Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ С КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Румянцев В. В.

Исследуется устойчивость установившихся движений системы с квазициклическими координатами при действии потенциальных и диссипативных сил, а также сил, зависящих от квазициклических скоростей. Результаты прилагаются к задаче об устойчивости установившихся плоскопараллельных движений ротора с валом, установленном в упругоподатливых подшипниках с нелинейной реакцией [1].

Ранее [2] с единой точки зрения была исследована устойчивость стационарных движений и относительных равновесий систем с одной циклической (квазициклической) координатой. Рассмотрен [3] вопрос об устойчивости стационарных движений систем с квазициклическими координатами при действии диссипативных и постоянных сил. Результаты [2] были обобщены [4] на системы с несколькими циклическими (квазициклическими) координатами и, кроме того, исследован также третий режим равномерных движений, включающий рассмотренный в [3].

1. Рассмотрим голономную механическую систему, характеризуемую функцией Лагранжа $L = L(q_i, q_i^{\cdot}, \varphi_j^{\cdot})$, где q_i $(i = 1, \ldots, k)$, φ_j $(j = k + 1, \ldots, n)$ — обобщенные координаты, $q_i^{\cdot} \equiv dq_i/dt$, $\varphi_j^{\cdot} \equiv d\varphi_j/dt$ — обобщенные скорости системы, причем функция L не зависит явно от координат φ_j и времени t. Такая система с циклическими координатами φ_j может совершать стационарные движения

$$q_i = q_{i0}, \quad q_i^{\cdot} = 0; \quad \varphi_j^{\cdot} = \omega_j, \quad \varphi_j = \omega_j t + \varphi_{j0} \tag{1.1}$$

в которых позиционные координаты q_i и циклические скорости $\varphi_j^{\cdot}$ остаются постоянными во все время движения. При этом постоянные ω_j либо могут быть заданы в определенных пределах произвольно, а постоянные q_{i0} определяются из уравнений

$$\partial L/\partial q_i = 0 \tag{1.2}$$

в которых следует положить $q_i^{\cdot} = 0$, $\varphi_j^{\cdot} = \omega_j$, либо q_{i0} и ω_j определяются из уравнений (1.2) и первых интегралов уравнений движения

$$\partial L/\partial \varphi_j^{\cdot} = c_j \tag{1.3}$$

в которых следует положить $q_i^{\cdot} = 0$; c_j — произвольные постоянные интегрирования. Здесь и всюду далее

$$i, l = 1, \ldots, k; \quad j, s = k + 1, \ldots, n$$

если не указано противное.

Будем рассматривать случай, когда на систему действуют непотенциальные обобщенные силы $Q_i(q, q^{\cdot}, \varphi^{\cdot})$ и $\Phi_j(q, q^{\cdot}, \varphi^{\cdot})$. В случае $\Phi_j \not\equiv 0$ координаты φ_j называются квазициклическими. Система с квазициклическими координатами также может совершать движения вида (1.1), если при $q_i^{\cdot} = 0$ выполняются условия

$$\partial L/\partial q_i + Q_i = 0, \quad \Phi_j = 0 \tag{1.4}$$

Значения постоянных q_{i0}, ω_j, удовлетворяющие условиям (1.4), будут, вообще говоря, отличаться от их значений в стационарном движении системы с циклическими координатами, если только для них не выполняются условия

(1.5) $$Q_i (q_{l0}, 0, \omega_j) = 0, \quad \Phi_j (q_{i0}, 0, \omega_s) = 0$$

Некоторые случаи (1.5) рассмотрены в [4].

Как правило, для системы с квазициклическими координатами при заданных обобщенных силах постоянные ω_j определяются, как и постоянные q_{i0}, из уравнений (1.4), которые будем далее предполагать разрешимыми.

От переменных φ_j удобно [4] перейти к переменным

(1.6) $$\xi_j = \varphi_j - \omega_j t$$

При замене переменных (1.6) функция Лагранжа (сохраним за ней прежнее обозначение) будет иметь структуру

$$L (q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot}) = L_2 (q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot}) + L_1 (q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot}) + L_0 (q)$$

где $L_\alpha (q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot})$ — однородные степени $\alpha = 0, 1, 2$ формы переменных $q_i^{\cdot}$, $\xi_j^{\cdot}$.

