

УДК 539.375

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

Кудиш И. И.

Ставится и асимптотическими методами исследуется плоская контактная задача о штампе, который вдавлируется в упругую полуплоскость, содержащую произвольно расположенные прямолинейные подповерхностные трещины. Допускается частичное или полное налегание берегов трещин. Задача сводится к системе линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с дополнительными условиями в виде равенств и неравенств. Аналитическое решение задачи получено в виде степенных асимптотических рядов [1] по относительному размеру наибольшей трещины. Определяются зависимости первых членов асимптотических разложений искомых функций от взаимного расположения трещин и области контакта, распределений давления и напряжений трения, размеров и ориентации трещин. Приводятся численные результаты.

Анализ влияния свободной от напряжений границы полуплоскости на напряженно-деформированное состояние упругого материала вблизи трещин приведен в [2, 3]. В [3] численными методами также рассмотрена задача о трещине в упругой плоскости, берега которой частично налегают.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую задачу о взаимодействии без трения (задача с учетом трения исследована в п. 3) штампа с основанием  $z = f(x)$  с упругой полуплоскостью, ослабленной трещинами. Предполагается, что в полуплоскости имеется  $N$  прямолинейных подповерхностных трещин, на берегах которых трение отсутствует.

В безразмерных переменных

$$(1.1) \quad \{x', \tau', a, c, x_k^{\circ'}, y_k^{\circ'}\} = \{x, \tau, x_i, x_e, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}\}/b_0, \{q', p_k'\} = \\ = \{q, p_k\}/q_0, \{x_k', t'\} = \{x_k, t\}/l_k, \{v_k', u_k'\} = \{v_k, u_k\}/v_k^{\circ} \\ f'(x') = \frac{\pi E'}{2P} f(x), \quad \delta^{\circ'} = \frac{i\pi E'}{2P} \delta^{\circ} - \ln \frac{1}{b_0}; \quad v_k^{\circ} = \frac{4q_0 l_k}{E'}, \quad \delta_k = \frac{l_k}{b_0}$$

задача сводится к системе уравнений с дополнительными условиями в форме равенств и неравенств [4] (штрихи опущены)

$$(1.2) \quad f(x) + \frac{2}{\pi} \int_a^c q(t) \ln \frac{1}{|x-t|} dt - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \{v_k'(t) W_k^r(t, x) - \\ - u_k'(t) W_k^i(t, x)\} dt = \delta^{\circ}, \quad \int_a^c q(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$(1.3) \quad W_k(t, x) = ie^{-i\alpha_k} \frac{\bar{T}_k - T_k}{\bar{T}_k - x}, \quad W_k^r = \operatorname{Re} W_k, \quad W_k^i = \operatorname{Im} W_k$$

$$(1.4) \quad \int_{-1}^1 \frac{v_n'(t) dt}{t - x_n} + \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \{v_k'(t) U_{nk}^r(t, x_n) - u_k'(t) V_{nk}^r(t, x_n)\} dt = \\ = \pi p_n(x_n) - \int_a^c q(\tau) D_n^r(\tau, x_n) d\tau$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u_n'(t) dt}{t - x_n} + \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \{-u_k'(t) V_{nk}^i(t, x_n) + v_k'(t) U_{nk}^i(t, x_n)\} dt =$$

$$= - \int_a^c q(\tau) D_n^i(\tau, x_n) d\tau$$

$$(1.5) \quad U_{nk} = \overline{R_{nk} + S_{nk}}, \quad V_{nk} = i(\overline{R_{nk} - S_{nk}})$$

$$U_{nk}^r = \operatorname{Re} U_{nk}, \quad U_{nk}^i = \operatorname{Im} U_{nk}, \quad V_{nk}^r = \operatorname{Re} V_{nk}, \quad V_{nk}^i = \operatorname{Im} V_{nk}$$

$$D_n^r = \operatorname{Re} \overline{D_n}, \quad D_n^i = \operatorname{Im} \overline{D_n}$$

$$R_{nk}(t, x_n) = (1 - \delta_{nk}) K_{nk}(t, x_n) + \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left\{ \frac{1}{X_n - \bar{T}_k} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{X_n - T_k} + \right.$$

$$\left. + (\bar{T}_k - T_k) \left[ \frac{1 + e^{-2i\alpha_n}}{(X_n - T_k)^2} - \frac{2e^{-2i\alpha_n}(X_n - T_k)}{(X_n - T_k)^3} \right] \right\}$$

$$S_{nk}(t, x_n) = (1 - \delta_{nk}) L_{nk}(t, x_n) + \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{T_k - \bar{T}_k}{(X_n - \bar{T}_k)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{X_n - T_k} - e^{-2i\alpha_n} \frac{X_n - T_k}{(X_n - T_k)^2} \right]$$

$$K_{nk}(t, x_n) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2} \left( \frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\bar{T}_k - X_n} \right)$$

$$L_{nk}(t, x_n) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[ \frac{1}{\bar{T}_k - X_n} - \frac{T_k - X_n}{(\bar{T}_k - X_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right]$$

