустойчивость в смысле определения Ляпунова. В случае $m = 2$ положительный ответ на этот вопрос общеизвестен (см., например, [8], гл. IV; случай уравнений динамики детально рассмотрен в [9]). Оказывается, для вырожденных положений равновесия ситуация аналогична (см. п. 3).

Рассмотрим более общий случай, когда ряд Маклорена функции V имеет вид $V_2 + V_m + V_{m+1} + \ldots$, $m \geqslant 3$. С точки зрения случая в) (когда $m = 2$) целесообразно рассматривать лишь неотрицательные формы V_2. Из линейной алгебры известно, что множество точек из $\mathbf{R}^n$, в которых квадратичная форма $V_2 = 0$, образует k-мерную плоскость π, содержащую точку $x = 0$. С точки зрения теории малых колебаний в этом случае ровно k частот обращаются в нуль. В дальнейшем предполагается, что $k > 0$. В противном случае форма V_2 положительно определена, положение равновесия устойчиво и асимптотических движений нет. Пусть W_m — ограничение формы V_m на плоскость π. Ясно, что W_m — однородная форма степени m.

Теорема 1. Если функция W_m не имеет в точке $x = 0$ локального минимума, то натуральная система обладает движениями, асимптотическими к точке $x = 0$.

Следствие. В предположениях теоремы 1 равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Если m нечетно, то условие отсутствия минимума можно заменить, очевидно, условием $W_m \not\equiv 0$. В «типичных» случаях вырождения форма W_3, конечно, не обращается тождественно в нуль. Таким образом, точки бифуркации общего положения соответствуют неустойчивым состояниям равновесия (это утверждение будет уточнено в п. 4). В случае, когда $m = 3$, $k = 2$, неустойчивость равновесия была доказана ранее [10]. Случай, когда $k = 1$, а m произвольно, с точки зрения устойчивости рассмотрен в [11]; здесь потенциал V в подходящих координатах является, очевидно, полуквазиоднородной функцией.

Известно, что типичные положения равновесия — это невырожденные критические точки функции V (т. е. форма V_2 неособая): они «устойчивы» к малым возмущениям функции V. Вырожденные равновесия, наоборот, разрушаются при возмущениях достаточно общего вида. Поэтому может создаться впечатление, что задача изучения вырожденных равновесий (их устойчивости, наличия асимптотических решений и т. д.) малосодержательна. Это, однако, не так. На практике обычно потенциал зависит еще от некоторого числа параметров. Из теории катастроф известно, что при возмущении гладких семейств потенциалов вырожденные равновесия, как правило, не исчезают, а лишь слегка изменяют свое положение, оставаясь при этом вырожденными (обсуждение этих вопросов см., например, в [12]). Соединяя теорему 1 с классификацией простых и унимодальных особенностей, можно показать, что гипотеза об асимптотических движениях справедлива для вырожденных равновесий, появляющихся неустранимым образом в типичных семействах потенциалов, зависящих не более чем от 10 параметров (см. п. 4).

В этой работе автор не стремился уяснить все формально-аналитические аспекты рассматриваемой задачи, а хотел подчеркнуть содержательные вопросы, связанные с анализом вырожденных положений равновесия натуральных систем.

2. Формальная неустойчивость. Пусть $V = V_2 + V_3 + \ldots$. Квадратичной форме V_2 можно поставить в соответствие единственную билинейную симметричную форму Φ, такую, что $V_2(x) = \Phi(x, x)$. Пусть π — нулевая плоскость для формы Φ, т. е. множество всех векторов $x \in \mathbf{R}^n$, таких, что $\Phi(x, y) = 0$ для всех $y \in \mathbf{R}^n$. Если $V_2 \geqslant 0$, то $\pi = \{x\colon V_2(x) = 0\}$.