Уравнения Лагранжа движения системы имеют вид

(1.7) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi_j^{\cdot}} = \Phi_j$$

Установившимся движениям (1.1) соответствуют решения уравнений (1.7)

(1.8) $$q_i = q_{i0}, \quad q_i^{\cdot} = \xi_j^{\cdot} = 0$$

Будем далее предполагать форму $L_2 (q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot})$ определенно-положительной функцией $q_i^{\cdot}$, $\xi_j^{\cdot}$, функцию $L_0 (q_i)$ — разложимой в ряд Тейлора в окрестности (1.8).

Умножая уравнения (1.7) на $q_i^{\cdot}$, $\xi_j^{\cdot}$ и суммируя по всем i, j, получаем уравнение энергии

(1.9) $$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{k} Q_i q_i^{\cdot} + \sum_{j=k+1}^{n} \Phi_j \xi_j^{\cdot}$$

где обобщенная энергия

(1.10) $$H (q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot}) = L_2 (q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot}) - L_0 (q)$$

Уравнение (1.9) будет использовано для исследования устойчивости движений (1.8) при различных предположениях об обобщенных силах Q_i, Φ_j.

2. Рассмотрим сначала случай, когда обобщенные силы Φ_j таковы, что во все время движения квазициклические скорости сохраняют заданные постоянные значения [2, 4]

(2.1) $$\varphi_j^{\cdot} = \omega_j, \text{ или } \xi_j^{\cdot} = 0$$

каковы бы ни были значения q_i, $q_i^{\cdot}$. Из второй группы уравнений (1.7) видно, что равенства (2.1) будут иметь место при условиях

(2.2) $$\Phi_j = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi_j^{\cdot}}\right)_{\xi_j^{\cdot}=0}$$

и начальных условиях $\xi_{j0}^{\cdot} = 0$. При выполнении этих условий вторая группа уравнений (1.7) удовлетворяется тождественно и задача приводится к исследованию лишь первой группы уравнений (1.7), которые можно трактовать как уравнения движения системы с k степенями свободы.

В этом случае уравнение (1.9) принимает вид

$$\frac{dH^{(1)}}{dt}=\sum_{i=1}^{k}Q_i q_i^{\cdot} \tag{2.3}$$

$$(H^{(1)}(q, q^{\cdot}) = H(q, q^{\cdot}, 0) = L_2(q, q^{\cdot}, 0) - L_0(q) + L_0(q_0))$$

Рассмотрим случай отсутствия обобщенных сил Q_i, т. е. $Q_i = 0$. Первые k уравнений (1.4) приводятся при этом к уравнениям

$$\partial L_0/\partial q_i = 0 \tag{2.4}$$

означающим, что на движении (1.8) функция $L_0(q)$ имеет стационарное значение.

На основании теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия [5] и ее обобщения на устойчивость по отношению к части переменных [6] приходим к выводу, что если для движения (1.8) функция $L_0(q)$ имеет изолированный максимум (функция $L_0(q) - L_0(q_0)$) является определенно-отрицательной по отношению к переменным q_r ($r = 1, \ldots, m \leqslant k$), то движение (1.8) устойчиво по отношению к переменным q_i (q_r), $q_i^{\cdot}$.

Согласно обращению теоремы Лагранжа и теоремам Кельвина — Четаева [5] заключаем, что если функция $L_0(q) - L_0(q_0)$ может принимать положительные значения в сколь угодно малой окрестности $q_i = q_{i0}$, причем число положительных коэффициентов при квадратах переменных в квадратичной части разложения этой функции в ряд Тейлора нечетно, то движение (1.8) неустойчиво; при четном числе таких коэффициентов возможна гироскопическая стабилизация. Если на систему в ее возмущенном движении в окрестности (1.8) действуют диссипативные силы, производные от определенно-отрицательной по $q_i^{\cdot}$ функции $f(q, q^{\cdot})$, то устойчивое под действием потенциальных сил движение (1.8) становится асимптотически устойчивым, неустойчивое движение остается неустойчивым, а гироскопическая стабилизация разрушается.

