Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 62—50

О СИНТЕЗЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Красовский Н. Н.

Рассматривается задача об управлении при условии минимума гарантированного результата для системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением при неконтролируемой помехе. Используются понятия и постановка задачи из книги [1]. Устанавливается, что при формировании оптимального управления методом программного стохастического синтеза [1—3] экстремальный сдвиг на сопутствующую точку [1, 4] можно свести к экстремальному сдвигу против градиента подходящей функции. Это проясняет связь программного стохастического синтеза с обобщенным уравнением типа Гамильтона—Якоби [5, 6] в теории дифференциальных игр.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$x^\cdot = A(t)\,x + f(t, u, v),\ u \in P,\ v \in Q,\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор объекта, u — r-мерный вектор управления, v — s-мерный вектор помехи, $A(t)$ — непрерывная матрица-функция, $f(t, u, v)$ — непрерывная вектор-функция, P и Q — компакты.

$$\gamma = \int\limits_{[t_*, \vartheta]} \sigma(t, x[t])\,\mu(dt) + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \chi(t, u[t], v[t])\,dt \tag{1.2}$$

Задан функционал, который характеризует качество процесса на отрезке $[t_*, \vartheta] \subset [t_0, \vartheta]$. Здесь $\sigma(t, x)$ и $\chi(t, u, v)$ — скалярные непрерывные функции; функция $\sigma(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица и выпукла по x; $\mu(T)$ — борелевская мера на множествах $T \subset [t_0, \vartheta]$.

Рассматриваются движения $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t], t_* \leqslant t \leqslant \vartheta\}$, лежащие в заданной ограниченной области G пространства $\{t, x\}$. Область G определена при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, замкнута и удовлетворяет следующему условию [1, с. 37—42]. При каждой исходной позиции $\{t_*, x_*\} \in G$ всякое возможное движение $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ удовлетворяет включению $\{t, x[t]\} \in G$ при всех $t \in [t_*, \vartheta]$. Задача состоит в построении оптимальной стратегии $u^\circ(\cdot) = \{u^\circ(t, x, \varepsilon), \{t, x\} \in G, \varepsilon > 0\}$, которая дает минимальный гарантированный результат $\rho^\circ(t_*, x_*)$.

Такая стратегия существует и в согласии с ее определением удовлетворяет следующему условию [1, с. 67—81]. Для любого числа $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon(\zeta) > 0$ и функция $\delta(\zeta, \varepsilon) > 0$, такие, что закон управления

$$U = \{u^\circ(\cdot), \varepsilon, \Delta\{t_i\}\} \tag{1.3}$$

формирующий движение как решение пошагового дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} x^\cdot[t] = A(t)\,x[t] + f(t, u^\circ(t_i, x[t_i], \varepsilon), v[t]) \\ t_i \leqslant t < t_{i+1},\ i = 1, \ldots, k,\ t_1 = t_*,\ t_{k+1} = \vartheta,\ x[t_*] = x_* \end{gathered} \tag{1.4}$$

гарантирует неравенство $\gamma \leqslant \rho^\circ(t_*, x_*) + \zeta$, какова бы ни была измеримая помеха $v[t_*[\cdot]\vartheta) = \{v[t] \in Q,\ t_* \leqslant t < \vartheta\}$, если только $\varepsilon \leqslant$

$\leqslant \varepsilon(\zeta)$, $\delta \leqslant \delta(\zeta, \varepsilon)$. При этом число $\rho = \rho^\circ(t_*, x_*)$ есть наименьшее из чисел ρ, удовлетворяющих подобному условию.

2. Программный стохастический экстремум. Без ограничения общности примем, что постоянная Липшица λ по x для функции $\sigma(t, x)$ и мера $\mu(T)$ в (1.2) удовлетворяют в области G условиям [1, с. 380] $\lambda \leqslant 1$, $\mu([t_0, \vartheta]) \leqslant 1$. Этого можно добиться изменяя масштаб измерения величины γ и не искажая при этом задачи. Доказано [1, гл. V], что для величины $\rho^\circ(t_*, x_*)$ справедливо равенство

$$\rho^\circ(t_*, x_*) = \sup \beta,\ \beta \in B(t_*, x_*) \tag{2.1}$$

где множество $B(t_*, x_*)$ чисел β определено так:

$$B(t_*, x_*) = \{\beta\colon \sup_\Delta e(t_*, \{x_*, 0\}, \Delta, \beta) > \beta\} \tag{2.2}$$

Здесь фигурирует $(n+1)$-мерный вектор $\{x, z_{n+1}\} = z = \{z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}\}$, Первые n координат вектора z составляют вектор $x = \{x_1, \ldots, x_n\} = \{z_1, \ldots, z_n\}$. В (2.2) $x = x_*$, $z_{n+1} = 0$. Символ Δ означает разбиение $\Delta\{\tau_j\}$ отрезка $[t_*, \vartheta]$ точками τ_j, $j = 1, \ldots, k$, $\tau_1 = t_*$, $\tau_{k+1} = \vartheta$, k — какое-либо натуральное число.

