(13) $$u(t) = L^{\circ}v(t) = \int\limits_{0}^{+\infty} l_1(t - t_0, s)\, d_s v^t(s) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{-\infty}^{t} l(t - t_0, \tau - t_0)\, dv(\tau), \qquad l(t, \tau) = -l_1(t, t - \tau)$$

Определяющие уравнения сред с памятью можно получать из законов поведения упругого тела, заменяя константы операторами Вольтерры вида (13). В случае конечных деформаций указанной замене должно предшествовать преобразование упругого закона к одной из бесконечного множества приведенных форм определяющего уравнения, не содержащих ограничений на входящие в него отображения [1]. Так, например, используя неогуково уравнение

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mu(\mathbf{B} - \mathbf{I}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{B}/3),\ \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

и приведенную форму

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(t)\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{C}^t)\,\mathbf{F}^T(t)$$

получим уравнение

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(t)\,\{\mu^{\circ}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{C}/3)(t)\}\,\mathbf{F}^T(t)$$

предложенное [9] для некоторых полимеров при не зависящем от времени операторе μ° вида (13).

Таким образом, в отличие от бесконечно малых деформаций построение вязкоупругого аналога упругого закона при конечных деформациях неединственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
3. *Struik L. C. E.* Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.
4. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
5. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1976, т. 231, № 3, с. 559—562.
6. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш шк., 1983. 399 с.
7. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
8. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
9. *Адамов А. А.* Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях.— В кн.: Структурная механика неоднородных сред. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982, с. 8—11.

Москва

Поступила в редакцию
28.V.1986

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ ПОМОЩИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Полубаринова А. И.

Излагается метод представления функции двух переменных $u(x, y)$, заданной в квадрате $\sigma = [0, \pi] \times [0, \pi]$, в виде комбинации полиномов и дифференцируемых тригонометрических рядов. Такое представление позволяет решать задачи, в которых неизвестная функция определяется из уравнения в частных производных и имеет на границе квадратной области некоторые частные производные более высокого порядка, чем порядок уравнения. Разложение в тригонометрические ряды производится по полной на $[0, \pi]$ системе функций $\{\sin mx, m = 1, 2, 3 \ldots\}$, в двойные ряды — по полной в σ системе функций $\{\sin mx \sin ny, m, n = 1, 2, 3, \ldots\}$. При решении конкретных задач разложение по такой системе функций может иметь некоторые преимущества по сравнению с разложением по обычной тригонометрической системе синусов и косинусов [1, 2]. При помощи упомянутого выше представления функции двух переменных решается задача с неоднородными граничными условиями об изгибе анизотропной пластинки.

1. Формулировка и обоснование метода. *Определение 1.* Будем называть функцию $f(x)$, $x \in [0, \pi]$ четной (нечетной) на $[0, \pi]$ относительно точки $\pi/2$, если $f(x) = f(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$, $(f(x) = -f(\pi - x), x \in [0, \pi])$. Функцию $F(x, y)$, $(x, y) \in \sigma$ будем называть четной или нечетной по x или y, если для нее выполнены соответствующие соотношения по аргументу x или y.

Определение 2. Назовем функцию $F(x, y)$, $(x, y) \in \sigma$ функцией со строго определенной четностью, если четность $F(x, y)$ по каждому аргументу известна. Аналогично вводится это понятие для функции одного аргумента.

Сформулируем лемму о возможности почленного дифференцирования ряда Фурье функции $f(x)$ по системе функций $\{\sin mx, m = 1, 2, 3, \ldots\}$ на $[0, \pi]$.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ — функция со строго определенной четностью. Пусть на $[0, \pi]$ существуют непрерывные производные f_x^{2l}, $l = 1, 2, \ldots p + 1$, причем

$$f_x^{2l}(0) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots p \tag{1.1}$$

Пусть, кроме того, производная f_x^{2p+2} представима в виде ряда Фурье по синусам. Тогда ряд Фурье по синусам функции $f(x)$ можно почленно дифференцировать $2p + 2$ раз.

Условия (1.1) обеспечивают непрерывность нечетного продолжения на $[-\pi, 0]$ функции $f(x)$, а также четных производных этого продолжения вплоть до порядка $2p$. В то же время производные f_x^{2l+1}, $l = 0, 1, \ldots p$ автоматически непрерывны на $[-\pi, \pi]$ как функции четные на этом отрезке. Очевидны также равенства $f_x^k(-\pi) = f_x^k(\pi)$, $k = 0, 1, \ldots 2p + 2$. Таким образом выполнены известные условия [3] почленной дифференцируемости ряда Фурье функции f вплоть до порядка $2p + 2$.