Рассмотрим случай действия на систему на любом ее движении диссипативных сил, производных от определенно-отрицательной по $q_i^{\cdot}$, $\varphi_j^{\cdot}$ функции

$$2f(q_i^{\cdot}, \varphi_j^{\cdot}) = \sum_{i,\,j=1}^{k}\beta_{ij}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot} + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}\beta_{ij}q_i^{\cdot}\varphi_j^{\cdot} + \sum_{r,\,s=k+1}^{n}\beta_{rs}\varphi_r^{\cdot}\varphi_s^{\cdot} \tag{2.5}$$

с постоянными коэффициентами $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. В этом случае условия (2.1) обеспечиваются приложением обобщенных сил

$$\Phi_j = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \xi_j^{\cdot}}\right)_{\xi_j^{\cdot}=0} - \sum_{i=1}^{k}\beta_{ji}q_i^{\cdot} - \sum_{s=k+1}^{n}\beta_{js}\omega_s \tag{2.6}$$

Решения вида (1.8) уравнения движения (1.7) имеют при условиях

$$\frac{\partial L_0}{\partial q_i} + \sum_{j=k+1}^{n}\beta_{ij}\omega_j = 0 \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.7) следует, что для движения (1.8) при $\omega_j \neq 0$ функция $L_0(q)$ не имеет стационарного значения.

Полагая в возмущенном движении $q_i = q_{i0} + x_i$ и разлагая функцию $L_0(q)$ в ряд по степеням x_i

$$L_0(q) = L_0(q_0) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L_0}{\partial q_i}\right)_0 x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 x_i x_j + \cdots \tag{2.8}$$

представим уравнение (2.3) с учетом (2.7) в виде

$$(2.9)\qquad \frac{dH^{(2)}}{dt}=\sum_{i,j=1}^{k}\beta_{ij}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}$$

$$\left(H^{(2)}(x_i, x_i^{\cdot})=L_2(q_{i_0}+x_i, x_i^{\cdot}, 0)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_i \partial q_j}\right)x_i x_j+\ldots\right)$$

Многоточие обозначает совокупность членов более высокого порядка малости.

Используя уравнение (2.9), на основании теорем Кельвина — Четаева [5] заключаем, что если в окрестности движения (1.8) вторая вариация

$$\delta^2 L_0=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 x_i x_j$$

функции $L_0(q)$ является определенно-отрицательной, то движение (1.8) асимптотически устойчиво по отношению к переменным q_i, $q_i^{\cdot}$, если же $\delta^2 L_0$ может принимать положительные значения в сколь угодно малой окрестности (1.8), то это движение неустойчиво. В случае, когда правая часть равенства (2.9) является лишь постоянно отрицательной формой, причем множество $\sum_{i,j}\beta_{ij}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}=0$ не содержит целых движений, кроме $q_i^{\cdot}=0$, а $\delta^2 L_0$ — определенно-отрицательная функция, то согласно теореме Барбашина — Красовского [7] движение (1.8) асимптотически устойчиво, если же $\delta^2 L_0$ может принимать положительные значения, то согласно теореме Красовского [7] движение (1.8) неустойчиво.

3. Откажемся теперь от предположения о приложении к системе сил (2.2) или (2.6) и выполнении равенств (2.1) и рассмотрим движение системы с квазициклическими координатами под действием потенциальных сил, производных от функции Лагранжа $L(q, q^{\cdot}, \xi^{\cdot})$, и обобщенных сил

$$(3.1)\qquad Q_i=\frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}}+F_i,\quad \Phi_j=\frac{\partial f}{\partial \varphi_j^{\cdot}}+F_j$$

где $f(q^{\cdot}, \varphi^{\cdot})$ — диссипативная функция (2.5) с полной диссипацией, F_ν ($\nu=1,\ldots,n$) — некоторые дополнительные силы. При этом условия (1.4) существования решений вида (1.8) принимают вид

$$(3.2)\qquad \frac{\partial L_0}{\partial q_i}+\sum_{j=k+1}^{n}\beta_{ij}\omega_j+F_i=0,\qquad \sum_{l=k+1}^{n}\beta_{jl}\omega_l+F_j=0$$

Ранее [3] был исследован случай $F_\nu=\text{const}$. В этом случае уравнение (1.9) при учете (3.1) и (3.2) принимает вид

$$(3.3)\qquad \frac{dH}{dt}=2f(q^{\cdot}, \xi^{\cdot})-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L_0}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{\cdot}$$

или, при учете (2.8)

$$dH^{(3)}/dt=2f(x_i^{\cdot}, \xi_j^{\cdot})$$

$$(H^{(3)}(x, x^{\cdot}, \xi^{\cdot})=L_2(q_{i0}+x_i, x_i^{\cdot}, \xi_j^{\cdot})-\delta^2 L_0+\ldots)$$

Используя уравнение (3.3), на основании теорем Кельвина — Четаева [5] заключаем, что невозмущенное движение (1.8) асимптотически устойчиво по отношению к переменным q_i, $q_i^{\cdot}$, $\xi_j^{\cdot}$, если вторая вариация $\delta^2 L_0$ функции $L_0(q)$ определенно отрицательна, или неустойчиво, если

$\delta^2 L_0$ может принимать положительные значения в сколь угодно малой окрестности (1.8).