Величина $e(t_*, z_*, \Delta, \beta)$, названная в [1] программным экстремумом, определена равенством

$$e(t_*, z_*, \Delta, \beta) = \sup_{\|l(\cdot)\| \leqslant 1} \{\varkappa(t_*, z_*, \Delta\{\tau_j\}, \beta, l(\cdot))\} + \beta \tag{2.3}$$

Здесь $l(\cdot) = \{l(\tau, \omega) = l[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k],\ t_* \leqslant \tau \leqslant \vartheta,\ \omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\} \in \Omega\}$ — векторная n-мерная случайная функция. Она определена на вспомогательном вероятностном пространстве $\{\Omega, F, \mathbf{P}\}$; ξ_j $(j = 1, \ldots, k)$ — независимые в совокупности случайные величины, каждая из которых распределена равномерно на полуинтервале $0 \leqslant \xi_j < 1$. Величина $\| l(\cdot) \|$ есть какая-либо подходящая норма для $l(\cdot)$ на прямом произведении пространств $\{[t_0, \vartheta], B^T, \mu\} \otimes \{\Omega, F, \mathbf{P}\}$.

Например, для определенности примем

$$\| l(\cdot) \| = \Big(\int\limits_{[t_*, \vartheta]} \int\limits_{\Omega} | l[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_k] |^2 d\xi_1 \ldots d\xi_k \, d\tau \Big)^{1/2} \tag{2.4}$$

где $| l |$ — евклидова норма вектора l. Величина $\varkappa$ в (2.3) определена равенством

$$\begin{aligned} \varkappa(t_*, z_*, \Delta\{\tau_j\}, \beta, l(\cdot)) &= \langle s_* \cdot x_* \rangle + z_{*n+1} + \\ &+ \int\limits_{t_*}^{\vartheta} M\{\min_{u \in P} \max_{v \in Q} [\langle s(\tau, \omega) \cdot f(\tau, u, v) \rangle + \chi(\tau, u, v)]\} \, d\tau - \\ &- \sup_{r(\cdot) \in R_\beta} M \Big\{ \int\limits_{[t_*, \vartheta]} \langle l(\tau, \omega) \cdot w(\tau, \omega) \rangle \mu(d\tau) + r_{n+1}(\omega) \Big\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь символ $\langle \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов, $M\{\ldots\}$ — математическое ожидание в пространстве $\{\Omega, F, \mathbf{P}\}$. Вектор s_* определен равенством

$$s_* = \int\limits_{[t_*, \vartheta]} M\{X'[\eta, t_*] \, l(\eta, \omega)\} \, \mu(d\eta) \tag{2.6}$$

где $X[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения $dx/dt = A(t)x$; штрих означает транспонирование. Случайная вектор-функция $s(\tau, \omega)$ определена равенством

$$s(\tau, \omega) = M\Big\{ \int\limits_{[\tau, \vartheta]} X'[\eta, \tau] \, l(\eta, \omega) \, \mu(d\tau) \,|\, \xi_1, \ldots, \xi_j \Big\} \tag{2.7}$$
$$\tau_j \leqslant \tau < \tau_{j+1},\quad j = 1, \ldots, k$$

где $M\{\ldots \mid \xi_1, \ldots, \xi_j\}$ — условное математическое ожидание по $\xi_1, \ldots, \xi_j$. Символ R_β означает множество векторных $(n+1)$-мерных случайных функций

$$r(\cdot) = \{r(\tau, \omega) = \{r_1(\tau, \omega), \ldots, r_n(\tau, \omega); \quad r_{n+1}(\omega)\} = \\ = \{w(\tau, \omega); r_{n+1}(\omega)\}, t_* \leqslant \tau \leqslant \vartheta, \omega \in \Omega\}$$

стесненных условием

$$\int\limits_{[t_*, \vartheta]} \sigma(\tau, w(\tau, \omega)) \mu(d\tau) + r_{n+1}(\omega) \leqslant \beta$$

при почти всех $\omega \in \Omega$.

