Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 539.374

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ МИКРОДЕФОРМАЦИИ

Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Черняков Ю. А.

Устанавливается взаимосвязь теории пластичности и ползучести типа [1, 2] с теориями, основанными на концепции скольжения. Предлагается наиболее рациональная структура определяющих уравнений теории, удобная для инженерных расчетов.

Было показано [3], что теория скольжения [4] вытекает из теории [1, 2]. Однако оставалось неясным, существует ли более глубокая связь между этими теориями. Кроме того, связь теорий ползучести, построенных на основе подхода [1, 2], с теориями ползучести, основанными на концепции скольжения, вообще не рассматривалась. Очерк о путях развития теории деформирования поликристаллов [5] дает полное представление о положении дел в теории пластичности и ползучести.

1. Рассмотрим теорию пластичности [1, 2], предложенную для исследования пластического деформирования поликристаллических металлов и основанную на предположении, что статистика анизотропных кристаллов может быть заменена статистикой изотропных частиц, обладающих различными пределами текучести и случайным полем начальных микронапряжений и деформаций.

Теория пластичности строится на основе следующих положений.

1°. Формулируется локальный закон пластического течения, связывающий напряжения и деформации; этот закон содержит один или несколько случайных параметров.

2°. Совместная функция распределения случайных параметров считается заданной и определяется с учетом экспериментальных данных.

3°. Предполагаются справедливыми обобщенные соотношения Кренера, связывающие отклонения напряжений и деформаций. Такие соотношения позволяют связать локальные законы пластического деформирования с макроскопическими законами пластического деформирования.

При активном пластическом деформировании определяющие уравнения теории можно представить следующим образом [1, 2]:

$$
(1.1)\qquad \begin{gathered}
\langle\sigma_{ij}\rangle = \tau_{ij} + m\varepsilon_{ij}{}^p + \int_0^\infty \int_\Omega R(\tau, \tau', \lambda_{ij}, \lambda_{ij}')\,\varepsilon_{ij}{}^p(\tau', \lambda_{ij}')\,d\Omega'\,dD(\tau') \\
\tau_{ij} = \tau\mu_{ij}, \qquad \mu_{ij} = d\varepsilon_{ij}{}^p/d\lambda \\
\varepsilon_{ij0}^p = \varepsilon_p{}^\circ\lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij}\lambda_{ij} = 1 \\
d\lambda = \sqrt{d\varepsilon_{ij}{}^p\,d\varepsilon_{ij}{}^p}, \qquad \langle\varepsilon_{ij}{}^p\rangle = \int_0^\infty \int_\Omega \varepsilon_{ij}{}^p(\tau', \lambda_{ij}')\,d\Omega'\,dD(\tau')
\end{gathered}
$$

Здесь $\varepsilon_{ij0}{}^\circ$ — случайный тензор начальных микродеформаций, τ — локальный предел текучести, λ_{ij} — направляющий единичный девиатор, фиксирующий направление в девиаторном пространстве, Ω — множество направлений активного микропластического деформирования, $d\Omega'$ — дифференциальная форма («телесный угол» в пятимерном девиаторном пространстве), $\Phi(\tau)$ — интегральная функция распределения локальных пределов текучести, $\langle\ \rangle$ — знак осреднения.

Не останавливаясь здесь на разных вариантах теории (чему посвящены обзоры [6, 7]), отметим, что они дали возможность описать и даже предсказать достаточно тонкие эффекты, наблюдаемые в опытах.

2. Воспользуемся гипотезой [3]: $\mu = \lambda_{ij}$, $\varepsilon_{ij}{}^p = \varepsilon_p\lambda_{ij}$. Фактически она означает следующее. Локальные поверхности текучести плоские, они поступательно перемещаются при активном нагружении; пластические деформации направлены по нормали к плоским поверхностям текучести. Тогда в соответствии с (1.1) имеем