Рассмотрим случай, когда дополнительные силы F_ν — непрерывные функции $\varphi_j^{\boldsymbol\cdot}$, обладающие непрерывными частными производными до второго порядка включительно:

$$F_\nu = F_\nu(\varphi_{k+1}^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, \varphi_n^{\boldsymbol\cdot}) \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

такие, что уравнения (3.2) имеют решения (1.8).

Так как в возмущенном движении будем иметь при замене (1.6)

$$F_\nu(\varphi_{k+1}^{\boldsymbol\cdot}, \ldots, \varphi_n^{\boldsymbol\cdot}) = F_\nu(\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n) + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_j^{\boldsymbol\cdot}}\right)_0 \xi_j^{\boldsymbol\cdot} + \ldots \tag{3.5}$$

то уравнение (1.9) при учете (3.1), (3.2), (3.5) примет вид

$$\frac{dH^{(3)}}{dt} = 2f(x_i^{\boldsymbol\cdot}, \xi_j^{\boldsymbol\cdot}) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_j^{\boldsymbol\cdot}}\right)_0 x_i^{\boldsymbol\cdot}\xi_j^{\boldsymbol\cdot} + \sum_{j,\, s=k+1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial \varphi_s^{\boldsymbol\cdot}}\right)_0 \xi_j^{\boldsymbol\cdot}\xi_s^{\boldsymbol\cdot} + \ldots \tag{3.6}$$

Согласно теоремам Кельвина — Четаева [5], если правая часть равенства (3.6) — определенно-отрицательная функция $x_i^{\boldsymbol\cdot}$, $\xi_j^{\boldsymbol\cdot}$, то невозмущенное движение (1.8) асимптотически устойчиво по отношению к переменным q_i, $q_i^{\boldsymbol\cdot}$, $\xi_j^{\boldsymbol\cdot}$ в случае определенно-отрицательной второй вариации $\delta^2 L_0$, и неустойчиво, если $\delta^2 L_0$ может принимать положительные значения.

Рассмотрим, наконец, случай отсутствия диссипативных сил, когда обобщенные силы, действующие на систему, имеют вид (3.1) при $f = 0$ и силах F_ν вида (3.4), причем $F_i = 0$. В этом случае первые k уравнений (3.2) принимают вид (2.4), а последние $n - k$ уравнений (3.2) — вид

$$F_j(\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n) = 0 \tag{3.7}$$

При условии, что якобиан системы (3.7) отличен от нуля, она позволяет найти значения $\varphi_j^{\boldsymbol\cdot} = \omega_j$, при которых имеет место движение (1.8). Уравнение (1.9) принимает вид

$$\frac{dH^{(4)}}{dt} = \sum_{j,\, s=k+1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial \varphi_s^{\boldsymbol\cdot}}\right)_0 \xi_j^{\boldsymbol\cdot}\xi_s^{\boldsymbol\cdot} + \ldots \tag{3.8}$$

$$(H^{(4)}(x, x^{\boldsymbol\cdot}, \xi^{\boldsymbol\cdot}) = L_2(q_{i0} + x_i, x_i^{\boldsymbol\cdot}, \xi_j^{\boldsymbol\cdot}) - L_0(q_{i0} + x_i) + L_0(q_{i0}))$$

Следовательно, если правая часть равенства (3.8) определенно отрицательна, причем множество $\xi_j^{\boldsymbol\cdot} = 0$ не содержит целых движений системы, кроме (1.8), то движение (1.8) асимптотически устойчиво по отношению к q_i, $q_i^{\boldsymbol\cdot}$, $\xi_j^{\boldsymbol\cdot}$ в случае, когда функция $L_0(q)$ имеет изолированный максимум, или неустойчиво, если $L_0(q) - L_0(q_0)$ может принимать положительные значения в сколь угодно малой окрестности $q_i = q_{i0}$.

Сравнивая этот результат с выводом об устойчивости движения, полученным в п. 2 при отсутствии диссипативных сил, заключаем, что силы вида (3.4), (3.7) стабилизируют устойчивое в случае изолированного максимума функции $L_0(q)$ движение до асимптотически устойчивого при условии определенно-отрицательной правой части равенства (3,8) и отсутствия в множестве $\xi_j^{\boldsymbol\cdot} = 0$ целых движений, кроме (1.8).