Лемма 2. Пусть $F(x, y)$ — функция со строго определенной четностью. Пусть всюду в σ существуют непрерывные частные производные F_{xy}^{2l}, $l = 1, 2, \ldots p + 1$, удовлетворяющие условиям $F_x^{2l}(0, y) = 0$, $F_y^{2l}(x, 0) = 0$, $l = 0, 1, \ldots p$. Пусть, кроме того, все производные F_{xy}^{2p+2} представимы в σ своими двойными рядами Фурье по синусам. Тогда двойной ряд Фурье по синусам функции $F(x, y)$ можно почленно дифференцировать для получения производных $F_{xy}^{r, s}$, $r + s \leqslant 2p + 2$.

Продолжая $F(x, y)$ нечетным образом (по каждому аргументу) на $[-\pi, 0]$ и рассуждая так же, как при доказательстве леммы 1, приходим к известным условиям почленной дифференцируемости двойного ряда Фурье функции $F(x, y)$, $x, y \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Теорема. Пусть $u(x, y)$ — функция со строго определенной четностью в σ. Пусть существуют частные производные $u_x^{2p}(0, y)$, $u_y^{2p}(x, 0)$, $u_{xy}^{2p+2}(0, 0)$. Тогда существует и единственно представление

$$u(x, y) = F(x, y) + \sum_k h_k(x)\psi_k(y) + \sum_c g_c(y)\varphi_c(x) + \sum_{k, c} d_{kc}h_k(x)g_c(y) \tag{1.2}$$

где: 1) $h_k(x)$, $g_c(y)$ — любые полиномы соответственно от x и y, имеющие ту же четность, что и $u(x, y)$ по соответствующим аргументам, и обладающие свойствами: четный полином $h_k(x)$ имеет степень $2k$, нечетный — степень $2k + 1$ и $d^{2k}h_k(0)/dx^{2k} \neq 0$; аналогичные условия накладываются на $g_c(y)$ в зависимости от их четности;

2) неизвестные функции $F(x, y)$, $\varphi_c(x)$, $\psi_k(y)$ имеют ту же четность, что и $u(x, y)$ по соответствующим аргументам, и частные производные, удовлетворяющие условиям:

$$F_x^{2l}(0, y) = 0, \quad F_y^{2l}(x, 0) = 0, \quad \frac{d^{2l}\varphi_c(0)}{dx^{2l}} = 0, \quad \frac{d^{2l}\psi_k(0)}{dy^{2l}} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, индексы c, k, l, q, r, s принимают значения $0, 1, \ldots p$; суммирование по этим индексам ведется от 0 до p.

Доказательство. Единственность. Для краткости записи введем обозначения

$$h_k^{2l}(x) \equiv d^{2l}h_k(x)/dx^{2l}, \quad g_c^{2l}(y) \equiv d^{2l}g_c(y)/dy^{2l}$$

Допустим, что существует представление (1.2) для $u(x, y)$, причем $F(x, y)$, $\varphi_c(x)$, $\psi_k(y)$ обеспечивают выполнение условий (1.3). Продифференцируем равенство (1.2) $2l$ раз по x при $x = 0$. Учитывая первое и третье условия (1.3), получим

$$\sum_k h_k^{2l}(0)\,\psi_k(y) = u_x^{2l}(0, y) - \sum_{k,c} d_{kc} h_k^{2l}(0)\, g_c(y) \tag{1.4}$$

Дифференцируя равенство (1.2) $2q$ раз по y при $y = 0$ и учитывая второе и четвертое условия (1.3), получим

$$\sum_c g_c^{2q}(0)\,\varphi_c(x) = u_{xy}^{2q}(x, 0) - \sum_{k,c} d_{kc} h_k(x)\, g_c^{2q}(0) \tag{1.5}$$

Дифференцирование равенства (1.4) $2q$ раз по y при $y = 0$ при учете четвертого условия (1.3) дает

$$\sum_{k,c} d_{kc} h_k^{2l}(0)\, g_c^{2q}(0) = u_{xy}^{2l,\,2q}(0, 0) \tag{1.6}$$

В системе (1.6) $(p + 1)^2$ уравнений и столько же неизвестных d_{kc}. Покажем, что у нее существует и единственно решение. Доказательство проведем по индукции. Положив в (1.6) $l = q = p$, получим $d_{pp} h_p^{2p}(0)\, g_p^{2p}(0) = u_{xy}^{2p,\,2p}(0, 0)$, так как $h_k^{2p} = g_c^{2p} \equiv 0$ при $k, c < p$, а $h_p^{2p}(0) \neq 0$, $g_p^{2p}(0) \neq 0$ в силу условия 1) теоремы. Отсюда однозначно определяем d_{pp}.