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \tau_{ij} + m\varepsilon_{ij}{}^p(\tau, \lambda_{ij}) + \int_0^\infty \int_\Omega R(\tau, \tau', \lambda_{ij}, \lambda_{ij}') \times \varepsilon_{ij}{}^p(\tau', \lambda_{ij}')\, d\Omega'\, d\Phi(\tau') \tag{2.1}$$

$$\tau_{ij} = \tau\lambda_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}{}^p = \varepsilon_p\lambda_{ij} \tag{2.2}$$

$$\langle\varepsilon_{ij}{}^p\rangle = \int_0^\infty \int_\Omega \varepsilon_{ij}{}^p(\tau', \lambda_{ij}')\, d\Omega'\, d\Phi(\tau') \tag{2.3}$$

Равенство (2.1) имеет место только для тех направлений $\lambda_{ij} \in \Omega$, в которых происходит активное микропластическое деформирование $\varepsilon_p{}^{\boldsymbol{\cdot}} > 0$. Условие течения можно получить из (2.1), если его умножить на λ_{ij} и произвести суммирование с учетом условий (2.2). Оно имеет вид

$$\langle\sigma_{ij}\rangle\,\lambda_{ij} \leqslant \tau + m\varepsilon_p(\tau, \lambda_{ij}) + \int_0^\infty \int_\Omega R_1(\tau, \tau', \lambda_{ij}, \lambda_{ij}') \times \varepsilon_p(\tau', \lambda_{ij}')\, d\Omega'\, d\Phi(\tau') \tag{2.4}$$

$$(R_1 = R\lambda_{ij}\lambda_{ij}')$$

Отметим, что знак равенства в (2.4) достигается для направлений активного микропластического деформирования $\lambda_{ij} \in \Omega$. Удобно ввести новое обозначение

$$\mathrm{T}(\tau, \lambda_{ij}) = \tau + m\varepsilon_p(\tau, \lambda_{ij}) + \int_0^\infty \int_\Omega R_1(\tau, \tau', \lambda_{ij}, \lambda_{ij}') \times \varepsilon_p(\tau', \lambda_{ij}')\, d\Omega'\, d\Phi(\tau') \tag{2.5}$$

Величину $\mathrm{T}(\tau, \lambda_{ij})$ назовем интенсивностью разрешающих напряжений, естественно при этом функцию R_1 назвать функцией влияния.

Интенсивность разрешающих напряжений, как видно из формулы (2.5), зависит не только от величины локальных пластических деформаций (второе слагаемое в (2.5)), но также и от микропластических деформаций остальных частиц посредством функции влияния. В новых обозначениях формула (2.4) примет вид

$$\langle\sigma_{ij}\rangle\,\lambda_{ij} \leqslant T(\tau, \lambda_{ij})$$

В области активного микропластического деформирования можно записать и дифференциальное условие течения

$$\langle\sigma_{ij}{}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle\,\lambda_{ij} = \mathrm{T}^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau, \lambda_{ij})$$

Последние два условия позволяют определить как величину области Ω, находящуюся в активном нагружении, так и интенсивность скоростей микропластических деформаций $\varepsilon_r{}^{\boldsymbol{\cdot}}$.

Отметим, что интенсивность разрешающих напряжений может быть задана и в следующей дифференциальной форме:

$$T^{\cdot}(\tau, \lambda_{ij}) = m_1 \varepsilon^{\cdot}_p(\tau, \lambda_{ij}) + \int_0^\infty \int_\Omega R_2(\tau, \tau', \lambda_{ij}, \lambda_{ij}') \varepsilon_p^{\cdot}(\tau', \lambda_{ij}')\, d\Omega'\, d\Phi(\tau')$$

При известной величине интенсивности скорости микропластической деформации $\varepsilon_p^{\cdot}$ и области направлений активного микропластического деформирования Ω макропластическая деформация определяется по формуле

$$\langle \varepsilon_{ij}^{p\cdot} \rangle = \int_0^\infty \int_\Omega \varepsilon_p^{\cdot}(\tau', \lambda_{ij}')\, d\Omega'\, d\Phi(\tau')$$

Заслуживает отдельного рассмотрения и случай $\langle \tau \rangle = \tau = \tau_0$. Тогда все приведенные соотношения упрощаются и имеют вид

$$(2.6) \qquad \langle \sigma_{ij} \rangle \lambda_{ij} \leqslant T(\lambda_{ij}), \qquad \langle \sigma_{ij}^{\cdot} \rangle \lambda_{ij} = T^{\cdot}(\lambda_{ij})$$