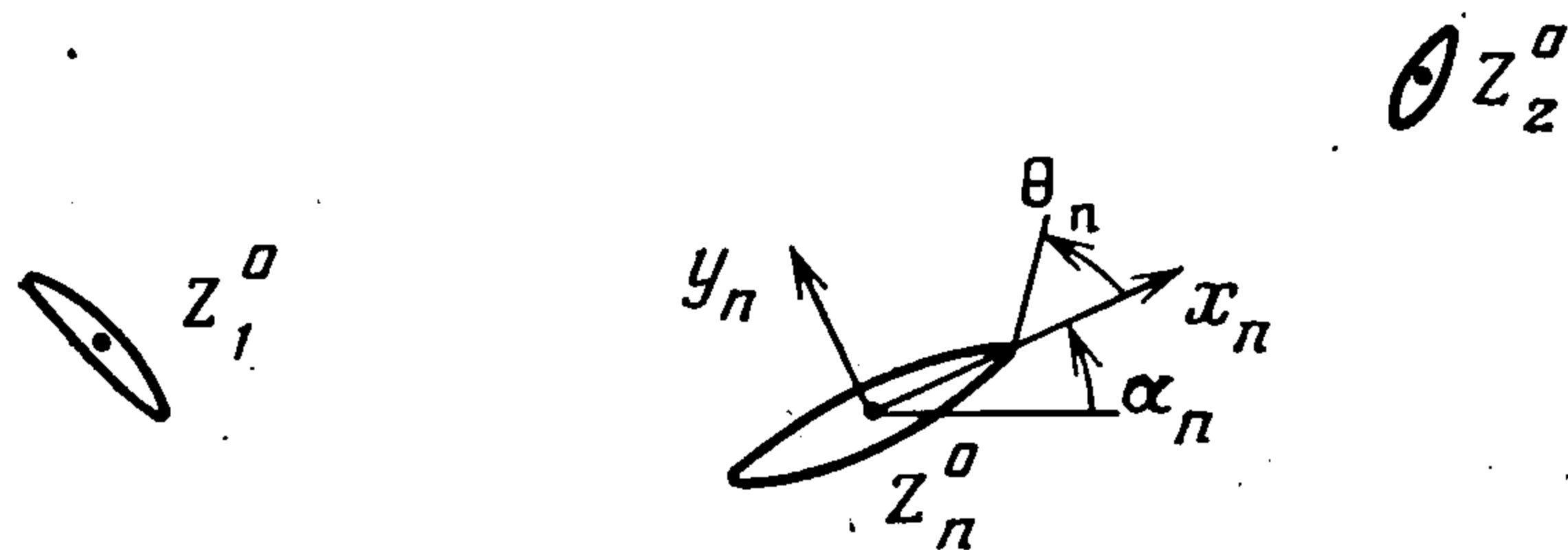
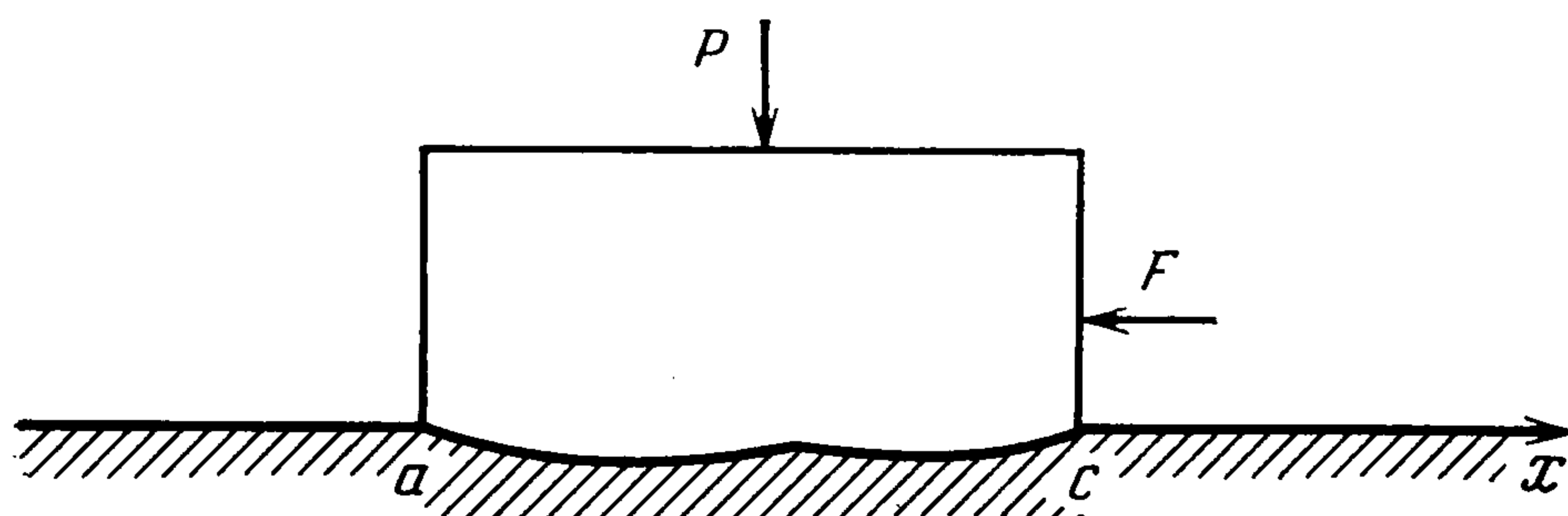
$$D_n(\tau, x_n) = \frac{i}{2} \left[ -\frac{1}{\tau - X_n} + \frac{1}{\tau - \bar{X}_n} - \frac{e^{-2i\alpha_n}(X_n - \bar{X}_n)}{(\tau - \bar{X}_n)^2} \right]$$

$$(1.6) \quad X_n = \delta_n x_n e^{i\alpha_n} + z_n^0, \quad T_k = \delta_k t e^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$$

$$(1.7) \quad p_n(x_n) = 0, \quad v_n(x_n) > 0; \quad v_n(x_n) \leq 0, \quad v_n(x_n) = 0;$$

$$v_n(\pm 1) = u_n(\pm 1) = 0$$

Здесь  $x$  — координата точки области контакта,  $a$  и  $c$  — координаты границ области контакта,  $(x_k^0, y_k^0)$  — координаты центра  $k$ -й трещины,  $l_k$  и  $\alpha_k$  — соответственно полудлина трещины и угол между осями абсцисс  $k$ -й локальной и основной систем координат (на фиг. 1 изображен общий вид контактирующих тел),  $x_k$  — координата точки в локальной системе координат, связанной с  $k$ -й трещиной,  $q = q(x)$  и  $p_k = p_k(x_k)$  — соответственно контактное давление и напряжение, действующее на берега  $k$ -й трещины,  $v_k = v_k(x_k)$  и  $u_k = u_k(x_k)$  — скачки соответственно нормального и касательного перемещений берегов  $k$ -й трещины,  $f(x)$  — форма основания



штампа,  $\delta^\circ$  — сближение тел,  $P$  — сила, действующая на штамп в нормальном направлении,  $q_0$  и  $b_0$  — соответственно характерное давление и полуширина области контакта,  $q_0 b_0 = 2\pi^{-1}P$ ,  $E' = E/(1 - \nu^2)$  — приведенный модуль упругости.