3. Аппроксимация оптимального гарантированного результата. Введем вектор-функцию

(3.1) $$m[\tau] = M\{l(\tau, \omega)\}, \quad t_* \leqslant \tau \leqslant \vartheta$$

Положим

(3.2) $$l(\tau, \omega) = m[\tau] + b(\tau, \omega)$$

Подставляя выражение для $l(\tau, \omega)$ (3.2) в (2.3)—(2.7) и учитывая (3.1), получим

(3.3) $$\sup_\Delta e(t_*, z_*, \Delta, \beta) = \\ = \max_{\|m[\cdot]\| \leqslant 1} (\langle s_*(t_*, m[\cdot]) x_* \cdot \rangle + z_{*n+1} + \varkappa^*(t_*, m[\cdot], \beta))$$

Здесь в согласии с (2.4) норма $\| m[\cdot] \|$ определена равенством

(3.4) $$\| m[\cdot] \| = \Big(\int\limits_{[t_*, \vartheta]} | m[\tau]|^2 \mu(d\tau)\Big)^{1/2}$$

Функционал $\langle s_*(t_*, m[\cdot]) \cdot x_* \rangle$ — линейный по $m[\cdot]$. Функционал $\varkappa^*(t_*, m[\cdot], \beta)$ — вогнутый по $m[\cdot]$. Этот важный факт, вытекающий из стохастической природы функций $l(\cdot)$, доказывается рассуждениями, подобными приведенным ранее [1, с. 311—314].

Пусть

$$\lambda^* = \max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta} \max_{|x|=1} | A(\tau) x |$$

Рассмотрим в пространстве $\{z\}$ область

$$K(t_*, x_*, \varepsilon) = \{z: | w - x_* |^2 + z_{n+1}^2 \leqslant \alpha^2(t_*, \varepsilon)\}$$
$$(\alpha(\tau, \varepsilon) = (\varepsilon + \varepsilon \exp 2\lambda^*(\tau - t_0))^{1/2})$$

Построим величину

(3.5) $$\rho(t_*, x_*, \varepsilon, \beta) = \min_{z \in K} \sup_\Delta e(t_*, z, \Delta, \beta) = \min_{z \in K} \max_{\|m[\cdot]\| \leqslant 1} (\langle s_*(t_*, m[\cdot]) \cdot \\ \cdot w \rangle + z_{n+1} + \varkappa^*(t_*, m[\cdot], \beta)), \; z = \{w, z_{n+1}\}$$

Вследствие линейности $s_*(t_*, m[\cdot])$ и вогнутости $\varkappa^*(t_*, m[\cdot], \beta)$ по $m[\cdot]$ и линейности $\langle s_*(t_*, m[\cdot]) \cdot w \rangle$ по w операции минимума по $z = \{w, z_{n+1}\}$ и максимума по $m[\cdot]$ в (3.5) можно переставить. Поэтому получаем равенство

(3.6) $$\rho(t_*, x_*, \varepsilon, \beta) = \max_{\|m[\cdot]\| \leqslant 1} (\langle s_*(t_*, m[\cdot]) \cdot x_* \rangle - \\ - \alpha(t_*, \varepsilon)[1 + | s_*(t_*, m[\cdot]) |^2]^{1/2} + \varkappa^*(t_*, m[\cdot], \beta))$$

Максимизируемая величина вогнута по $m[\cdot]$ и строго вогнута по $s_*(t_*, m[\cdot])$. Поэтому при фиксированных t_*, x_*, ε и β вектор $s^\circ(t_*, x_*, \varepsilon, \beta) = s_*(t_*, m^\circ[\cdot])$, отвечающий той или иной максимизирующей функции $m^\circ[\cdot]$, определяется однозначно. Определим величину $\beta(t_*, x_*, \varepsilon)$ как верхнюю грань

$$(3.7)\qquad \beta(t_*, x_*, \varepsilon) = \sup \beta, \quad \beta \in B(t_*, x_*, \varepsilon)$$

где множество $B(t_*, x_*, \varepsilon)$ определено условием

$$(3.8)\qquad B(t_*, x_*, \varepsilon) = \{\beta\colon \rho(t_*, x_*, \varepsilon, \beta) > \beta\}$$

Число $\beta(t_*, x_*, \varepsilon)$ можно искать как наименьший корень уравнения $\rho(t_*, x_*, \varepsilon, \beta) = \beta$.