Здесь

$$(2.7) \qquad T(\lambda_{ij}) = T_0 + m\varepsilon_p(\lambda_{ij}) + \int_\Omega R_1(\lambda_{ij}, \lambda_{ij}') \varepsilon_p(\lambda_{ij}')\, d\Omega'$$

или

$$(2.8) \qquad T^{\cdot}(\lambda_{ij}) = m_1 \varepsilon_p^{\cdot}(\lambda_{ij}) + \int_\Omega R_2(\lambda_{ij}, \lambda_{ij}') \varepsilon_p^{\cdot}(\lambda_{ij}')\, d\Omega'$$

$$\langle \varepsilon_{ij}^{p} \rangle = \int_\Omega \varepsilon_p(\lambda_{ij}') \lambda_{ij}' d\Omega', \qquad \langle \varepsilon_{ij}^{p\cdot} \rangle = \int_\Omega \varepsilon_p^{\cdot}(\lambda_{ij}') \lambda_{ij}'\, d\Omega'$$

3. Покажем теперь, что из теории [1, 2] при некоторых дополнительных ограничениях получается ряд известных теорий пластичности, основанных на концепции скольжения. Предположим, что девиатор имеет частное представление

$$(3.1) \qquad \lambda_{ij} = (n_i l_j + n_j l_i)/2$$

где n_i и l_i определяют соответственно нормаль к выделенной в материальном теле площадке и направление на ней. Тогда

$$\langle \sigma_{ij} \rangle \lambda_{ij} = \langle \sigma_{nl} \rangle, \qquad \varepsilon_{ij}^{p} \lambda_{ij} = \varepsilon_p = \gamma_{nl}$$

Здесь $\langle \sigma_{nl} \rangle$ — среднее касательное напряжение на площадке с нормалью n_i в направлении l_i. С учетом сказанного соотношения (2.7), (2.8) запишем в виде

$$(3.2) \qquad \langle \sigma_{nl} \rangle = T_0 + m\gamma_{nl} + \int_\Omega R_1(n_i, n_i', l_i, l_i') \gamma_{nl}(n_i', l_i')\, d\Omega'$$

$$(3.3) \qquad \langle \sigma_{nl}^{\cdot} \rangle = m_1 \gamma_{nl}^{\cdot} + \int_\Omega R_2(n_i, n_i', l_i, l_i') \gamma_{nl}^{\cdot}(n_i', l_i')\, d\Omega'$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. $m = 0, \quad R_1 = \delta(1 - \lambda_{ij}\lambda_{ij}')(\langle \sigma_{nl} \rangle - T_0)/F(\langle \sigma_{nl} \rangle)$

(F — универсальная функция материала).

Тогда из (3.2) получается классический вариант теории скольжения [4]. Недостатки его очевидны — отсутствие влияния сдвигов в одном направлении на изменение сдвигов в других направлениях и, как следствие, невозможность описания эффекта Баушингера и циклического нагружения.

$$2^\circ.\ T_0 = f(\sigma_i), \quad m = f(\sigma_i)\, r_1, \quad \sigma_i = \sqrt{\langle\sigma_{ij}\rangle\langle\sigma_{ij}\rangle}$$

$$R_1 = f(\sigma_i)\,[r_2 l_i l_i' \delta(1 - n_i n_i') + r_3 \lambda_{ij}\lambda_{ij}']$$

В этом случае из (3.2) следует

$$\langle\sigma_{nl}\rangle = f(\sigma_i)\Big[1 + r_1\gamma_{nl} + r_2 \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_{nl} \cos(\omega_0 - \omega)\, d\Omega' + r_3 \langle\gamma_{nl}\rangle\Big]$$

$$\langle\gamma_{nl}\rangle = \langle\varepsilon_{ij}{}^p\rangle \lambda_{ij}$$

где ω_1, ω_2 — границы веера скольжений в плоскости с нормалью n_i, r_1, r_2, r_3 — постоянные материала. Этот вариант теории предложен и развит в работах школы М. Я. Леонова [8, 9]. Указанная теория уже учитывает взаимосвязь сдвигов. Однако описание циклических нагружений встречает серьезные затруднения и, как отмечается в [9], требует введения ряда дополнительных допущений.