Допустим, нашли все d_{kc}, $k + c \geqslant t$, использовав все уравнения системы (1.6), для которых $l + q \geqslant t$. Найдем все d_{rs}, для которых $r + s = t - 1$. Для этого рассмотрим все уравнения системы (1.6) с номерами $l = r$, $q = s$. В каждом таком уравнении содержится лишь одно неизвестное d_{rs} с коэффициентом $h_r^{2r}(0)\, g_s^{2s}(0) \neq 0$ в силу условия 1). Все остальные d_{kc} таковы, что $k + c \geqslant t$, т. е. известны. Таким образом, из всех уравнений с номерами $l = r$, $q = s$, $r + s = t - 1$ однозначно определяются все d_{rs}. Существование и единственность решения системы (1.6) доказаны.

Подставляя однозначно найденные d_{kc} в (1.4) и (1.5), получим две линейные системы уравнений для нахождения $\varphi_c(x)$, $\psi_k(y)$. Эти системы будут иметь в силу условия 1) ненулевой определитель и, следовательно, из них однозначно определятся $\varphi_c(x)$, $\psi_k(y)$. Подставляя в (1.2) $\varphi_c(x)$, $\psi_k(y)$, d_{kc}, однозначно находим $F(x, y)$.

Существование. Докажем существование представления (1.2) с функциями $F(x, y)$, $\varphi_c(x)$, $\psi_k(y)$, удовлетворяющими условиям (1.3). Найдем d_{kc} из системы (1.6) и $\varphi_c(x)$, $\psi_k(y)$, соответствующие найденным d_{kc} при помощи (1.4), (1.5). Из (1.2) найдем $F(x, y)$. Докажем, что полученные функции удовлетворяют условиям (1.3). Продифференцируем (1.4) $2q$ раз по y при $y = 0$. На основании (1.6) имеем

$$\sum_k h_k^{2l}(0)\,\psi_k^{2q}(0) = 0$$

Определитель этой линейной системы отличен от нуля в силу условия 1). Значит, система имеет только тривиальное решение. Это доказывает четвертое условие (1.3). Аналогично доказывается третье условие (1.3).

Дифференцируя равенство (1.2) $2l$ раз по x при $x = 0$ и пользуясь третьим условием (1.3) и равенством (1.4), убеждаемся в справедливости первого условия (1.3). Аналогично доказывается второе условие (1.3).

Следствие. Пусть теперь $u(x, y)$ — функция со строго определенной четностью и имеет непрерывные производные u_{xy}^{2p+2} в σ; $u_{xy}^{2p,\,2p+2}(0, y)$, $u_{xy}^{2p+2,\,2p}(x, 0)$ на $[0, \pi]$ и пусть все они представимы своими рядами Фурье по синусам в σ и на $[0, \pi]$ соответственно. Тогда из теоремы и лемм 1, 2 следует существование и единственность представления

$$\begin{aligned} u(x, y) = \sum_{m,n} F_{mn} \sin mx \sin ny + \sum_k h_k(x) \sum_n \psi_n^k \sin ny + \\ + \sum_c g_c(y) \sum_m \varphi_m{}^c \sin mx + \sum_{k,c} d_{kc} h_k(x)\, g_c(y) \end{aligned} \tag{1.7}$$

где все ряды можно почленно дифференцировать для получения частных производных $u_{xy}^{r,\,s}$, $r + s \leqslant 2p + 2$; $m = 1, 3, 5, \ldots$, если $u(x, y)$ — четная функция по x, $m = 2, 4, 6, \ldots$, если $u(x, y)$ — нечетная функция по x. В зависимости от четности $u(x, y)$ по y аналогично определяются значения индекса n.

2. Расчет анизотропной пластинки. Рассмотрим краевую задачу для анизотропной пластинки в квадратной области σ с границей Γ°

$$A\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+B\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+C\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=P^\circ(x, y) \tag{2.1}$$

$$w\,|_{\Gamma^\circ}=\alpha^\circ(x, y),\quad \partial w/\partial n\,|_{\Gamma^\circ}=-\beta^\circ(x, y)$$

Функции $\alpha^\circ(x, y)$, $\beta^\circ(x, y)$ заданы на Γ°. Каждую из функций $P^\circ(x, y)$, $\alpha^\circ(x, y)$, $\beta^\circ(x, y)$ разложим на четыре слагаемых так, чтобы каждое было функцией со строго определенной четностью. Будем искать решение задачи (2.1) в виде суммы решений четырех задач вида

$$A\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+B\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+C\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=P(x, y) \tag{2.2}$$

$$u\,|_{\Gamma}=\alpha(x, y),\ \partial u/\partial n\,|_{\Gamma}=-\beta(x, y) \tag{2.3}$$

где $P(x, y)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ — функции с одинаковой строго определенной четностью $\Gamma=\{(x, 0), (0, y),\ x, y\in[0, \pi]\}$ — часть границы Γ°.