Рассмотрим функцию

$$(3.9)\qquad \rho^*(t_*, w, x_*, \varepsilon) = \rho(t_*, w, \varepsilon, \beta(t_*, x_*, \varepsilon))$$

При фиксированных t_*, x_* и ε она имеет градиент $\operatorname{grad}_w \rho^*(t_*, w, x_*, \varepsilon)$, этот градиент непрерывен по w и справедливо равенство

$$(3.10)\qquad \operatorname{grad}_w \rho^*(t_*, w, x_*, \varepsilon) = s^\circ(t_*, w, \varepsilon, \beta(t_*, x_*, \varepsilon))$$

Данные утверждения доказываются исходя из выражений (3.6) — (3.9) с учетом единственности вектора $s^\circ(t_*, w, \varepsilon, \beta(t_*, x_*, \varepsilon))$.

Обозначим $z^\circ(t_*, x_*, \varepsilon)$ сопутствующую точку [1, с. 209], в которой величина $\rho^\circ(t_*, w) + z_{n+1}$ достигает минимума в области $K(t_*, x_*, \varepsilon)$. Из соотношений (2.1), (2.2) и из приведенных выкладок выводится, что $(n+1)$-мерный вектор

$$(3.11)\qquad p^\circ(t_*, x_*, \varepsilon) = \{x_*, 0\} - z^\circ(t_*, x_*, \varepsilon)$$

который соединяет точку $z^\circ(t_*, x_*, \varepsilon)$ с точкой $\{x_*, 0\}$, связан с вектором $s^\circ(t_*, x_*, \varepsilon, \beta(t_*, x_*, \varepsilon))$ равенством

$$(3.12)\qquad p^\circ(t_*, x_*, \varepsilon) = \alpha(t_*, \varepsilon)\{s^\circ(t_*, x_*, \varepsilon, \beta(t_*, x_*, \varepsilon)), 1\} \times \\ \times (1 + |s^\circ(t_*, x_*, \varepsilon, \beta(t_*, x_*, \varepsilon))|^2)^{-1/2}$$

Оптимальное управление $u^\circ(t_i, x[t_i], \varepsilon)$ можно формировать по закону U (1.3), который [1, с. 231] означает экстремальный сдвиг на сопутствующую точку $z^\circ(t_i, x[t_i], \varepsilon)$. Вследствие (3.12) это сводится к экстремальному сдвигу против вектора

$$\{s^\circ(t_i, x[t_i], \varepsilon, \beta(t_i, x[t_i], \varepsilon)), 1\} = \{[\operatorname{grad}_w \rho^*(t_i, w, x[t_i], \varepsilon)]_{w=x[t_i]}, 1\}$$

Таким образом, приходим к следующему заключению.

Оптимальная минимаксная стратегия $u^\circ(t, x, \varepsilon)$, которая дает минимальный гарантированный результат $\rho^\circ(t_*, x_*)$ для всякой исходной позиции $\{t_*, x_*\} \in G$, может быть построена как функция $u^\circ(t, x, \varepsilon)$, которая удовлетворяет условию экстремального сдвига против вектора $\{[\operatorname{grad}_w \rho^*(t, w, x, \varepsilon)]_{w=x}, 1\}$, т. е.— из условия

$$(3.13)\qquad \max_{v \in Q} \{\langle [\operatorname{grad}_w \rho^*(t, w, x, \varepsilon)]_{w=x} \cdot f(t, u^\circ(t, x, \varepsilon), v)\rangle + \\ + \chi(t, u^\circ(t, x, \varepsilon), v)\} = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \{\langle [\operatorname{grad}_w \rho^*(t, w, x, \varepsilon)]_{w=x} \cdot \\ \cdot f(t, u, v)\rangle + \chi(t, u, v)\}$$

4. **Примечания.** Во многих конкретных задачах удается находить максимизирующее разбиение $\Delta\{\tau_j^\circ\}$, на котором в (3.3) достигается верхняя грань по Δ. Тогда построение функции $\rho^*(t, w, x, \varepsilon)$ или нужного ее градиента $[\operatorname{grad}_w \rho^*(t, w, x, \varepsilon)]_{w=x}$ облегчается. Если разбиение $\Delta\{\tau_j^\circ\}$, на котором достигается верхняя грань в (3.3), не просматривается, то при практическом построении оптимальных управляющих воздействий $u^\circ[t_i] = u^\circ(t_i, x[t_i], \varepsilon)$ нет нужды доводить вычисление функции $\rho^*(t, w, x, \varepsilon)$ до вычисления этой верхней грани по Δ. Можно ограничиться выбором разбиения $\Delta\{\tau_j^*\}$ с достаточно малым шагом $\tau_{j+1}^* - \tau_j^* \leqslant \delta$, потому что доказывается, что