В частном случае дополнительных сил вида $F_j(\varphi_j^{\cdot})$ условия определенной отрицательности правой части равенства (3.8) сводятся к очевидным неравенствам

$$(dF_j/d\varphi_j^{\cdot})_{\varphi_j^{\cdot}=\omega_j} < 0$$

Так как в большинстве случаев характер экстремума функции $L_0(q)$ определяется ее второй вариацией $\delta^2 L_0$, то достаточные условия устойчивости движения (1.8) для всех рассмотренных выше случаев сводятся практически к определенной отрицательности $\delta^2 L_0$.

4. В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости установившихся движений абсолютно твердого ротора массы m с вертикальной осью, установленной в жестко укрепленных на неподвижном основании упругоподатливых подшипниках, развивающих в общем случае нелинейные реакции. Эта задача, представляющая большой интерес для машиностроения, служила предметом исследований многих авторов (см. библиографию в [1]). Результаты приложимы также в случае плоскопараллельного движения ротора, вращающегося на изотропном безынерционном гибком валу [5].

Предположим [1], что нелинейные реакции опор приводятся к одной равнодействующей $mF(\rho)$, зависящей лишь от радиального перемещения $\rho = O_1O$ оси O ротора и направленной по прямой OO_1 к точке O_1 пересечения плоскости движения центра масс C с осью недеформированных подшипников, причем $F(0) = 0$, производные $dF/d\rho > 0$ и $d^2F/d\rho^2$ непрерывны в пределах допустимых деформаций опор. Точку O_1 принимаем за начало неподвижной системы осей координат O_1xyz с вертикальной осью z; эксцентриситет $e = OC$.

При плоскопараллельном движении свободное твердое тело имеет три степени свободы и для определения его положения достаточно трех независимых переменных. Соответственно будем иметь три уравнения движения ротора, которые могут быть получены из законов движения центра масс (два уравнения) и изменения момента количеств движения относительно центра масс (одно уравнение) [8] или из их линейных комбинаций. Во многих случаях наиболее удобными оказываются уравнения Лагранжа, механический смысл которых зависит от выбора тех или иных координат. Например, если за координаты ротора принять [5] полярные координаты r, θ центра масс C и угол χ между O_1C и эксцентриситетом $e = CO$, так что $\rho^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\chi$, то функция Лагранжа будет равна

$$L = \frac{m}{2}\left[r^{\cdot 2} + r^2\theta^{\cdot 2} + k^2(\theta^{\cdot} + \chi^{\cdot})^2 - 2\int_0^{\rho} F(\rho)\,d\rho\right] \tag{4.1}$$

где k — центральный радиус инерции.

Уравнения Лагранжа движений ротора имеют при этом наиболее простой вид [5] и выражают, соответственно, как легко видеть, теоремы о движении центра масс (в проекции на направление радиуса-вектора r) и о моментах количеств движения относительно точек O_1 и C.

В переменных ρ, φ, ψ, где ρ, φ — полярные координаты точки O, ψ — угол между осью x и прямой OC, функция Лагранжа [1]

$$L = \frac{m}{2}\Big[\rho^{\cdot 2} + \rho^2\varphi^{\cdot 2} + 2e\psi^{\cdot}(\rho\varphi^{\cdot}\cos(\psi - \varphi) - \\ - \rho^{\cdot}\sin(\psi - \varphi)) + k_0^2\psi^{\cdot 2} - 2\int_0^{\rho} F(\rho)\,d\rho\Big] \tag{4.2}$$

где k_0 — радиус инерции для точки O. Уравнения Лагранжа в этих переменных выражают теорему о движении центра масс (в проекции на направление радиуса-вектора ρ), следствие этой теоремы

(4.3) $$d/dt\,(\boldsymbol{\rho} \times m\mathbf{v}_c) - \mathbf{v}_0 \times m\mathbf{v}_c = 0$$

и теорему о моменте количеств движения относительно точки O

(4.4) $$d\mathbf{G}_0/dt + \mathbf{v}_0 \times m\mathbf{v}_c = 0$$

где $\mathbf{v}_c$, $\mathbf{v}_0$ — скорости точек C и O, $\mathbf{G}_0$ — момент количеств движения относительно точки O.