Лемма 2. В окрестности точки $x = 0$ можно ввести координаты $x_1, \ldots, x_n$, в которых

кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

где a_{ij} — гладкие функции от $x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

потенциал

$$V = \pm\omega_1{}^2 x_1{}^2/2 \pm \ldots \pm \omega_k{}^2 x_k{}^2/2 + W(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$k = n - \dim \pi$, W — гладкая функция, причем $W = W_3 + \ldots$.

Для доказательства надо сначала ввести нормальные координаты, а затем воспользоваться леммой о расщеплении ([13], гл. 4). Переменные x_s $(1 \leqslant s \leqslant k)$ будут в дальнейшем часто обозначаться $y_1, \ldots, y_k$, а x_{k+s} $(1 \leqslant s \leqslant n-k)$ — $z_1, \ldots, z_l$ $(k + l = n)$. Если $V = V_2 + V_m + \ldots$ и W_m — ограничение формы V_m на π, то W_m — первая нетривиальная форма ряда Маклорена функции $z \mapsto W(z)$.

В переменных y, z уравнения движения

$$(L_{x^\cdot}')^\cdot = L_x', \quad L = K - V$$

можно представить в виде следующей системы:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned} y_i^{\cdot\cdot} + (\Gamma_i(x)\, x^\cdot, x^\cdot) &= \pm\omega_i{}^2 y_i + \ldots \quad (i \leqslant k) \\ z_j^{\cdot\cdot} + (\Gamma_j(x)\, x^\cdot, x^\cdot) &= -\partial W_m/\partial z_j + \ldots \quad (j \leqslant l) \end{aligned}$$

Невыписанные слагаемые в этих уравнениях имеют порядок малости соответственно не менее 2 и m; символы $(\Gamma(x)\, x^\cdot, x^\cdot)$ обозначают квадратичные формы по переменным $x_s^\cdot$ с гладкими коэффициентами, зависящими от $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 2. Если функция $W_m\colon \pi \to \mathbf{R}$ не имеет в нуле локального минимума, то уравнения (2.1) обладают решениями в виде формальных рядов

$$\text{(2.2)} \qquad y = \frac{1}{t^{2\mu+2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}}{t^{i\mu}}, \quad z = \frac{1}{t^{\mu}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{(i)}}{t^{i\mu}}$$

$$\mu = \frac{2}{m-2}, \quad y^{(i)} \in \mathbf{R}^k, \quad z^{(i)} \in \mathbf{R}^l$$

если m нечетно, и в виде формальных рядов

$$\text{(2.3)} \qquad y = \frac{1}{t^{2\mu+2}} \sum_{\substack{i,\, j=0 \\ j \leqslant \mu i}}^{\infty} \frac{y^{(ij)} (\ln t)^j}{t^{i\mu}}, \quad z = \frac{1}{t^{\mu}} \sum_{\substack{i,\, j=0 \\ j \leqslant \mu i}}^{\infty} \frac{z^{(ij)} (\ln t)^j}{t^{i\mu}}$$

$$\mu = \frac{2}{m-2}, \quad y^{(ij)} \in \mathbf{R}^k, \quad z^{(ij)} \in \mathbf{R}^l$$

если m четно и $m > 2$.

Это утверждение доказывается индукцией, возрастающей по i и убывающей по j (ср. с [1, 2]). Наиболее существенный момент доказательства — нахождение коэффициентов ряда для z. Если, скажем, в рядах (2.2) найдены коэффициенты $z^{(i)}$ до номера s включительно и коэффициенты $y^{(i)}$ до номера $s - 1$, то коэффициент $y^{(s)}$ однозначно находится из первой группы уравнений (2.1). Действительно, приравнивая коэффициенты при степенях $1/t^{2\mu+2+s\mu}$, видим, что коэффициент $y^{(s)}$ может появиться лишь при учете членов $\pm\omega_i{}^2 y_i$. Слагаемые наинизшей степени $2\mu + 2$ в ряде для y появляются из-за слагаемых вида $A_{\alpha\beta} z_\alpha^\cdot\, z_\beta^\cdot$ $(A_{\alpha\beta} = \text{const})$ в левой части первого уравнения (2.1). Векторы $z^{(0)}$ и $z^{(00)}$, при помощи которых определяются все остальные коэффициенты, полагаются равными αe, где $\alpha = \text{const}$, а e — единичный вектор, на котором достигается минимум формы W_m на единичной сфере $|z| = 1$. Вещественный параметр α выбирается из условия, чтобы функция $\alpha e/t^{\mu}$ удовлетворяла «упрощенному» уравнению движения (ср. с [1])