Таким образом, при заданных постоянных  $z_k^\circ$ ,  $\alpha_k$ ,  $\delta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) и функции  $f(x)$  из уравнений и неравенств (1.2)—(1.7) требуется определить постоянную  $\delta^\circ$  и функции  $q(x)$ ,  $v_k(x_k)$ ,  $u_k(x_k)$  и  $p_k(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

**2. Асимптотическое исследование задачи.** Рассмотрим случай, когда все трещины малы по сравнению с размером площадки контакта, т. е.  $\delta_0 = \max \delta_k \ll 1$ . При этом наибольший практический интерес представляет рассмотрение такой структуры системы трещин в упругой полуплоскости, для которой расстояние между любыми двумя трещинами существенно превосходит их размеры, т. е.

$$(2.1) \quad z_n^\circ - z_k^\circ \gg \delta_0, \quad \forall n, k, n \neq k$$

(Асимптотическое соотношение  $g \sim h$  означает, что  $(g\bar{g})^{1/2} \sim (h, \bar{h})^{1/2}$ . Очевидно, что если  $g \sim h$ , то  $\bar{g} \sim \bar{h}$ . Аналогично определяются асимптотические соотношения  $g \gg h$  и  $g \ll h$ .)

Поскольку система подповерхностных трещин принадлежит полуплоскости, то  $\text{Im } z_n^\circ \cdot \text{Im } \bar{z}_k^\circ < 0$ ,  $\forall n, k$ . Поэтому из (2.1) следует, что

$$(2.2) \quad z_n^\circ - \bar{z}_k^\circ \gg \delta_0, \quad \forall n, k, n \neq k$$

Предположим, кроме того, что трещины в упругой полуплоскости залегают на глубинах под поверхностью, существенно превышающих их размеры. Это предположение можно выразить в виде

$$(2.3) \quad z_n^\circ - \bar{z}_n^\circ \gg \delta_0, \quad \forall n$$

Очевидно, что из (2.1)—(2.3) вытекают следующие оценки:

$$(2.4) \quad T_k - X_n \gg \delta_0, \quad \bar{T}_k - X_n \gg \delta_0, \quad \forall n, k, n \neq k \\ \bar{T}_k - T_k \gg \delta_0, \quad x - T_k \gg \delta_0, \quad \forall k, x$$

Разрешим теперь уравнения (1.2) относительно  $q(x)$ , предположив, что форма основания штампа  $f(x)$  такова, что  $q(x)$  в точках  $x = a$  и  $x = c$  имеет корневые особенности. С помощью [5] получим

$$(2.5) \quad q(x) = q^\circ(x) - \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x-a)(c-x)}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(t-a)(c-t)} dt}{t-x} \times \\ \times \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \left\{ v_k'(\tau) \frac{\partial W_k^r(\tau, t)}{\partial t} - u_k'(\tau) \frac{\partial W_k^i(\tau, t)}{\partial t} \right\} d\tau$$

$$(2.6) \quad q^\circ(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-a)(c-x)}} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(t) \sqrt{(t-a)(c-t)} dt}{t-x} \right\}$$

Преобразуем уравнение (2.5), для чего поменяем порядок суммирования и интегрирования. В результате этих преобразований из (2.5) и один раз проинтегрированное по  $\bar{T}_k$  интеграла (см. [2, с. 63] и соотношения (1.3))

$$\int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2 - y^2} dy}{(y-x)(y-\bar{T}_k)} = -\pi \left( 1 + \frac{\sqrt{\bar{T}_k^2 - b^2}}{x - \bar{T}_k} \right)$$

вытекает окончательный вид уравнения для  $q(x)$

$$(2.7) \quad q(x) = q^{\circ}(x) - \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(c-x)}} \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 [v_k'(t) Z_k^r(t, x) - u_k'(t) Z_k^i(t, x)] dt$$

$$(2.8) \quad Z_k(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_a^c \frac{\sqrt{(\tau-a)(c-\tau)}}{\tau-x} \frac{\partial W_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = ie^{-i\alpha_k} \frac{(\bar{T}_k - T_k) [(c+a)(x + \bar{T}_k)/2 - ac - x\bar{T}_k]}{(x - \bar{T}_k)^2 \sqrt{(\bar{T}_k - a)(\bar{T}_k - c)}}$$

Из (2.8) и оценок (2.1)–(2.4) следует, что ядра  $Z_k(t, x)$ ,  $D_n(t, x_n)$ ,  $U_{nk}(t, x_n)$  и  $V_{nk}(t, x_n)$  представимы в виде регулярных для всех  $x, x_n$  и  $t$  асимптотических рядов по степеням  $\delta_k$  и  $\delta_n$  (см. (1.6))

$$(2.9) \quad Z_k(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_k t)^j Z_{kj}(x), \quad D_n(t, x_n) = \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_n x_n)^j D_{nj}(t) \\ \{U_{nk}(t, x_n), V_{nk}(t, x_n)\} = \sum_{\substack{j+m=0 \\ j, m \geq 0}}^{\infty} (\delta_n x_n)^j (\delta_k t)^m \{U_{nkjm}, V_{nkjm}\}$$

Заметим, что величины  $U_{nkjm}$  и  $V_{nkjm}$  не зависят от  $\delta_n, \delta_k, x_n, t$ , являясь функциями постоянных  $\alpha_n, \alpha_k, x_n^{\circ}, y_n^{\circ}, x_k^{\circ}$  и  $y_k^{\circ}$ . Аналогичная зависимость имеет место и для величин  $Z_{kj}(x)$  и  $D_{kj}(t)$ .

Перейдем непосредственно к асимптотическому решению системы уравнений и неравенств (2.6)–(2.8), (1.4)–(1.7) при  $\delta_0 \ll 1$ . Решение указанной системы будем искать методом регулярных возмущений [1] в виде асимптотических рядов по степеням  $\delta_0$

$$(2.10) \quad \{q, \delta^{\circ}, v_n, u_n, p_n\} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j \{q_j, \delta_j^{\circ}, v_{nj}, u_{nj}, p_{nj}\}$$