Ни одна из координат ρ, φ, ψ не является циклической, тем не менее уравнения движения имеют интеграл площадей

(4.5) $$\partial L/\partial\varphi^{\cdot} + \partial L/\partial\psi^{\cdot} = m\,[\rho^2\varphi^{\cdot} + e\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot})\,\rho\cos(\psi - \varphi) - e\rho^{\cdot}\sin(\psi - \varphi) + k_0{}^2\psi^{\cdot}] = \mathrm{const}$$

вследствие очевидного равенства $\partial L/\partial\varphi + \partial L/\partial\psi = 0$. Этот интеграл (в векторной форме) следует также из уравнений (4.3), (4.4): складывая их, получаем интеграл

$$\mathbf{G}_{O_1} = \mathbf{G}_0 + \boldsymbol{\rho} \times m\mathbf{v}_c = \mathrm{const}$$

эквивалентный (4.5). Здесь $\mathbf{G}_{O_1}$ — момент количеств движения относительно точки O_1.

Переменные φ, ψ входят в функцию (4.2) лишь в виде разности $\theta = \psi - \varphi$, поэтому одну из них естественно заменить переменной θ, тогда другая из переменных φ, ψ станет циклической координатой. Так, если за координаты ротора принять ρ, θ, ψ, то координата ψ будет циклической и ей соответствует первый интеграл, аналогичный (4.5). Уравнение Лагранжа для переменной ψ выражает при этом, в отличие от уравнения (4.4), теорему о моменте количеств движения относительно точки O_1. Если за координаты ротора принять переменные ρ, θ, $\xi = \psi - \omega t$, то функция (4.2) примет вид

(4.6) $$L = \frac{m}{2}\Big[\rho^{\cdot 2} + \rho^2(\xi^{\cdot} + \omega - \theta^{\cdot})^2 + 2e(\xi^{\cdot} + \omega)(\rho(\xi^{\cdot} + \omega - \theta^{\cdot}) \times \cos\theta - \rho^{\cdot}\sin\theta) + k_0{}^2(\xi^{\cdot} + \omega)^2 - 2\int_0^{\rho} F(\rho)\,d\rho\Big]$$

Уравнение Лагранжа для переменной ξ приводит к интегралу площадей

(4.7) $$\partial L/\partial\xi^{\cdot} = m\,[\rho^2\,(\xi^{\cdot} + \omega - \theta^{\cdot}) + e\,(\rho\,(2\,(\xi^{\cdot} + \omega) - \theta^{\cdot})\cos\theta - \rho^{\cdot}\sin\theta) + k_0{}^2\,(\xi^{\cdot} + \omega)] = mc = \mathrm{const}$$

эквивалентному (4.5), а уравнения для ρ и θ имеют тот же смысл, что и в переменных ρ, φ, ψ.

5. Рассмотрим движение ротора в отсутствие диссипативных сил при условии приложения к его оси момента сил вида (2.2), обеспечивающего постоянство собственной угловой скорости вращения $\psi^{\cdot} = \omega$ ($\xi^{\cdot} = 0$), где ω — заданная постоянная. Нетрудно видеть, что момент

(5.1) $$\dot{M} = meF\,(\rho)\sin\theta$$

обеспечивает требуемое условие.

Из (4.6) видно, что функция $L_0(q)$ для ротора равна

(5.2) $$L_0(\rho, \theta) = \frac{m}{2}\left[(\rho^2 + 2e\rho\cos\theta)\,\omega^2 - 2\int\limits_0^\rho F(\rho)\,d\rho\right]$$

Уравнения вида (2.4) имеют решение

(5.3) $$\rho = r, \ \theta = \gamma$$

при условии, что постоянные r, γ удовлетворяют уравнениям

(5.4) $$\omega^2(r + e\cos\gamma) = F(r), \ \sin\gamma = 0$$

Уравнения (5.4) исследованы в [1]. Из второго уравнения (5.4) находятся значения $\gamma = 0, \pi$, которым отвечают две формы установившихся движений ротора, в которых точки O_1, O, C находятся на одной прямой, вращающейся вокруг O_1 с угловой скоростью ω. При $\gamma = 0$ точка O находится между точками O_1 и C, а при $\gamma = \pi$ точка C находится между точками O_1 и O. Примерный вид амплитудно-частотной характеристики