Предположим, что функции $P(x, y)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ обеспечивают выполнение, условий следствия к теореме для решения задач (2.2), (2.3). Тогда решение можно искать в виде (1.7), положив $p=1$. При этом все ряды в (1.7) можно почленно дифференцировать для нахождения частных производных $u_{xy}^{r,\,s}$, $r+s\leqslant 4$.

Здесь и всюду в дальнейшем при решении задачи (2.2), (2.3) значения индексов m и n, а также функции $h_0(x)$, $h_1(x)$, $g_0(y)$, $g_1(y)$ выбираются следующим образом:

функция $P(x, y)$ четная по x: $m=1, 3, 5, \ldots$, $h_0(x)=\pi/4$, $h_1(x)=\pi x(\pi-x)/8$;

функция $P(x, y)$ нечетная по x: $m=2, 4, 6, \ldots$, $h_0(x)=(\pi-2x)/4$, $h_1(x)=x(\pi-x)(\pi-2x)/24$.

Индекс n изменяется аналогично m, но в зависимости от четности $P(x, y)$ по y, $g_0(y)=h_0(y)$, $g_1(y)=h_1(y)$. (Коэффициенты Фурье по синусам указанных функций $h_0(x)$, $h_1(x)$ имеют наиболее простой вид: $1/m$ и $1/m^3$ соответственно, чем и обусловлен выбор этих функций.)

Подстановка первого граничного условия (2.3) в представление (1.7) приводит к равенству

$$u(x, y)=\alpha_*(x, y)+d_{11}h_1(x)g_1(y)+h_1(x)\sum_n\psi_n{}^1\sin ny+ \tag{2.4}$$

$$+g_1(y)\sum_m\varphi_m{}^1\sin mx+\sum_{m,\,n}F_{mn}\sin mx\sin ny$$

$$\alpha_*(x, y)=\alpha(x, 0)\,g_{0*}(y)+h_{0*}(x)\,\alpha(0, y)-\alpha(0, 0)\,h_{0*}(x)\,g_{0*}(y)$$

$$h_{0*}(x)=h_0(x)/h_0(0),\ g_{0*}(y)=g_0(y)/g_0(0)$$

Подстановка (2.4) в уравнение (2.2) и второе граничное условие (2.3) дает

$$u(x, y)=\alpha_*(x, y)+d_{11}h_1(x)g_1(y)+\frac{h_1(x)}{A}\sum_n\zeta_n\sin ny+ \tag{2.5}$$

$$+\frac{g_1(y)}{C}\sum_m\eta_m\sin mx+\sum_{m,n}\left(\frac{m\zeta_n+n\eta_m+P_{mn}}{K_{mn}}-\frac{\zeta_n}{Am^3}-\frac{\eta_m}{Cn^3}\right)\times$$

$$\times\sin mx\sin ny$$

$$d_{11}=\frac{16}{\pi^2B}\left[P-A\frac{\partial^4\alpha}{\partial x^4}-C\frac{\partial^4\alpha}{\partial y^4}\right]_{x=y=0},\ K_{mn}=Am^4+Bm^2n^2+Cn^4$$

Коэффициенты $\zeta_n=A\Psi_n{}^1$, $\eta_m=C\varphi_m{}^1$ являются решением бесконечной системы уравнений

$$\sum_m\frac{m^2}{K_{mn}}\zeta_n+\sum_m\frac{mn\eta_m}{K_{mn}}=\gamma_n-\sum_m\frac{mQ_{mn}}{K_{mn}} \tag{2.6}$$

$$\sum_n\frac{n^2}{K_{mn}}\eta_m+\sum_n\frac{mn\zeta_n}{K_{mn}}=\delta_m-\sum_n\frac{nQ_{mn}}{K_{mn}}$$