$$z^{\cdot\cdot} = -\partial W_m/\partial z, \quad z \in \mathbf{R}^l$$

Отметим, что если $k = 0$, то упрощенное уравнение соответствует «укороченной системе» работы [14].

Причину появления логарифмов в рядах (2.3) при четном $m > 2$ поясним на примере системы с одной степенью свободы

(2.4) $$x^{\cdot\cdot} + \alpha(x)\, x^{\cdot 2} = 2x^3 + ax^4 + \ldots, \quad x \in \mathbf{R}$$

Упрощенная система $x^{\cdot\cdot} = 2x^3$ имеет решение $x(t) = 1/t$. Будем искать асимптотическое решение полной системы (2.4) в виде ряда

(2.5) $$x = 1/t + x_2/t^2 + x_3/t^3 + \ldots$$

Подставляя этот ряд в (2.4) и собирая члены порядка t^{-4}, получим соотношение $\alpha_0 = a$ ($\alpha_0 = \alpha(0)$). Следовательно, если $\alpha_0 \neq a$, то уравнение (2.4) не имеет решений в виде степенного ряда. Полагая $x = 1/t + y$ и считая y малым, получим из (2.4) линейное неоднородное уравнение, которое заменой $y = ze^{2\tau}$, $t = e^{\tau}$ сведем к уравнению с постоянными коэффициентами (штрих означает производную по τ)

(2.6) $$z'' + 3z' - 4z = (a - \alpha_0)\, e^{-4\tau}$$

Среди корней характеристического уравнения есть число -4, поэтому при $a \neq \alpha_0$ решение уравнения (2.6) следует искать в виде $c\tau e^{-4\tau}$, $c = \text{const}$. Возвращаясь к старым переменным, получим в разложении асимптотического решения слагаемое $(c \ln t)/t^2$. Если, однако, $\alpha_0 = a$, то уравнение (2.4) имеет однопараметрическое семейство асимптотических решений вида (2.6); параметром служит коэффициент x_2. Отметим, что если система (2.4) допускает инволюцию $x \mapsto -x$, то $\alpha_0 = a = 0$. Это замечание можно обобщить.

Предложение 1. Если $m = 4$ и лагранжиан $L = K - V$ допускает инволюцию $x \mapsto -x$, то ряды (2.3) не содержат логарифмов и их коэффициенты зависят от произвольной постоянной.

Для четных $m > 4$ это утверждение не справедливо: требуется симметрия более высокого порядка.

Будем искать решения уравнений (2.1) в виде рядов (2.2). Можно показать (ср. с [1]), что вектор $z^{(i)}$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\left[A - \frac{2(i+1)(2i+m)}{(m-2)^2} E\right] z^{(i)} = a^{(i)}$$

Одно из собственных значений симметричной матрицы A равно $2m(m-1)/(m-2)^2$, а остальные — неположительны. Вектор $a^{(i)}$ однозначно определяется через уже известные векторы $z^{(0)}, \ldots, z^{(i-1)}$. Если $m = 4$, то уравнение для $z^{(i)}$ может оказаться неразрешимым лишь при $i = 1$. Однако $a^{(1)} = 0$, так как (ввиду четности лагранжиана по переменным x) в правой части второго уравнения (2.1) отсутствуют члены порядка 4 и $\Gamma_j(0) = 0$. В качестве $z^{(1)}$ можно взять любой собственный вектор матрицы $(A - 6E)$.