(5.5) $$\omega^2 = F(r)/(r \pm e)$$

изображен на фиг. 1 статьи [1], причем скелетная кривая

$$\omega = \varkappa(r), \ \varkappa^2(r) = F(r)/r$$

разделяет кривую (5.5) на левую ($\gamma = 0$) и правую ($\gamma = \pi$) ветви; верхний знак в (5.5)—(5.7) отвечает левой ветви, нижний — правой. Из (5.4) выводятся уравнения, определяющие координаты точки бифуркации K, в которой касательная к кривой (5.5) параллельна оси r

(5.6) $$(r \pm e)\,F'(r) = F(r), \ \omega^2 = F'(r)$$

В работе [1] устойчивость движения (5.3) исследована в первом приближении. Исследуем ее в силу полных уравнений. Согласно результатам п. 2, условия определенной отрицательности второй вариации функции (5.2) для решения (5.3)

(5.7) $$F'(r) > \omega^2, \quad \mp mer\,\omega^2 < 0$$

представляют собою достаточные условия устойчивости движения (5.3) ротора по отношению к переменным ρ, θ, $\rho^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\theta^{\boldsymbol{\cdot}}$.

Неравенства (5.7) могут выполняться лишь для всей левой ветви кривой (5.5) ($\gamma = 0$), если на ней нет точки бифуркации K (случай жесткой характеристики), или на части этой ветви от начала координат до точки K, если она имеется на этой ветви (в случае мягкой характеристики). На правой ветви ($\gamma = \pi$) второе из неравенств (5.7) не выполняется, оно имеет для всех точек этой ветви противоположный знак; для тех точек второй ветви, для которых первое из неравенств (5.7) также имеет противоположный знак, возможна гироскопическая стабилизация, которая в первом приближении действительно имеет место [1].

Если на ротор в возмущенном движении действуют диссипативные силы с полной диссипацией, производные от определенно-отрицательной по $x_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ функции Релея $2f(x_1, x_2, x_1^{\boldsymbol{\cdot}}, x_2^{\boldsymbol{\cdot}})$, где $x_1 = \rho - r$, $x_2 = \theta - \gamma$, то устойчивое при условиях (5.7) движение (5.3) становится асимптотически устойчивым, а гироскопическая стабилизация разрушается.

Аналогичное влияние на устойчивость движения ротора оказывает и сила сопротивления, пропорциональная скорости радиального перемещения центра O ротора, возникающая вследствие деформации подшипников качения [9]. В этом случае диссипативная функция имеет вид $2f(\rho^{\boldsymbol{\cdot}}) = -m\mu\rho^{\boldsymbol{\cdot}2}$, $\mu > 0$ и для обеспечения условия $\psi^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega$ двигатель должен развивать момент, отличающийся от выражения (5.1) добавлением слагаемого $me\mu\rho^{\cdot}\sin\theta$. Уравнения установившихся движений при этом имеют по-прежнему вид (5.4) и условия определенной отрицательности $\delta^2 L_0$ приводятся к неравенствам (5.7). Множество $f(\rho^{\cdot}) = 0$ есть $\rho^{\cdot} = 0$, т. е. $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$, и уравнения движения ротора принимают вид

$$\rho_0 (\omega - \theta^{\cdot})^2 + \omega^2 e \cos\theta = F(\rho_0), \quad \rho_0 \theta^{\cdot\cdot} + \omega^2 e \sin\theta = 0 \tag{5.8}$$

Эти уравнения в общем случае $\theta^{\cdot} \neq 0$ несовместны, так как из первого имеем

$$\theta^{\cdot} = \omega \mp \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \sqrt{F(\rho_0) - \omega^2 e \cos\theta}$$

а второе в результате интегрирования дает

$$\theta^{\cdot} = \pm \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \sqrt{2\omega^2 e \cos\theta + C}$$

где C — постоянная интегрирования. Отсюда следует, что уравнения (5.8) не имеют решений $\rho_0 = \mathrm{const}$ при $\theta^{\cdot} \neq 0$; если же $\theta^{\cdot} = 0$, $\theta = \gamma$, $\rho = \rho_0$, то постоянные ρ_0, γ должны удовлетворять уравнениям

$$\omega^2 (\rho_0 + e\cos\gamma) = F(\rho_0), \quad \sin\gamma = 0$$

совпадающим с уравнениями (5.4). Следовательно, множество $f(\rho^{\cdot}) = 0$ не содержит целых возмущенных движений, кроме (5.3). На основании теоремы Барбашина — Красовского заключаем, что при условиях (5.7) движение (5.3) ротора при действии диссипативной силы $-m\mu\rho^{\cdot}$ становится асимптотически устойчивым по отношению к ρ, θ, $\rho^{\cdot}$, θ; при невыполнении этих условий, когда одно или оба из неравенств (5.7) имеют противоположные знаки, движение (5.3) неустойчиво согласно теореме Красовского [7].