3°. Предположим, что $R_1(n_i, n_i', l_i, l_i') = R_3(n_i, n_i')$, $m = 0$. Максимальное значение $\langle\sigma_{nl}\rangle$ при фиксированном направлении n_i имеет значение $\sigma_{ij}n_i s_i/s$, где s_i — вектор касательного напряжения, действующего на площадке с нормалью n_i, s — интенсивность средних касательных напряжений ($s = \sqrt{s_i s_i}$). С учетом сказанного уравнение (3.2) запишем в виде

$$\langle s(n_i)\rangle = s + \int\limits_{\Omega} R_3(n_i, n_i')\, \gamma_{nl}(n_i')\, d\Omega' \tag{3.4}$$

(Ω — область направлений активных сдвигов для различных направлений n_i). Интересно, что при таком подходе ориентация локального сдвига на площадке скольжения совпадает с направлением касательного напряжения, действующего на этой площадке.

Рассмотрим теперь частные случаи представления (3.4). Положим

$$R_3 = \delta(1 - n_i n_i')\, (\langle s(n_i)\rangle - s)\, /\gamma_p\, (\langle s\rangle)$$

тогда из (3.4) приходим к теории А. К. Малмейстера [10, 11].

Если исходными являются соотношения (3.3), то аналогично предыдущему имеем

$$\langle s^{\boldsymbol{\cdot}}(n_i)\rangle = \int\limits_{\Omega} R_3(n_i, n_i')\, \gamma_{nl}^{\boldsymbol{\cdot}}(n_i')\, d\Omega' \tag{3.5}$$

Предположим, что последнее уравнение разрешимо в виде

$$\gamma_{nl}^{\boldsymbol{\cdot}} = \int\limits_{\Omega} L(n_i, n_i')\, \langle s^{\boldsymbol{\cdot}}(n_i)\rangle\, d\Omega' \tag{3.6}$$

Тогда получится вариант теории скольжения, изложенный в [12]. Расчетные примеры, приведенные в работах [10—12], показали, что теория может давать удовлетворительное согласование с опытными данными. Опыты на циклическое знакопеременное нагружение наименее благоприятны для теории.

Для случая плоской деформации можно так построить функцию $R_3(n_i, n_i')$, чтобы система скольжений была плоской [13]. В этом случае приходим к теории Леонова—Швайко [14], которая в дальнейшем была существенно развита в [13].

Таким образом, в рамках общего предлагаемого подхода можно оценить и сопоставить возможности различных вариантов теории скольжения.

4. Конкретизация теории (2.6)—(2.8) зависит от задания функции влияния $R(\lambda_{ij}, \lambda_{ij}')$. Естественно предположить, что структура этой функции имеет простейший вид

$$R(\lambda_{ij}, \lambda_{ij}') = R(\lambda_{ij}\lambda_{ij}') = a_1\delta(1 - \lambda_{ij}\lambda_{ij}') + a_2\lambda_{ij}\lambda_{ij}' + a_3 + a_4\delta(1 + \lambda_{ij}\lambda_{ij}') \tag{4.1}$$

где a_i — универсальные функции материала, зависящие от макромер пластического деформирования, $\delta(1 - \lambda_{ij}\lambda_{ij}')$ — дельта-функция.

Отметим, что случай $a_3 = a_4 = 0$ изучен в [3].

В общем случае определяющее уравнение теории примет вид (при учете (4.1))

$$\langle\sigma_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle\lambda_{ij} = A_1\varepsilon_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda_{ij}) + A_2\langle\varepsilon_{ij}^{p\boldsymbol{\cdot}}\rangle\lambda_{ij} + A_3\int_\Omega \varepsilon_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda_{ij}')\,d\Omega'$$

Введем в рассмотрение девиатор скорости изменения активных напряжений $\langle r_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle = \langle\sigma_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle - A_2\langle\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle$. Тогда получим следующее уравнение для нахождения скорости изменения интенсивности микропластической деформации:

$$A_1\varepsilon_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda_{ij}) + A_3\int_\Omega \varepsilon_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda_{ij}')\,d\Omega' = \lambda_{ij}\langle r_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle$$