Согласно определению из п. 1, теорема 2 утверждает, что равновесие $x = 0$ формально неустойчиво, если форма W_m принимает где-то отрицательные значения. Подчеркнем, что при этом коэффициенты Γ в уравнениях (2.1) не обязательно должны совпадать с символами Кристоффеля римановой метрики, задаваемой кинетической энергией. В отличие от рядов (1.2), (1.3) ряды (2.2), (2.3) могут расходиться (и, как правило, расходятся) даже в аналитическом случае.

Причина расходимости ясно видна из следующего модельного примера:

(2.7) $$x^{\cdot\cdot} = 12x^2, \quad y^{\cdot\cdot} - x^{\cdot 2} = -y$$

В этом случае $m = 3$ и $W_3 = -4x^3$. Система уравнений (2.7) имеет формальное решение

$$x = \frac{1}{2t^2}, \quad y = \frac{1}{t^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{t^{2n}}, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n(2n+5)!}{120} \tag{2.8}$$

Радиус сходимости ряда для y равен нулю.

Теорема 2 справедлива и в бесконечномерном случае, когда коразмерность вырождения квадратичной формы разложения Маклорена потенциальной энергии конечна. Это предположение выполняется, например, в задачах о колебаниях упругих конструкций ([13], гл. 13). Правда, нагруженный с торцов упругий стержень сохраняет устойчивость в первой точке бифуркации. Однако в более сложных ситуациях, связанных с «прощелкиванием» стержней, это уже не так: форма $W_3 \not\equiv 0$, и поэтому стержень теряет устойчивость в точках бифуркаций. В случае простых вырождений потенциальная энергия является полуквазиоднородным функционалом, и поэтому неустойчивость равновесия можно вывести из леммы 1 после ее надлежащего обобщения.

3. Существование асимптотических движений. Начнем с анализа динамической системы из п. 2, описываемой уравнениями (2.7). Расходящийся ряд для переменной y можно просуммировать следующим приемом. Полагая $x = 1/(2t^2)$, получим линейное дифференциальное уравнение для нахождения y: $y^{\cdot\cdot} + y = t^{-6}$. Решая его методом вариации постоянных, найдем решение

$$y(t) = -\sin t\int_t^{\infty}\frac{\cos s}{s^6}\,ds + \cos t\int_t^{\infty}\frac{\sin s}{s^6}\,ds \tag{3.1}$$

которое стремится к нулю при $t \to +\infty$. Выполняя последовательно интегрирование по частям, из формулы (3.1) можно получить ряд (2.8). Поэтому функцию (3.1) естественно считать суммой (в обобщенном смысле) расходящегося ряда (2.8). Этот метод суммирования расходящихся рядов аналогичен известному методу Бореля [15]. Полагая

$$y_N(t) = \frac{1}{t^6}\sum_{n=0}^{N}\frac{a_{2n}}{t^{2n}}$$

видим, что $|y(t) - y_N(t)| = O(1/t^{2N})$. Таким образом, расходящийся степенной ряд (2.8) является асимптотическим рядом функции (3.1).

Эти наблюдения можно обобщить.

Теорема 3. В предположениях теоремы 2 уравнения (2.1) имеют асимптотические решения, для которых ряды (2.2), (2.3) являются их асимптотическими разложениями.

Пусть m нечетно. Уравнение движения $x^{\cdot\cdot} = f(x^{\cdot}, x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ перепишем в виде системы $x^{\cdot} = v$, $v^{\cdot} = f(v, x)$ и сделаем замену времени $t \mapsto \tau$ по формуле $\tau = 1/t^{\alpha}$, $\alpha = 1/(m-2)$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, приходим к системе

$$-\mu\tau^{(\alpha+1)/\alpha}x' = v, \quad -\mu\tau^{(\alpha+1)/\alpha}v' = f(v, x) \tag{3.2}$$