Займемся асимптотическим анализом уравнений (1.4) и (2.7). Подставив представление (2.10) в уравнения (1.4), при помощи разложений (2.9) для последовательных членов разложений  $p_n$  и  $v_n, u_n$  найдем

$$(2.11) \quad Fv'_{n0}(x_n) = \pi p_{n0}(x_n) - \pi c_{n00}^r, \quad Fu'_{n0}(x_n) = -\pi c_{n00}^i$$

$$(2.12) \quad Fv'_{n1}(x_n) = \pi p_{n1}(x_n) - \pi c_{n01}^r \frac{\delta_n}{\delta_0} x_n - \pi c_{n10}^r$$

$$Fu'_{n1}(x_n) = -\pi c_{n01}^i \frac{\delta_n}{\delta_0} x_n - \pi c_{n10}^i$$

$$(2.13) \quad Fv'_{n2}(x_n) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\delta_k}{\delta_0}\right)^2 (\lambda_k U_{nk01}^r - \mu_k V_{nk01}^r) = \\ = \pi p_{n2}(x_n) - \pi c_{n02}^r \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} x_n\right)^2 - \pi c_{n11}^r \frac{\delta_n}{\delta_0} x_n - \pi c_{n20}^r$$

$$Fu'_{n2}(x_n) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\delta_k}{\delta_0}\right)^2 (\lambda_k U_{nk01}^i - \mu_k V_{nk01}^i) = \\ = -\pi c_{n02}^i \left(\frac{\delta_n}{\delta_0} x_n\right)^2 - \pi c_{n11}^i \frac{\delta_n}{\delta_0} x_n - \pi c_{n20}^i, \dots,$$

$$Fw(x) = \int_{-1}^1 \frac{w(t) dt}{t-x}$$

$$(2.14) \quad c_{nkj}^r + ic_{nkj}^i = \frac{1}{\pi} \int_a^c q_k(\tau) \overline{D_{nj}(\tau)} d\tau$$

Очевидно, что величины  $c_{nkj}^r$  и  $c_{nkj}^i$  не зависят от  $x_n$ . При выводе уравнений (2.11)–(2.13) учтены также соотношения  $v_{nk}(\pm 1) = u_{nk}(\pm 1) = 0$  и

$$(2.15) \quad (\lambda_k, \mu_k) = - \int_{-1}^1 t (v'_{k0}(t), u'_{k0}(t)) dt = \int_{-1}^1 (v_{k0}(t), u_{k0}(t)) dt$$

Подставив далее (2.9) и (2.10) в уравнение (2.7), для первых членов асимптотического разложения  $q(x)$  получим

$$(2.16) \quad q_0(x) = q^0(x), \quad q_1(x) = 0$$

$$(2.17) \quad q_2(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(c-x)}} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\delta_k}{\delta_0} \right)^2 [\lambda_k Z_{k1}^r(x) - \mu_k Z_{k1}^i(x)], \dots$$

Вернемся теперь к дальнейшему анализу уравнений (2.11)–(2.14). Для этого произведем асимптотический анализ при  $\delta_0 \ll 1$  системы альтернативных равенств и неравенств (1.7), где функции  $v_n$  и  $p_n$  удовлетворяют (2.10). Будем иметь

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j p_{nj}(x_n) &= 0, & \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j v_{nj}(x_n) &> 0; \\ \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j p_{nj}(x_n) &\leq 0, & \sum_{j=0}^{\infty} \delta_0^j v_{nj}(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Предположим, что  $v_{n0}(x_n) > 0$ . Тогда из первого условия в (2.18) при  $\delta_0 \ll 1$  следует, что  $p_{nj}(x_n) = 0, \forall j \geq 0$ , а знак  $v_{nj}(x_n)$  при  $j \geq 1$  не влияет на выполнение второго неравенства в (2.18). Предположим противное, т. е.  $v_{n0}(x_n) = 0$ . Тогда возможна реализация одного из двух случаев: а)  $p_{n0}(x_n) < 0$ ; б)  $p_{n0}(x_n) = 0$ . В случае а) вне зависимости от значений  $p_{nj}(x_n)$  при  $j \geq 1$  будем иметь  $p_n(x_n) < 0$  при  $\delta_0 \ll 1$ . При этом из последнего из соотношений (2.18) найдем  $v_{nj}(x_n) = 0, \forall j \geq 0$ . В случае б) получим, что  $p_{n0}(x_n) = 0$  и  $v_{n0}(x_n) = 0$ , а выбор соотношений для  $p_{nj}(x_n)$  и  $v_{nj}(x_n)$  при  $j \geq 1$  переносится в рассмотрение следующего приближения по  $\delta_0 \ll 1$ , что делается совершенно аналогично.

Из последнего соотношения (1.7) и (2.10), очевидно, вытекает

$$(2.19) \quad v_{nk}(\pm 1) = u_{nk}(\pm 1) = 0, \quad \forall n, k$$

1°. Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии материала вблизи трещин в нулевом приближении. При этом задача описывается уравнениями (2.11) совместно с системой равенств и неравенств (2.19) и

$$(2.20) \quad p_{n0}(x_n) = 0, \quad v_{n0}(x_n) > 0; \quad p_{n0}(x_n) \leq 0, \quad v_{n0}(x_n) = 0$$

которая следует из асимптотического анализа (1.7) с помощью (2.10) (см. анализ системы (2.18)).

Предположим, что  $v_{n0}(x_n) > 0, \forall x_n \in (-1, 1)$ . Тогда из (2.20) получим, что  $p_{n0}(x_n) = 0, \forall x_n \in (-1, 1)$ , а из (2.11) найдем [5]  $v_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \sqrt{1 - x_n^2} > 0$ . Следовательно, имеем  $c_{n00}^r > 0$ . Видно, что при  $c_{n00}^r \leq 0$  соотношениям (2.11), (2.20) удовлетворяют функции  $v_{n0}(x_n) = 0, p_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \leq 0, \forall x_n \in (-1, 1)$ . Из второго уравнения (2.11) и (2.19) получим [5]  $u_{n0}(x_n) = c_{n0}^i \sqrt{1 - x_n^2}$ . Таким образом, решение

задачи (2.11), (2.19), (2.20) имеет вид  $\theta(\cdot)$  — функция Хэвисайда

$$(2.21) \quad v_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \theta(c_{n00}^r) \sqrt{1-x_n^2}, \quad u_{n0}(x_n) = c_{n00}^i \sqrt{1-x_n^2}, \\ p_{n0}(x_n) = c_{n00}^r \theta(-c_{n00}^r)$$

Из анализа системы альтернативных равенств и неравенств (2.18) вытекает, что при  $c_{n00}^r > 0$  (см. (2.21))  $v_{n0}(x_n) > 0$  и  $p_{nj}(x_n) = 0$ ,  $x_n \in (-1, 1)$ ,  $\forall j \geq 0$ , а знак  $v_{nj}(x_n)$ ,  $\forall j \geq 1$  несуществен. Поэтому из (2.12) с помощью (2.16), (2.19) и (2.20) при  $c_{n00}^r > 0$  получим [5]

$$(2.22) \quad v_{n1}(x_n) = \frac{\delta_n}{2\delta_0} c_{n01}^r x_n \sqrt{1-x_n^2}, \quad u_{n1}(x_n) = \frac{\delta_n}{2\delta_0} c_{n01}^i x_n \sqrt{1-x_n^2}$$

Аналогично из (2.13), (2.19) и (2.20) при  $c_{n00}^r > 0$  найдем [5]

$$(2.23) \quad v_{n2}(x_n) = \left[ A_n^r + \frac{1}{6} B_n^r (1+2x_n^2) \right] \sqrt{1-x_n^2} \\ u_{n2}(x_n) = \left[ A_n^i + \frac{1}{6} B_n^i (1+2x_n^2) \right] \sqrt{1-x_n^2}$$

$$(2.24) \quad A_n^r = c_{n20}^r - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\delta_k}{\delta_0} \right)^2 (\lambda_k U_{nk01}^r - \mu_k V_{nk01}^r) \\ B_n^r = \left( \frac{\delta_n}{\delta_0} \right)^2 c_{n02}^r$$

Для определения постоянных  $A_n^i$  и  $B_n^i$  достаточно в (2.24) индекс  $r$  заменить на  $i$ .