Откажемся теперь от предположения о постоянстве собственной угловой скорости вращения $\psi^{\cdot}$ и рассмотрим случай, когда двигатель развивает момент $mM(\psi^{\cdot})$, а диссипативные силы отсутствуют [1]. Уравнения (2.4) имеют при этом вид (5.4), а уравнения (3.7) сводятся к одному уравнению

$$M(\omega) = 0 \tag{5.9}$$

причем правая часть уравнения вида (3.8) будет равна $(dM/d\psi^{\cdot})_0 \xi^{\cdot 2}$. Видно, что при $\xi^{\cdot} = 0$ уравнения возмущенного движения ротора не допускают целых движений, кроме (5.3). Следовательно, при условии

$$(dM/d\psi^{\cdot})_0 < 0 \tag{5.10}$$

движение (5.3) ротора будет или асимптотически устойчивым по отношению к переменным ρ, θ, $\rho^{\cdot}$, $\theta^{\cdot}$, $\xi^{\cdot}$, если выполняются неравенства (5.7), или неустойчивым, если одно или оба из неравенств (5.7) имеют противоположные знаки.

Отметим, что при условии (5.10) двигатель с моментом $M(\psi^{\cdot})$ в возмущенном движении оказывает воздействие, аналогичное действию диссипативной по $\xi^{\cdot}$ силы, чем объясняется дестабилизирующее влияние [1] такого двигателя по сравнению с двигателем, обеспечивающим постоянство скорости $\psi^{\cdot} = \omega$: диссипативные силы разрушают гироскопическую стабилизацию.

Рассмотрим в заключение случай, когда двигатель выключен и силы сопротивления отсутствуют [5, 8]. Из интеграла (4.7) находим

$$\xi^{\cdot} = -\omega + \frac{c + \rho(\rho + e\cos\theta)\,\theta^{\cdot} + e\rho^{\cdot}\sin\theta}{\rho^2 + 2e\rho\cos\theta + k_0^2}$$

и по методу Рауса игнорирования циклических координат определяем измененную потенциальную энергию

$$W(\rho, \theta) = \frac{mc^2}{2(\rho^2 + 2e\rho\cos\theta + k_0^2)} + m\int_0^\rho F(\rho)\,d\rho \tag{5.11}$$

Уравнения стационарных движений ротора $\partial W/\partial\rho = 0$, $\partial W/\partial\theta = 0$ допускают решение (5.3) при условиях

$$-\frac{c^2(r + e\cos\gamma)}{(r^2 + 2er\cos\gamma + k_0^2)^2} + F(r) = 0, \quad \sin\gamma = 0$$

которые при значении постоянной интеграла (4.7)

$$c = \omega\,(r^2 + 2\,er\cos\gamma + k_0^2)$$

принимают вид (5.4). Условия изолированного минимума функции (5.11), преобразованные с учетом последнего равенства

$$F'(r) + \omega^2\,\frac{3r^2 \pm 6re - k_0^2 + 4e^2}{r^2 \pm 2re + k_0^2} > 0, \quad \pm\omega^2 er > 0 \tag{5.12}$$

являются достаточными условиями устойчивости рассматриваемого стационарного движения ротора по отношению к переменным ρ, θ, $\rho^{\cdot}$, $\theta^{\cdot}$, $\xi^{\cdot}$. Условия (5.12) могут выполняться лишь для первого режима стационарного движения, когда $\gamma = 0$. Отметим [2], что если выполнены условия (5.7), то выполняются и условия (5.12).

Автор благодарит Д. Р. Меркина за обсуждение статьи и высказанные ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 378—384.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости равномерных вращений механических систем.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 6, с. 113—121.
3. *Пожарицкий Г. К.* Об устойчивости диссипативных систем.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 503—512.
4. *Степанов С. Я.* О соотношении условий устойчивости при трех различных режимах циклических движений в системе.— В кн.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. Казань: Изд-е Казан. авиац. ин-та, 1976, т. 2, с. 303—308.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
6. *Румянцев В. В.* Некоторые задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972, с. 429—436.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. *Ишлинский А. Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука, 1981. 191 с.
9. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1981, т. 257, № 2, с. 298—301.

Москва

Поступила в редакцию 18.VI.1986