с гладкой правой частью, имеющей решение в виде формального ряда $\Sigma x_n\tau^n$. Так как $(\alpha+1)/\alpha$ целое, то можно воспользоваться теоремой [16], гарантирующей существование у системы (3.2) гладкого решения $\tau \mapsto x(\tau$, для которого ряд $\Sigma x_n\tau^n$ является его рядом Маклорена. Если m четно, то можно положить $\alpha = \mu$. Тогда $(\alpha+1)/\alpha = m/2$ снова будет целым числом. В этом случае теорема 3 вытекает из теоремы [16], обобщенной на случай, когда формальное решение содержит степени $\ln \tau$. Возможность такого обобщения результатов работы [16] указана автору В. П. Паламодовым. Впрочем, в дальнейшем будет рассматриваться лишь случай $m = 4$; при дополнительном предположении о четности лагранжиана по переменным x из предложения 1 и результата работы [16] вытекает существование целого семейства различных асимптотических движений. Теорема 1 следует из теорем 2 и 3.

В связи с теоремой 3 возникает интересная задача о единственности решений уравнений движения с заданными асимптотическими рядами (2.2), (2.3). Известные достаточные условия единственности требуют, в частности, чтобы коэффициент с номером n был равен $O(n!\sigma^n)$ ([15], гл. VIII). Эти условия выполнены для ряда (2.8). По-видимому, единственность имеет место в аналитическом случае.

4. Простые и унимодальные особенности. Классификация вырожденных критических точек гладких вещественных функций многих переменных продвинута достаточно далеко. В частности, вычислены нормальные формы особых точек, которые неустранимым образом встречаются в гладких семействах функций, содержащих не более 10 параметров (все необходимые определения и относящиеся сюда результаты можно найти в [12], гл. II).

Теорема 4. Если положение равновесия — простая или унимодальная особая точка потенциала и в положении равновесия потенциал не имеет локального минимума, то уравнения движения имеют решения, асимптотические к этому равновесию.

В классах функций коразмерности $c \leqslant 10$ неустранимым образом появляются лишь простые и унимодальные особенности.

Доказательство теоремы 4 использует таблицы нормальных форм ростков гладких функций, содержащиеся в ([12], § 17). В случае простой особенности функция W из леммы 2 приводится к одному из следующих видов: $\pm x^{k+1}$ $(k \geqslant 1)$, $x^2y \pm y^{k-1}$ $(k \geqslant 4)$, $x^3 \pm y^4$, $x^3 + xy^3$, $x^3 + y^5$. В четырех последних случаях $W_3 \not\equiv 0$ и, следовательно, равновесие всегда неустойчиво. Простые особенности удовлетворяют теоремам 2 и 3. Отметим, что в этих случаях потенциал — квазиоднородная функция, и поэтому существование асимптотических движений можно вывести также из леммы 1.

Таблица унимодальных ростков содержит 26 различных типов нормальных форм. Не приводя их, отметим лишь, что в 17 случаях форма $W_3 \not\equiv 0$, а в 7 случаях функция W полуквазиоднородна (следовательно, применима лемма 1). Особого внимания заслуживают два типа особенностей: $\mathbf{X}_{9+k}$ и $\mathrm{Y}_{r,s}$. Нормальные формы функции W таковы: $\pm x^4 \pm x^2y^2 + ay^{4+k}$ $(a \neq 0,\ k > 0)$ и $\pm x^2y^2 \pm x^r + ay^s$ $(a \neq 0,\ r,\ s > 4)$. В этих случаях теоремы 2 и 3 применимы не всегда. Вот простой пример: $W = x^4 + x^2y^2 + y^5$. Попытаемся воспользоваться леммой 1. Для этого сначала докажем

Предложение 2. Пусть $V = X + Y$, где X и Y — квазиоднородные функции степеней s и r, $0 < s < r$ с одинаковыми показателями квазиоднородности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Предположим, что критическая точка $x = 0$ изолирована и не является локальным минимумом функции V. Тогда существует движение, асимптотическое к точке $x = 0$, если дополнительно выполнено одно из следующих условий:

а) $Y \leqslant 0$ в области $\{x\colon V(x) < 0\}$, б) $X \geqslant 0$ в области $\{x\colon V(x) < 0\}$.