При  $c_{n00}^r < 0$  из анализа системы альтернативных равенств и неравенств (2.18) вытекает, что (см. (2.21))  $p_{n0}(x_n) < 0$  и  $v_{nj}(x_n) = 0$ ,  $x_n \in (-1, 1)$ ,  $\forall j \geq 0$ , а знак  $p_{nj}(x_n)$  при  $j \geq 1$  несуществен. Поэтому из (2.12), (2.13), (2.15) — (2.17), (2.19) и (2.20) при  $c_{n00}^r < 0$  получим

$$(2.25) \quad p_{n1}(x_n) = \delta_0^{-1} \delta_n c_{n01}^r x_n$$

$$(2.26) \quad p_{n2}(x_n) = A_n^r + B_n^r x_n^2$$

а функция  $u_{n1}(x_n)$  определяется из (2.22).

2°. Рассмотрим случай  $c_{n00}^r = 0$ , когда в нулевом приближении имеем  $v_{n0}(x_n) = p_{n0}(x_n) = 0$ ,  $\forall x_n \in (-1, 1)$  (см. (2.21)). При этом суммирование в системе равенств и неравенств (2.18) начинается с  $j = 1$ . Поэтому необходимо проанализировать системы уравнений (2.12) — (2.17) совместно с равенствами и неравенствами (2.18). Из (2.18) при  $c_{n00}^r = 0$  следует аналог соотношений (2.20)

$$(2.27) \quad p_{n1}(x_n) = 0, \quad v_{n1}(x_n) > 0; \quad p_{n1}(x_n) \leq 0, \quad v_{n1}(x_n) = 0$$

Предположим, что  $c_{n01}^r > 0$ . Тогда из вида выражения для  $v_{n1}(x_n)$  в (2.23), полученного при условии  $p_{nj}(x_n) = 0$ ,  $x_n \in (-1, 1)$ , можно предположить, что отрезок  $(-1, 1)$ , занятый трещиной, разбивается на отрезки  $(-1, b_{n1})$  и  $(b_{n1}, 1)$ , на которых выполняются соотношения  $v_n(x_n) = 0$  и  $v_n(x_n) > 0$ . Для удобства введем в (1.4) — (1.6) и (2.9) замены переменных

$$x_n = [1 + b_{n1} + (1 - b_{n1}) y]/2, \quad t = [1 + b_{n1} + (1 - b_{n1}) \tau]/2$$

При этом постоянная  $b_{n1}$  неизвестна и также может быть разложена по степеням  $\delta_0$

$$(2.28) \quad b_{n1} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{nj} \delta_0^j$$

В результате указанных преобразований для  $v_{n1}(x_n)$ ,  $x_n \in (\beta_{n0}, 1)$  при помощи (2.19), (2.27) из (1.4)—(1.6) и (2.9) получим

$$(2.29) \quad \int_{-1}^1 \frac{v'_{n1}(\tau) d\tau}{\tau - y} = -\pi \frac{\delta_n}{\delta_0} c_{n01}^r \frac{1 - \beta_{n0}}{4} [1 + \beta_{n0} + (1 - \beta_{n0})y],$$

$$v_{n1}(\pm 1) = 0$$

Заметим, что в (2.29) постоянная  $\beta_{n0}$  неизвестна и определяется из условия

$$(2.30) \quad p_{n1}(-1) = 0$$

Тогда из (2.29) получим [5]

$$(2.31) \quad v_{n1}(y) = \frac{\delta_n}{\delta_0} c_{n01}^r \frac{1 - \beta_{n0}}{4} \left(1 + \beta_{n0} + \frac{1 - \beta_{n0}}{2} y\right) \sqrt{1 - y^2} \theta(1 - y^2),$$

Для определения функции  $p_{n1}$  используем преобразованное указанным выше способом уравнение (1.4) и интеграл [6]

$$(2.32) \quad \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}(\tau - y)} = \begin{cases} 0, & |y| \leq 1 \\ -\frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}} \operatorname{sign} y, & |y| > 1 \end{cases}$$

В результате описанных преобразований получим

$$(2.33) \quad p_{n1}(y) = -\frac{\delta_n}{2\delta_0} c_{n01}^r \frac{\operatorname{sign} y}{\sqrt{y^2 - 1}} \left[ -(1 + \beta_{n0})y + (1 - \beta_{n0}) \left(\frac{1}{2} - y^2\right) \right] \theta(y^2 - 1)$$

Теперь при помощи (2.30) и (2.33) определим  $\beta_{n0} = -1/3$ . Подставив найденное значение  $\beta_{n0}$  в (2.31), (2.33) и вернувшись к переменной  $x_n$  ( $x_n = [1 + \beta_{n0} + (1 - \beta_{n0})y]/2$ ), при  $c_{n01}^r > 0$  будем иметь

$$(2.34) \quad v_{n1}(x_n) = \frac{\sqrt{3}\delta_n}{18\delta_0} c_{n01}^r (3x_n + 1) \sqrt{1 + 2x_n - 3x_n^2} \theta(1 + 2x_n - 3x_n^2)$$

$$p_{n1}(x_n) = \frac{\sqrt{3}\delta_n}{9\delta_0} c_{n01}^r (3x_n - 2) \sqrt{\frac{3x_n + 1}{x_n - 1}} \theta(3x_n^2 - 2x_n - 1)$$

Аналогично при  $c_{n00}^r = 0$  и  $c_{n01}^r < 0$  получим  $\beta_{n0} = 1/3$ , а для  $v_{n1}$  и  $p_{n1}$  — выражения (2.34), в которых изменены знаки при  $x_n$  и знаки правых частей равенств.