всякая последовательность разбиений $\Delta\{\tau_j^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ с шагом $\delta \xrightarrow{(k)} 0$ при $k \to \infty$ является максимизирующей для задачи (3.3). Также и верхнюю грань по числам β в (3.7), (3.8) можно вычислять приближенно.

Описанную процедуру вычисления управляющих воздействий $u^\circ[t_i]$ часто можно существенно упростить подбирая подходящую норму $\| l(\cdot) \|$ для функции $l(\cdot)$ и соответственно подходящую норму для функции $m[\cdot]$. Так, например, если величина

$$\mathrm{vraimax}_\omega \left[\int\limits_{[t_*, \vartheta]} \sigma(\tau, w(\tau, \omega))\, \mu(d\tau) + | r_{n+1}(\omega) | \right]$$

имеет смысл нормы в пространстве R случайных вектор-функций $r(\tau, \omega) = \{w(\tau, \omega), r_{n+1}(\omega)\}$, то ограничение на $l(\cdot)$ в задаче на максимум по $l(\cdot)$ определяется нормой, сопряженной к норме в R. Это может оказаться удобным еще и потому, что в таком случае величина β вообще может исчезнуть из выкладок. Тогда и функция $\rho^*(t, w, x, \varepsilon)$ упрощается, так как в ней может исчезнуть аргумент x на третьем месте. Вообще, исключение величины β из выкладок удается удобно достигнуть во многих случаях, когда функция $\sigma(t, x)$ однородна по x. Тогда ограничение на функцию $l(\cdot)$ в соответствующей задаче максимизации может оказаться удобным выбирать как ограничение на подходящий сопряженный функционал от $l(\cdot)$.

Описанную процедуру удобно применять и в тех случаях, когда $\chi(t, u, v) \equiv 0$. Введение дополнительной координаты z_{n+1} регуляризирует задачу. После перестановки операций минимума и максимума в (3.5), (3.6) разрешающий вектор $s^\circ(t_*, w, x_*, \varepsilon, \beta)$ из правой части (3.10) оказывается единственным. Это определяет дифференцируемость функции $\rho^*(t_*, w, x_*, \varepsilon)$ (3.9) по w и дает равенство (3.10).

Следует подчеркнуть, что определение оптимальной максиминной контрстратегии $v^\circ(t, x, u, \varepsilon)$ из условия экстремального сдвига по вектору $\{[\mathrm{grad}_w \rho^*(t, w, x, \varepsilon)]_{w=x}, 1\}$ вообще говоря, уже не является корректным, если цена $\rho^\circ(t, x)$ рассматриваемой дифференциальной игры не дифференцируема по x. В таких случаях оптимальные контрдействия $v^\circ[t] = v^\circ(t_i, x[t_i], u[t], \varepsilon)$ можно строить опираясь на оптимальные максиминные неупреждающие стохастические программы, которые извлекаются из решения задачи о вычислении программного экстремума $e(\cdot)$ [1, с. 420].

Наконец, отметим связь метода стохастического синтеза с построением выпуклых оболочек для функций или функционалов, которые фигурируют в п. 3. Эта связь позволяет организовать процедуры вычисления величины $\varkappa^*$, основанные на рекурентном построении упомянутых выпуклых оболочек функционалов. В ряде случаев такие процедуры оказываются работоспособными. Однако, в общем случае их трудно считать эффективными, так как построение выпуклых оболочек функционалов или функций составляет практически трудную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 519 с.
2. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* Одна задача оптимального управления на минимум гарантированного результата.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 2, с. 6—23.
3. *Третьяков В. Е.* Программный синтез в стохастической дифференциальной игре.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 2, с. 297—300.
4. *Красовский А. Н.* Нелинейная дифференциальная игра с интегральной платой.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1306—1312.
5. *Субботин А. И., Субботина Н. Н.* Свойства потенциала дифференциальной игры.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 204—211.
6. *Субботин А. И., Тарасьев А. М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры.— Докл. АН СССР, 1985, т. 283, № 3, с. 559—564.

Свердловск

Поступила в редакцию
26.VI.1986