(Ω — область активного микропластического деформирования). Решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon_p^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda_{ij}) = \frac{1}{A_1}\lambda_{ij}\langle r_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle - \frac{\mu}{A_1(1+\mu\Omega)}F_{ij}\langle r_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle$$

$$F_{ij} = \int_\Omega \lambda_{ij}'\,d\Omega', \quad \mu = \frac{A_3}{A_1}$$

Отсюда

$$\langle\varepsilon_{ij}^{p}\rangle = \frac{1}{A_1}\left[G_{ijkl} - \frac{\mu}{1+\mu\Omega}F_{ij}F_{kl}\right]\langle r_{kl}^{\boldsymbol{\cdot}}\rangle \tag{4.2}$$

$$G_{ijkl} = \int_\Omega \Lambda_{ij}'\lambda_{ke}'\,d\Omega'$$

Соотношения (4.2) полностью решают задачу построения определяющих уравнений теории микродеформации при известной области Ω направлений активного микропластического деформирования. Для определения же самой области Ω необходимо воспользоваться неравенством (2.6). Очевидно, что для исследования этого неравенства требуется построить выражение для интенсивности разрешающих напряжений $T(\lambda_{ij})$ и детально его проанализировать. Наиболее просто исследуется случай монотонного нагружения и переход к теории течения с комбинированным упрочнением. Предварительные расчеты показали, что приведенный вариант теории достаточно просто описывает сложное нагружение, в том числе и циклическое. Изменение поверхности текучести, особенно ее тыльной части, хорошо отвечает опытным данным.

5. В последние годы активно развиваются теории ползучести, учитывающие микронеоднородность развития пластических деформаций. Возможные подходы к построению теории ползучести в рамках теории [1, 2] приведены в [6, 7]. Теории ползучести, основанные на концепции скольжения, изучались в [9, 15—17]. Не останавливаясь на возможных вариантах построения теории ползучести, приведем здесь модифицированную

теорию микродеформаций, следующую из идей работ [1, 2, 7], и покажем связь такого варианта с теориями ползучести, использующими концепции теории скольжения.

Примем, следуя [7], в качестве основного локального закона несколько модернизированный закон пластического течения, считая, что процесс развивается во времени:

$$\tau_{ij}=\tau\mu_{ij},\quad \mu_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{p}/d\lambda,\quad \tau=\tau_0\psi(\lambda,\lambda^{\cdot}),\ \lambda^{\cdot}=\sqrt{\varepsilon_{ij}^{p\cdot}\varepsilon_{ij}^{p\cdot}} \tag{5.1}$$

$$\rho_{ij}=m\varepsilon_{ij}^{p}+\psi_a(\lambda,\lambda^{\cdot})\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega\int\limits_0^t R(t-t',\tau_0,\tau_0',\lambda_{ij},\lambda_{ij}')\times$$
$$\times\,\varepsilon_{ij}^{p\cdot}(t',\tau_0',\lambda_{ij}')\,dt'\,d\Omega'\,d\Phi(\tau')$$
$$\tau_{ij}=\langle\sigma_{ij}\rangle-\rho_{ij}$$

Отметим, что закон в форме (5.1) учитывает как влияние скорости развития пластической деформации на локальный предел текучести материала, так и наследственные свойства материала. В ряде работ [18, 19] указывается, что заслуживают особого внимания варианты теории, когда локальный предел текучести τ и функция влияния зависят не только от локальных, но и от макроскопических характеристик, таких, как $\langle\lambda\rangle$, $\langle\lambda^{\cdot}\rangle$, Ω. Анализ этих предложений в данной работе не проводится.