Заметим, что при  $c_{n01}^r > 0$  и  $c_{n01}^r < 0$  функции  $u_{n1}$  и  $u_{n2}$  определяются соответственно из соотношений (2.22)—(2.24). Получим теперь функцию  $v_{n2}$  для рассматриваемых случаев. Можно показать, что при  $c_{n00}^r = 0$  и  $c_{n01}^r > 0$  функция  $v_{n2}(y)$  удовлетворяет задаче

$$(2.35) \quad Fv'_{n2}(y) = -\pi \frac{1 - \beta_{n0}}{2} \left\{ \frac{1}{4} B_n^r [1 + \beta_{n0} + (1 - \beta_{n0})y]^2 + A_n^r \right\} +$$

$$+ \pi \frac{\delta_n}{\delta_0} c_{n01}^r \frac{1 - \beta_{n0}}{2} \left( y + \frac{\beta_{n0}}{1 - \beta_{n0}} \right) \beta_{n1}, \quad v_{n2}(\pm 1) = 0$$

Здесь необходимо отметить, что знак функции  $v_{n2}(y)$  при  $|y| \leq 1$  не влияет на выполнение первого неравенства в (2.18), а постоянная  $\beta_{n1}$  неизвестна и определяется из решения уравнения

$$(2.36) \quad p_{n2}(-1) = 0$$

Решение (2.35) при  $\beta_{n0} = -1/3$  имеет вид [5]

$$(2.37) \quad v_{n2}(y) = \frac{2}{3} \left[ A_n^r + \frac{1}{27} B_n^r (5 + 6y + 4y^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{\delta_n}{\delta_0} c_{n01}^r \beta_{n1} (1 - 2y) \right] \sqrt{1 - y^2}$$

В результате преобразования соответствующих уравнений для  $p_{n2}(y)$  получим

$$(2.38) \quad p_{n2}(y) = \frac{1}{2} \frac{\delta_n}{\delta_0} c_{n01}^r \beta_{n1} (1 - y) + \frac{1}{4} B_n^r [1 + \beta_{n0} + (1 - \beta_{n0}) y]^2 + \\ + A_n^r + \frac{2}{\pi (1 - \beta_{n0})^2} [\beta_{n1} Fv'_{n1}(y) + (1 - \beta_{n0}) Fv'_{n2}(y)]$$

Далее из (2.36) с помощью (2.31)–(2.33) и (2.37) при  $\beta_{n0} = -1/3$  найдем

$$(2.39) \quad \beta_{n1} = -\frac{4}{3} \left( A_n^r + \frac{1}{9} B_n^r \right) / \left( c_{n01}^r \frac{\delta_n}{\delta_0} \right)$$

Наконец, при помощи (2.39) из (2.37) и (2.38) окончательно получим

$$(2.40) \quad v_{n2}(\sigma_n) = \frac{\sqrt{3}}{9} \left[ A_n^r + \frac{1}{9} B_n^r (3\sigma_n + 1) \right] (3\sigma_n + 1) \times \\ \times \sqrt{1 + 2\sigma_n - 3\sigma_n^2} \theta(1 + 2\sigma_n - 3\sigma_n^2) \\ p_{n2}(\sigma_n) = \frac{\sqrt{3}}{9} \left[ A_n^r (3\sigma_n - 2) + \frac{1}{9} B_n^r (-5 - 15\sigma_n + 27\sigma_n^2) \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{3\sigma_n + 1}{\sigma_n - 1}} \theta(3\sigma_n^2 - 2\sigma_n - 1)$$

$$\sigma_n = x_n \operatorname{sign} c_{n01}^r$$

Аналогично при  $c_{n00}^r = 0$  и  $c_{n01}^r < 0$  для  $v_{n2}$  и  $p_{n2}$  получим формулы (2.39), (2.40).

Очевидно, что при  $c_{n00}^r = c_{n01}^r = 0$  из (2.12) (2.21) и (2.27) имеем

$$(2.41) \quad v_{nj}(x_n) = p_{nj}(x_n) = 0, \quad \forall x_n \in (-1, 1) \quad (j = 0, 1)$$

а функции  $u_{n1}(x_n)$  и  $u_{n2}(x_n)$  определяются также из соотношений (2.22) — (2.24). При этом функция  $v_{n2}(x_n)$  не определяется равенством из (2.23).

3°. Рассмотрим случай  $c_{n00}^r = c_{n01}^r = 0$ , когда выполнены равенства (2.41). При этом суммирование в (2.18) начинается с  $j = 2$  и для  $v_{n2}(x_n)$  и  $p_{n2}(x_n)$  справедлив аналог соотношений (2.20)

$$(2.42) \quad p_{n2}(x_n) = 0, \quad v_{n2}(x_n) > 0; \quad p_{n2}(x_n) \leq 0, \quad v_{n2}(x_n) = 0$$

Далее будет показано, что в зависимости от значения отношения  $A_n^r / B_n^r$  каждая трещина может иметь различную конфигурацию: один или два симметрично расположенных участка с сомкнувшимися берегами. Из уравнений (2.13), (2.15) и условий (2.19) следует четность функций  $v_{n2}(x_n)$ ,  $u_{n2}(x_n)$  и  $p_{n2}(x_n)$ .

Рассмотрим сначала случай, когда  $v_{n2}(x_n) = 0, \forall x_n \in (-1, 1)$ . Тогда из (2.13), (2.15) и (2.24) получим

$$(2.43) \quad v_{n2}(x_n) = 0, \quad p_{n2}(x_n) = A_n^r + B_n^r x_n^2$$

причем функции  $v_{n2}(x_n)$  и  $p_{n2}(x_n)$  из (2.43) удовлетворяют (2.42) при

$$(2.44) \quad A_n^r \leq 0, \quad B_n^r \leq 0 \quad \text{или} \quad A_n^r + B_n^r \leq 0, \quad B_n^r > 0$$

Рассмотрим случай, когда на отрезке  $(-1, 1)$ , занятом  $n$ -й трещиной, имеется один симметрично расположенный участок с раскрытыми берегами.