где $\gamma_n, \delta_m, Q_{mn}$ — коэффициенты Фурье по синусам соответственно следующих функций:

$$\gamma(y) = \beta(0, y) + \beta(0, 0) g_{0*}(y) - [\alpha(0, y) - \alpha(0, 0) g_{0*}(y)] h_0'(0) - d_{11}h_1'(0) g_1(y), \qquad \delta(x) = \beta(x, 0) + \beta(0, 0) h_{0*}(x) - [\alpha(x, 0) - \alpha(0, 0) h_{0*}(x)] g_0'(0) - d_{11}h_1(x) g_1'(0), \qquad Q(x, y) = P(x, y) - A\frac{\partial^4\alpha}{\partial x^4}(x, 0) g_{0*}(y) - C\frac{\partial^4\alpha}{\partial y^4}(0, y) h_{0*}(x) - d_{11}Bh_0(x) g_0(y)$$

Итак, формула (2.5) выражает решение задачи (2.2), (2.3) через известные функции $P(x, y), \alpha(x, y), \beta(x, y), h_0(x), h_1(x), g_0(y), g_1(y)$ и решение бесконечной системы (2.6). Все ряды в (2.5) можно почленно дифференцировать для нахождения производных $u_{xy}^{r,s}$, $r + s \leqslant 4$. Раскладывая $h_1(x)$, $g_1(y)$ в ряды Фурье по синусам, получим более компактное представление

$$u(x, y) = \alpha_*(x, y) + \sum_{m,n}\left(\frac{m\zeta_n + n\eta_m + Q_{mn}}{K_{mn}} + \frac{d_{11}}{m^3n^3}\right)\sin mx \sin ny$$

ряды в котором, однако, нельзя почленно дифференцировать.

Решая задачу (2.2), (2.3) для составляющих нагрузки и граничных условий различной строго определенной четности и складывая четыре полученных решения, получаем решение задачи (2.1). Заметим, что условие эллиптичности задачи (2.1) обеспечивает $K_{mn} \neq 0$ для любых m, n.

Особого рассмотрения заслуживает вопрос о существовании и единственности решения, а также о методах решения системы (2.6). Отметим, что в общем случае систему (2.6) не удается привести к регулярному виду [4]. Однако замена переменных

$$\zeta_n = n\bar{\zeta}_n, \quad \eta_m = m\bar{\eta}_m \tag{2.7}$$

приводит (2.6) к бесконечной системе, которую можно решать методом, предложенным в [4] для квазирегулярных систем. В часто встречающемся случае, когда $A = C$, $P^\circ(x, y) = P^\circ(y, x), \alpha^\circ(x, y) = \alpha^\circ(y, x)$, $\beta^\circ(x, y) = \beta^\circ(y, x)$, система (2.6) приводится к регулярному виду. Для того чтобы ее можно было решать методом редукции [4], достаточно, чтобы порядок убывания коэффициентов Фурье по синусам функций $P^\circ(x, y)$, $\alpha^\circ(x, y)$, $\beta^\circ(x, y)$ был не ниже $1/(mn)$.

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе жестко закрепленной изотропной пластинки при равномерной нагрузке в области σ. Имеем: $P^\circ(x, y) \equiv P^\circ$; $A = C = 1$; $B = 2$, $\alpha^\circ(x, y) = \beta^\circ(x, y) \equiv 0$. Прогиб выражается следующим образом:

$$w(x, y) = P^\circ \sum_{m,n}\left(\frac{m\zeta_n + n\zeta_m}{(m^2+n^2)^2} - \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{m^3n^3}\right)\sin mx \sin ny \tag{2.8}$$

через решение $\{\zeta_n\}$ бесконечной системы

$$\sum_m \frac{m^2}{(m^2+n^2)^2}\zeta_n + \sum_m \frac{mn\zeta_n}{(m^2+n^2)^2} = -\frac{1}{n^3}, \quad m, n = 1, 3, 5, \ldots \tag{2.9}$$

Ряд (2.8) сходится быстро. Достаточно определить первые пять величин ζ_n из системы (2.9) методом редукции, и соответствующая частичная сумма ряда (2.8) даст хорошее приближение к известному решению задачи [5].

Отметим, что для решения задачи (2.1) был выбран аналогичный указанному в [1] метод, так как он наиболее удобен при решении задач с неоднородными граничными условиями. Задачу (2.1) можно было решать также при помощи двух представлений для искомой функции [2], используя при этом для разложения в ряды Фурье полную на $[0, \pi]$ систему синусов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даревский В. М.* Представление функций двух переменных с помощью дифференцируемых тригонометрических рядов для решения уравнений в частных производных.— Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 3, с. 486—500.
2. *Даревский В. М.* Об одном методе решения уравнений с частными производными.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 9, с. 1661—1672.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1970. 656 с.
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.— Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
5. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.V.1985