Если перейти к простейшему варианту теории, когда $\mu_{ij}=\lambda_{ij}$, $\varepsilon_{ij}^{p}=\varepsilon_p\lambda_{ij}$, то можно получить

$$\mathrm{T}(\tau_0,\lambda_{ij},t)=\tau_0\psi(\varepsilon_p,\varepsilon_p^{\cdot})+m\varepsilon_p(\tau_0,\lambda_{ij},t)+$$
$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega\int\limits_0^t R(t-t',\tau_0,\tau_0',\lambda_{ij},\lambda_{ij}')\,\varepsilon_p^{\cdot}\,dt'\,d\Omega'\,d\Phi(\tau')$$
$$\langle\sigma_{ij}\rangle\lambda_{ij}\leqslant\mathrm{T}(\tau_0,\lambda_{ij},t)$$

При известной функции интенсивности микропластической деформации $\varepsilon_p(t,\tau_0,\lambda_{ij})$ средняя пластическая деформация определяется по формуле (2.3).

Заслуживает внимания и частный случай $\tau_0=\langle\tau_0\rangle=T_0$. Тогда

$$T(t,\lambda_{ij})\geqslant\langle\sigma_{ij}\rangle\lambda_{ij}$$
$$T(t,\lambda_{ij})=T_0\psi(\varepsilon_p,\varepsilon_p^{\cdot})+m\varepsilon_p(t,\lambda_{ij})+$$
$$+\psi_1(\varepsilon_p,\varepsilon_p^{\cdot})\int\limits_\Omega\int\limits_0^t R(t-t',\lambda_{ij},\lambda_{ij}')\,\varepsilon_{ij}^{p'}\,dt'\,d\Omega'$$

Проследим связь теорий типа скольжения с теорией (5.1). Вновь девиатор λ_{ij} примем в частном виде (3.1), тогда из (5.1) находим

$$\langle\sigma_{nl}\rangle=T_{nl}(n_i,l_i,t) \tag{5.2}$$
$$T_{nl}=T_0\psi(\gamma_{nl},\gamma_{nl}^{\cdot})+m\gamma_{nl}+\psi_1(\gamma_{nl},\gamma_{nl}^{\cdot})\times$$
$$\times\int\limits_\Omega\int\limits_0^t R(t-t',n_i,n_i',l_i,l_i')\,\gamma_{nl}'^{\cdot}\,dt'\,d\Omega'$$
$$\langle\varepsilon_{ij}^{p}\rangle=\int\limits_\Omega\gamma_{nl}'\lambda_{ij}'\,d\Omega'$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. $\psi=1$, $\psi_1=\psi_1(q)$ (q — гомологическая температура)

$$\tau_0=f(I,\langle\sigma_i\rangle),\qquad I=\int\limits_0^t G(t-t')\langle\sigma_{ij}^{\cdot}\rangle\,dt'$$
$$m=\psi_1 r_1,\quad R=R_1(n_i,n_i',l_i,l_i')$$

Тогда имеем из (5.2)

$$\langle\sigma_{nl}\rangle = f(I, \langle\sigma_i\rangle) + \gamma_{nl}\psi_1 r_1 + \\ + \psi_1 \int_\Omega R_1(n_i, n_i', l_i, l_i')\, \gamma_{nl}(l_i', n_i')\, d\Omega'$$

Если теперь в последнем уравнении принять

$$R_1 = r_2\delta\,(1 - n_i n_i')\, l_i l_i' + r_3 \lambda_{ij}\lambda_{ij}'$$

то приходим к теории ползучести, предложенной в [9].

2°. $\psi = 1,\ T_0 = f(I, \langle\sigma_i\rangle),\ \psi_1 = r,\ R = k\,(q, t - t')\,\delta\,(1 - n_i n_i')\cdot l_i l_i'$

Тогда

$$\langle\sigma_{nl}\rangle = f(I, \langle\sigma_i\rangle) + r \int_0^t \int_{\omega_1}^{\omega_2} k\,(q, t - t') \cos(\omega_0 - \omega)\, d\omega\, dt' \tag{5.3}$$

где ω_1, ω_2 — границы множества направлений скольжения в плоскости с нормалью n_i. Уравнение (5.3) определяет теорию, рассмотренную в [16].