Пусть это будет отрезок  $(-b_{n2}, b_{n2})$ . При этом постоянная  $b_{n2}$  не произвольна, а удовлетворяет соотношениям : а)  $p_{n2}(b_{n2}) = 0$ ,  $b_{n2} < 1$  (см. (2.42)), либо б)  $b_{n2} = 1$ . Кроме того, из (2.42) следует, что  $v_{n2}(x_n) > 0$ ,  $x_n \in (-b_{n2}, b_{n2})$  и в случае а)  $p_{n2}(x_n) \leq 0$ ,  $x_n \in (-1, -b_{n2}) \cup (b_{n2}, 1)$ .

В случае а) решение первого уравнения (2.13), (2.24) с учетом условий  $v_{n2}(\pm b_{n2}) = 0$  имеет вид [5]

$$(2.45) \quad v_{n2}(x_n) = \frac{1}{2} [2A_n^r + \frac{1}{3}B_n^r(b_{n2}^2 + 2x_n^2)] \times \\ \times \sqrt{b_{n2}^2 - x_n^2} \theta(b_{n2}^2 - x_n^2) \\ p_{n2}(x_n) = |x_n| \{ [A_n^r + B_n^r(x_n^2 - \frac{1}{2}b_{n2}^2)] / \sqrt{x_n^2 - b_{n2}^2} \} \times \\ \times \theta(x_n^2 - b_{n2}^2)$$

При этом использовано, что  $p_{n2}(x_n) = 0$ ,  $x_n \in (-b_{n2}, b_{n2})$ .

Теперь из условия  $p_{n2}(b_{n2}) = 0$  найдем

$$(2.46) \quad b_{n2}^2 = -2A_n^r/B_n^r$$

Подставив выражение для  $b_{n2}$  из (2.46) в (2.45), получим

$$(2.47) \quad v_{n2}(x_n) = -\frac{B_n^r}{3} \left( -\frac{2A_n^r}{B_n^r} - x_n^2 \right)^{3/2} \theta \left( -\frac{2A_n^r}{B_n^r} - x_n^2 \right) \\ p_{n2}(x_n) = B_n^r |x_n| \left( \frac{2A_n^r}{B_n^r} + x_n^2 \right)^{1/2} \theta \left( \frac{2A_n^r}{B_n^r} + x_n^2 \right)$$

Далее, из (2.46), (2.47) и перечисленных выше условий (следствий (2.42)) и условия  $b_{n2}^2 \geq 0$  получим соотношения на постоянные  $A_n^r$  и  $B_n^r$

$$(2.48) \quad A_n^r > 0, B_n^r < 0, 2A_n^r + B_n^r < 0$$

Изучим случай б). Видно, что справедливо решение (2.45), в котором следует положить  $b_{n2} = 1$ . Поэтому из (2.45) найдем

$$(2.49) \quad v_{n2}(x_n) = [A_n^r + \frac{1}{6}B_n^r(1 + 2x_n^2)] \sqrt{1 - x_n^2}$$

Из системы (2.42) вытекает, что  $v_{n2}(x_n) > 0$ ,  $x_n \in (-1, 1)$ , причем последнее неравенство справедливо при выполнении одной из систем неравенств

$$(2.50) \quad A_n^r > 0, B_n^r < 0, 2A_n^r + B_n^r \geq 0, \text{ либо } B_n^r > 0, \\ 6A_n^r + B_n^r > 0, \text{ либо } A_n^r > 0, B_n^r = 0.$$

Из (2.44), (2.48) и (2.50) следует, что неисследованной осталась лишь область параметров  $A_n^r$  и  $B_n^r$ , подчиняющаяся неравенствам

$$(2.51) \quad A_n^r < 0, B_n^r > 0, A_n^r + B_n^r > 0, 6A_n^r + B_n^r \leq 0$$

Займемся исследованием этой области параметров. Предположим, что на отрезке  $(-1, 1)$  имеются две симметрично расположенные зоны  $(-b_{n2}, -a_{n2})$  и  $(a_{n2}, b_{n2})$ , на которых берега  $n$ -й трещины разомкнуты, т. е.  $v_{n2}(x_n) > 0$ . Можно показать, что решением задачи для первого уравнения из (2.13) с условиями  $v_{n2}(\pm b_{n2}) = v_{n2}(\pm a_{n2}) = 0$ ;  $p_{n2}(x_n) \leq 0$  при  $|x_n| < a_{n2}$  и  $|x_n| > b_{n2}$  являются постоянные  $b_{n2} = 1$ ,  $a_{n2}$  из

$$(2.52) \quad \frac{E(\sqrt{1 - a_{n2}^2})}{K(\sqrt{1 - a_{n2}^2})} = a_{n2}^2 \frac{3a_{n2}^2 - 1 + 6A_n^r/B_n^r}{a_{n2}^2 + 1 + 6A_n^r/B_n^r}$$

и функции

$$(2.53) \quad \begin{aligned} v_{n2}(x_n) &= \left\{ \frac{\sqrt{(1-x_n^2)(x_n^2-a_{n2}^2)}}{|x_n|} \left[ A_n^r + \frac{1}{3} B_n^r \left( \frac{1+a_{n2}^2}{2} + x_n^2 \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left( A_n^r + B_n^r \frac{1+a_{n2}^2}{6} \right) \left[ E(\kappa, \mu) - \frac{E(\mu)}{K(\mu)} F(\kappa, \mu) \right] \right\} \theta(x_n^2 - a_{n2}^2) \\ p_{n2}(x_n) &= - \frac{\theta(a_{n2}^2 - x_n^2)}{\sqrt{(x_n^2-1)(x_n^2-a_{n2}^2)}} \left\{ \left( B_n^r \frac{1+a_{n2}^2}{2} - A_n^r \right) \left[ \frac{E(\mu)}{K(\mu)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - x_n^2 \right] - \frac{1}{3} B_n^r \left[ 2(1+a_{n2}^2) \frac{E(\mu)}{K(\mu)} - a_{n2}^2 - 3x_n^4 \right] \right\} \\ \kappa &= \arcsin \left[ \frac{1}{x_n} \sqrt{\frac{x_n^2 - a_{n2}^2}{1 - a_{n2}^2}} \right], \quad \mu = \sqrt{1 - a_{n2}^2} \end{aligned}$$

где  $F(\kappa, \eta)$  и  $E(\kappa, \eta)$  — эллиптические,  $K(\eta)$  и  $E(\eta)$  — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода [7]. При выводе (2.53) было использовано выражение для разности интегралов

$$\begin{aligned} &\left( \int_{-b}^{-a} - \int_a^b \right) \frac{dt}{\sqrt{(b^2-t^2)(t^2-a^2)(t-x)}} = \\ &= \frac{\pi \operatorname{sign}(x^2 - a^2)}{\sqrt{(b^2-x^2)(a^2-x^2)}} \theta[(b^2-x^2)(a^2-x^2)] \end{aligned}$$

полученное согласно теории вычетов.

