Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 539.3

О ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ В ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮЩИХ СРЕД

Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.

Доказывается, что при довольно широких допущениях из принципа материальной независимости от системы отсчета [1], именуемого далее также принципом инвариантности, вытекает общее определяющее соотношение для неоднородно стареющей наследственной среды.

В настоящее время экспериментально установлено, что для широкого класса конструкционных материалов [2, 3] (бетон, полимеры, металлы и др.) возраст материала, отсчитываемый от момента его перехода в твердое состояние, является такой же существенной характеристикой, определяющей его физико-механические свойства, как температура, влажность окружающей среды и др. Нестабильность свойств, имеющая место при постоянных внешних условиях, обусловлена протекающими в материале физико-химическими процессами, механизм которых изучен еще в недостаточной степени. Такого рода нестабильность, называемая старением, приводит к тому, что в определяющее уравнение наряду с прочими величинами входит и возраст материала.

Теория ползучести стареющих материалов применительно к бетону была развита [2]. В [4, 5] впервые получены определяющие уравнения неоднородно стареющих сред, обладающих возрастной неоднородностью. Однако в переведенных на русский язык курсах механики стареющие среды исключаются из рассмотрения на основании выводимого из принципа инвариантности утверждения, что абсолютное время t не может входить в определяющее уравнение в виде параметра ([6], с. 122, [7], с. 229). В связи с этим возникает вопрос о принципиальной допустимости феноменологического рассмотрения стареющих сред. Как показано далее, принцип материальной независимости от системы отсчета не только не запрещает такое рассмотрение, но и позволяет получить общее определяющее уравнение неоднородно стареющей среды.

Ограничимся далее рассмотрением так называемых простых сред, определяющее уравнение которых имеет вид [1]

$$\sigma(t, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{X}$ — место материальной точки в фиксированной отсчетной конфигурации $\varkappa$, а $\mathbf{x} = \chi(t, \mathbf{X})$ — место этой точки в актуальной конфигурации в момент t, σ — тензор напряжения Коши, $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}}\chi(t, \mathbf{X})$ — градиент отображения $\chi(t, \mathbf{X})$ отсчетной конфигурации в актуальную, называемый градиентом деформации; $\mathbf{F}^t(\mathbf{X})$ означает предысторию до момента t функции $\mathbf{F}$, определяемую следующим образом [1]:

$$\mathbf{F}^t(\mathbf{X}) = (\mathbf{F}(t-s, \mathbf{X}),\ s \geqslant 0) \tag{2}$$

Наконец, $\boldsymbol{\Phi}$ — функционал (по второму аргументу), параметрически зависящий от t и $\mathbf{X}$. Поскольку в дальнейшем отсчетная конфигурация зафиксирована, то зависимость $\boldsymbol{\Phi}$ от $\varkappa$ явно не указана. Тензоры второго ранга трактуем подобно [1] как линейные отображения.

Всевозможные замены системы отсчета порождают группу преобразований пространства — времени

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \quad t^* = t + a \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_0^*$, $\mathbf{x}_0$ — произвольные векторные функции времени t, $\mathbf{Q}(t)$ — произвольный ортогональный тензор, a — произвольная константа. Здесь первая формула задает группу движений твердого тела, вторая — сдвиги начала отсчета времени. Соответствующие соотношениям (3) преобразования тензоров σ и $\mathbf{F}$ будут

$$\sigma^*(t^*, \mathbf{X}) = \mathbf{Q}(t)\,\sigma(t, \mathbf{X})\,\mathbf{Q}^T(t), \qquad \mathbf{F}^*(t^*, \mathbf{X}) = \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \tag{4}$$

где верхний индекс T означает транспонирование.

Принцип инвариантности требует, чтобы для произвольного динамического процесса (χ, σ), удовлетворяющего уравнению (1), этому уравнению удовлетворяли и все возможные процессы (χ^*, σ^*), получаемые из (χ, σ) преобразованием (3), (4), т. е.

$$\sigma^*(t^*, \mathbf{X}) = \Phi(t^*, \mathbf{F}^{*t^*}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{5}$$

Рассмотренное требование ограничивает класс функционалов Φ, определяющих свойства материала. Полагая выполненными известные ограничения, вытекающие из (3)—(5) при $a = 0$, т. е. из инвариантности относительно преобразований пространства [1], докажем, следуя [6, 7], что при определяющем уравнении (1) функционал Φ не должен зависеть от t. Полагая в (2)—(4) $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (тождественное преобразование), $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}_0 = 0$, $a \neq 0$, будем иметь

$$\begin{gathered}\sigma^*(t^*, \mathbf{X}) = \sigma(t, \mathbf{X}), \qquad \mathbf{F}^*(t^*, \mathbf{X}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{F}^{*t^*}(\mathbf{X}) = (\mathbf{F}^*(t - s, \mathbf{X}), s \geqslant 0) = (\mathbf{F}(t - s, \mathbf{X}), s \geqslant 0) = \mathbf{F}^t(\mathbf{X})\end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда и из (1), (5) получим тождественное равенство

$$\Phi(t, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \Phi(t + a, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{7}$$

Полагая здесь $a = -t$, получим требуемое соотношение

$$\Phi(t, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \Phi(0, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{8}$$

Правильная интерпретация доказанного соотношения (8) заключается, по мнению авторов, не в том, что реакция материала Φ не может зависеть от времени вообще, а лишь в том, что время t не может входить явным образом в реакцию Φ в любой системе отсчета в простейшем виде (1).