3°. $\psi = 1, \quad \tau_0 = q\,(1 - f(t)), \quad m = 0, \quad f(t) = \int_0^t Q\,(t - t')\, y\,(t')\, dt'$

$$R = G\,(t - t')\, R_1\,(n_i, n_i', l_i, l_i')$$

(y — скорость изменения температуры). Тогда из (5.2) получим

$$\langle\sigma_{nl}\rangle = q\,(1 - f(t)) + \int_\Omega R_1(n_i, n_i', l_i, l_i')\, P_{nl}\, d\Omega'$$

$$P_{nl} = \int_0^t G\,(t - t')\, \dot{\gamma}_{nl}(t')\, dt'$$

Зададим функцию $G(x)$ в виде $G(x) = \alpha e^{-\beta x}$. Тогда

$$\dot{P}_{nl} + \beta P_{nl} = \alpha \dot{\gamma}_{nl}$$

При таком представлении функции G приходим к теории ползучести, предложенной в [15].

4°. Рассмотрим вариант теории (5.2) при

$$\psi = \psi_1 = (\dot{\gamma}_{nl}/\dot{a}_{nl})^m\, n\,(\gamma_{nl})$$

Тогда из (5.2) находим

$$\dot{\gamma}_{nl} = \dot{a}_{nl}\, (\langle\sigma_{nl}\rangle / g\,(\gamma_{nl}))^{1/m}$$

что соответствует теории, предложенной в [17].

Приведенные выше варианты теории скольжения, по мнению их авторов, способны достаточно хорошо описать процессы сложного нагружения. Сопоставление возможностей различных вариантов теории ползучести предстоит еще осуществить, однако уже сейчас можно сказать, что предлагаемый авторами данной работы подход обладает широкими возможностями и позволяет не только сопоставить известные варианты теории, но и более простыми средствами описать явления, протекающие при ползучести. Некоторые результаты данной публикации кратко изложены в [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Об учете микронапряжений в теории пластичности.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 3, с. 82—91.
2. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5, с. 908—922.

3. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 93—96.
4. *Batdorf S. B., Budiansky B.* A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip.— NACA, Techn. note, 1949, No. 1871.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей, 1962, № 1, с. 135—155.
5. *Новожилов В. В.* Пути развития теории деформирования поликристаллов.— В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984, с. 11—24.
6. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория ползучести микронеоднородных сред.— Исследование по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978, вып. 12, с. 59—71.
7. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 99—110.
8. *Леонов М. Я.* Основные постулаты теории пластичности.— Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 1, с. 51—54.
9. *Русинко К. Н.* Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов: Вища школа, 1981. 148 с.
10. *Малмейстер А. К.* Основы теории локальности деформации. Обзор.— Механика полимеров, 1965, № 4, с. 12—27.
11. *Кнетс И. В.* Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига: Зинатне, 1971. 147 с.
12. *Мохель А. Н., Салганик Р. Л., Христианович С. А.* О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов: Определяющие уравнения и расчеты по ним.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 119—141.
13. *Швайко Н. Ю.* К теории пластичности, основанной на концепции скольжения.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 11, с. 12—24.
14. *Леонов М. Я., Швайко Н. Ю.* Сложная плоская деформация.— Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 5, с. 1007—1010.
15. *Русинко К. Н., Бесараба Д. М.* Ползучесть при тепловом циклическом воздействии.— Физ.-хим. механика материалов, 1984, № 4, с. 86—90.
16. *Лихачев В. А., Малинин В. Г.* Физико-механическая модель упругопластических свойств материалов, учитывающая структурные уровни деформации и кинетические свойства реальных кристаллов.— Изв. вузов. Физика, 1984, № 9, с. 23—28.
17. *Pan J., Rise J. R.* Rate sensitiviti of plastic flow and implications for yield-surface vertices.— Intern. J. Solids Struct., 1983, v. 19, No. 11, p. 973—987.
18. *Кадашевич Ю. И., Клеев В. С.* К вопросу об обобщенном принципе Мазинга.— Проблемы прочности, 1985, № 5, с. 18—20.
19. *Кадашевич Ю. И., Клеев В. С.* Уравнения состояния нестабильных материалов.— В кн.: Вопр. судостроения: Проектирование судов. Л.: ЦНИИ «Румб», 1985, вып. 42, с. 72—76.
20. *Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А.* Теория пластичности, учитывающая микродеформации.— Докл. АН СССР, 1985, т. 284, № 4, с. 821—824.

Ленинград, Днепропетровск

Поступила в редакцию
28.XI.1985