Для доказательства рассмотрим векторное поле $v = \Lambda x$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тогда по формуле Эйлера $(v, V_x') = sX + rY$. В случае а) это равно $sV + (r - s)Y$, а в случае б) — $rV + (s - r)X$. Осталось воспользоваться леммой 1.

Тем же способом доказывается следующее утверждение:

Пусть аналитический потенциал V можно представить в виде $V_2 + \ldots + V_k + V_{k+1} + \ldots$, где V_s — квазиоднородные формы степени s с одними и теми же показателями квазиоднородности. Предположим, что точка $x = 0$ не является локальным минимумом V и в области $U_\varepsilon^- = \{x\colon |x| < \varepsilon, V(x) < 0\}$ формы $V_2 \geqslant 0, \ldots, V_{k-1} \geqslant 0$, а $V_{k+1} \leqslant 0, \ldots$ Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.

В случае, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$, это утверждение совпадает с известным результатом Н. Г. Четаева [17].

Рассмотрим для определенности особенность $\mathbf{X}_{9+k}$. Если слагаемое x^2y^2 входит со знаком плюс, то положим $X = z_1^2 + \ldots + z_k^2 + x^2y^2$, $Y = \pm x^4 + ay^{4-k}$. Функции X и Y квазиоднородные степени $2(4+k) + 8$ и $4(4+k)$ с показателями квазиоднородности $4 + k$ и 4 по переменным x, y и с показателями $8 + k$ по переменным z_s. Так как $X \geqslant 0$, то применимо предложение 2. Положим теперь $X = z_1^2 + \ldots + z_k^2 \pm x^4 - x^2y^2$, $Y = ay^{4+k}$. Ясно, что форма $Y \leqslant 0$ в одной из связных компонент области $\{V < 0\}$, если k нечетно или k четно и $a < 0$. В этих случаях снова можно воспользоваться предложением 2. Нерассмотренным остался случай $W = \pm x^4 - x^2y^2 + ay^{4+2k}$, $a > 0$, $k > 0$. Однако форма $W_4 = -x^2y^2 \pm x^4$ не имеет в точке $x = y = 0$ локального минимума, и поэтому применимы теоремы 2, 3. Более того, если коэффициенты квадратичной формы K — функции четные, то можно воспользоваться предложением 1. Особенность $\mathbf{Y}_{r,s}$ рассматривается аналогично.

5. Задача Тома. Градиентной динамической системой называется система следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\dot{x}_j = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (5.1)$$

Здесь $g_{ij} = g_{ji}$ — коэффициенты метрического тензора, гладко зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, $V\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — гладкая функция, которую в дальнейшем будем называть потенциалом. Снова предполагается, что $dV(0) = 0$ и $V(0) = 0$. Градиентные системы были рассмотрены впервые, по-видимому, Ляпуновым в связи с анализом устойчивости положений равновесия ([4], п. 16). Они изучались затем Смейлом в теории структурной устойчивости [18], а также Томом и его последователями в теории катастроф [19]. Оказывается, к таким системам применимы соображения, которые использованы выше для натуральных механических систем.

Предложение 3. Пусть V — аналитическая функция и точка $x = 0$ не является точкой ее локального минимума. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво. При дополнительном предположении об изолированности (в вещественном смысле) критической точки $x = 0$ система (5.1) имеет решение $t \mapsto x(t)$, такое, что $x(t) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Для доказательства воспользуемся равенством

$$V^{\cdot} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j}$$

где $\|g^{ij}\|$ — положительно-определенная матрица, обратная к матрице $\|g_{ij}\|$. Так как функция V аналитична, то в малой окрестности нуля в области $\{V(x) < 0\}$ нет ее критических точек [20]. Поэтому V — функция Четаева и равновесие $x = 0$ неустойчи-