Попытаемся поэтому найти определяющее уравнение стареющего материала в более широком классе соотношений. Полагая, что речь идет о твердом теле, обозначим $t_0(\mathbf{X})$ — момент времени формирования (зарождения) твердого материала (из жидкой или газовой фазы) в окрестности точки $\mathbf{X}$. Будучи уже твердым, материал в дальнейшем мог претерпеть фазовые перестройки в моменты времени $t_1(\mathbf{X}), t_2(\mathbf{X}), \ldots t_N(\mathbf{X})$. Поэтому искомое определяющее уравнение естественно искать в форме

$$\sigma(t, \mathbf{X}) = \Phi_1(t, t_0, t_1, t_2, \ldots t_N, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{9}$$

Аналогично выводу (8), применяя принцип инвариантности к (9), получим

$$\begin{aligned}&\Phi_1(t, t_0, t_1, t_2, \ldots t_N, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \\ &= \Phi_1(t - t_0, 0, t_1 - t_0, t_2 - t_0, \ldots t_N - t_0, \mathbf{F}^t(\mathbf{X},) \mathbf{X}) = \\ &= \Phi_2(t - t_0, t_1 - t_0, t_2 - t_0, \ldots t_N - t_0, \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \\ &= \Phi(t - t_0(\mathbf{X}), \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X})\end{aligned} \tag{10}$$

где последние два равенства служат просто определением Φ_2 и Φ, а зависимость реакции от $t_1 - t_0, t_2 - t_0, \ldots t_N - t_0$ учтена последним аргументом у Φ. Таким образом, используя принцип инвариантности, получили общее определяющее уравнение неоднородно стареющей среды

$$\sigma(t, \mathbf{X}) = \Phi(t - t_0(\mathbf{X}), \mathbf{F}^t(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \tag{11}$$

В частном случае, когда Φ не зависит от третьего аргумента $\mathbf{X}$, полученное уравнение имеет простой смысл: в локальном времени $t' = t - t_0(\mathbf{X})$ свойства материальных элементов описываются одним и тем же для всех $\mathbf{X}$ соотношением

$$\sigma'(t', \mathbf{X}) = \Phi(t', \mathbf{F}'^{t'}(\mathbf{X})) \tag{12}$$

Сформулированный таким образом принцип локального времени может быть положен в основу вывода известных определяющих уравнений неоднородно стареющих сред [8].

При построении конкретных определяющих уравнений сред с памятью часто оказывается эффективным принцип суперпозиции Больцмана, общую формулировку которого можно дать следующим образом: следствие $u(t)$, вызванное несколькими приращениями причины $v(\tau)$ при $\tau \leqslant t$, есть сумма следствий, вызываемых каждым из приращений причины в отдельности. Для математической формулировки принципа Больцмана введем с учетом условия инвариантности функцию $l_1(t - t_0, s)$, равную величине $-u(t)$, вызванной приложением единичной ступени функции v в момент $\tau = t - s$. Тогда имеем

$$
(13) \qquad u(t) = L^\circ v(t) = \int_0^{+\infty} l_1(t - t_0, s)\, d_s v^t(s) \equiv
$$

$$
\equiv \int_{-\infty}^{t} l(t - t_0, \tau - t_0)\, dv(\tau), \qquad l(t, \tau) = -l_1(t, t - \tau)
$$

Определяющие уравнения сред с памятью можно получать из законов поведения упругого тела, заменяя константы операторами Вольтерры вида (13). В случае конечных деформаций указанной замене должно предшествовать преобразование упругого закона к одной из бесконечного множества приведенных форм определяющего уравнения, не содержащих ограничений на входящие в него отображения [1]. Так, например, используя неогуково уравнение

$$
\sigma = -p\mathbf{I} + \mu(\mathbf{B} - \mathbf{I}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{B}/3), \ \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T
$$

и приведенную форму

$$
\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(t)\,\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{C}^t)\,\mathbf{F}^T(t)
$$

получим уравнение

$$
\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{F}(t)\{\mu^\circ(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{C}\,3)(t)\}\,\mathbf{F}^T(t)
$$

предложенное [9] для некоторых полимеров при не зависящем от времени операторе μ° вида (13).

Таким образом, в отличие от бесконечно малых деформаций построение вязкоупругого аналога упругого закона при конечных деформациях неединственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
3. *Struik L. C. E.* Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.
4. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
5. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно стареющих тел.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1976, т. 231, № 3, с. 559—562.
6. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш шк., 1983. 399 с.
7. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
8. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
9. *Адамов А. А.* Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях.— В кн.: Структурная механика неоднородных сред. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982, с. 8—11.

Москва

Поступила в редакцию 28.V.1986

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ ПОМОЩИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Полубаринова А. И.

Излагается метод представления функции двух переменных $u(x, y)$, заданной в квадрате $\sigma = [0, \pi] \times [0, \pi]$, в виде комбинации полиномов и дифференцируемых тригонометрических рядов. Такое представление позволяет решать задачи, в которых неизвестная функция определяется из уравнения в частных производных и имеет на границе квадратной области некоторые частные производные более высокого порядка,