Решение уравнения (2.52) для разных значений  $A_n^r/B_n^r$  представлено на фиг. 2.

Отметим, что функция  $u_{n2}(x_n)$  в изученных в п. 3 случаях, как и ранее, определяется из (2.23), а величины  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  из (2.15), входящие в (2.17), (2.23), (2.24), (2.26), равны (см. (2.21))

$$(2.54) \quad (\lambda_k, \mu_k) = 1/2\pi (c_{k00}^r \theta(c_{k00}^r), c_{l00}^i)$$

4°. Займемся вычислением коэффициентов интенсивности  $k_{1n}^\pm$  и  $k_{2n}^\pm$ , а также углов направления первоначального распространения  $n$ -й трещины  $\theta_n^\pm$ . Здесь индексы  $\pm$  относятся соответственно к вершинам трещин с  $x_n = \pm 1$ . Следуя [2, 3], будем иметь

$$(2.55) \quad k_{1n}^\pm + ik_{2n}^\pm = \mp \lim_{x_n \rightarrow \pm l_n} \left\{ \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{l_n^2 - x_n^2}{l_n}} [v_n'(x_n) + iu_n'(x_n)] \right\}$$

Вводя для  $k_{jn}^\pm (j = 1, 2)$  безразмерные величины  $k_{jn}^{\pm'} = k_{jn}^\pm / (q_0 \sqrt{l_n})$ , из (1.1) и (2.55) найдем (штрихи опущены)

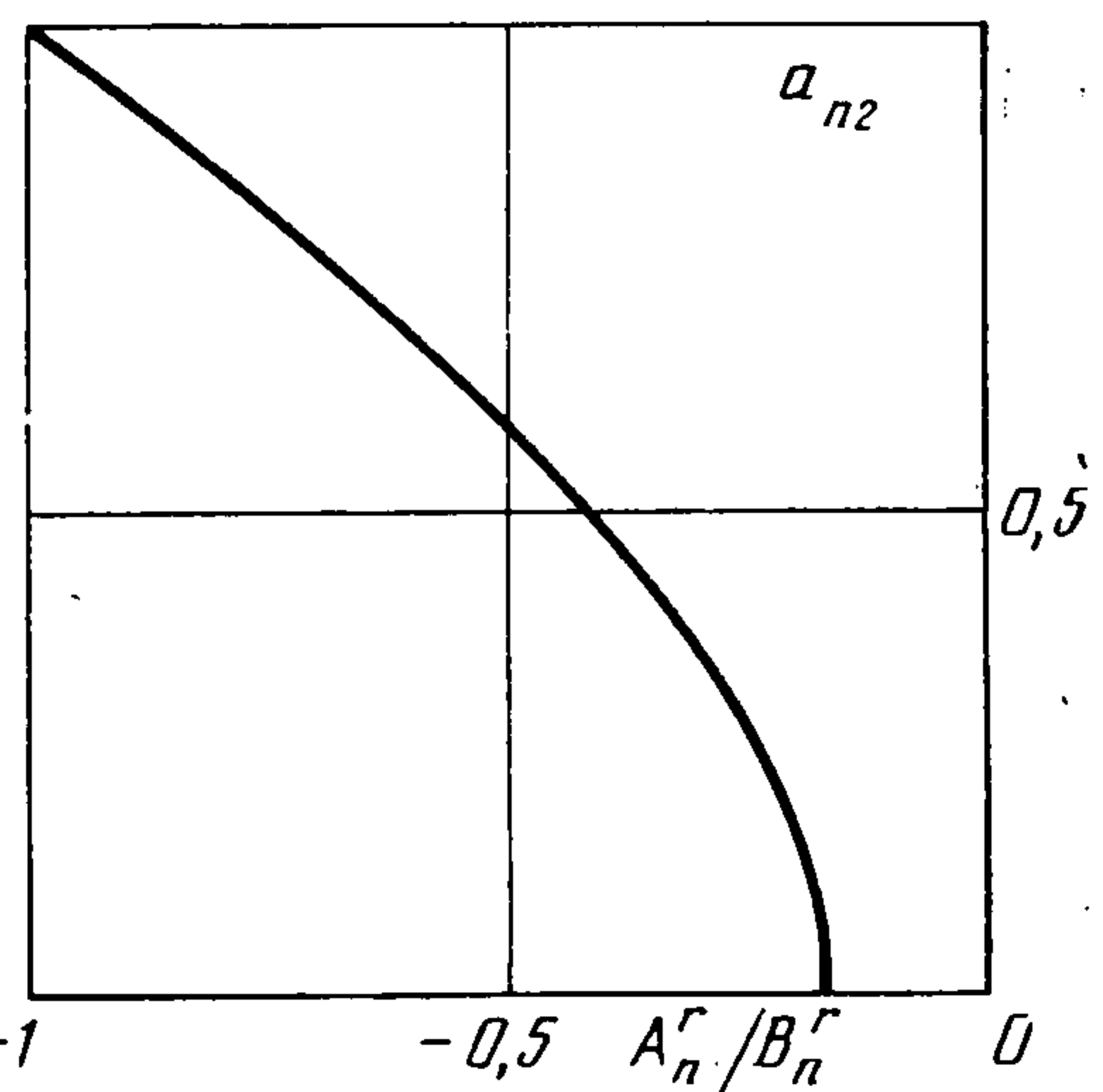
$$(2.56) \quad k_{1n}^\pm + ik_{2n}^\pm = \mp \lim_{x_n \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - x_n^2} [v_n'(x_n) + iu_n'(x_n)]$$

При помощи полученных решений вычислим коэффициенты интенсивности напряжений

$$(2.57) \quad k_{2n}^\pm = c_{n00}^i \pm 1/2 \delta_n c_{n01}^i + \delta_0^2 c_{n20}^i + 1/2 \delta_n^2 c_{n02}^i - \Delta^i + \dots$$

$$(2.58) \quad k_{1n}^\pm = c_{n00}^r \pm 1/2 \delta_n c_{n01}^r + \delta_0^2 c_{n20}^r + 1/2 \delta_n^2 c_{n02}^r - \Delta^r + \dots, \\ c_{n00}^r > 0; \quad k_{1n}^\pm = 0, \quad c_{n00}^r < 0$$

$$(2.59) \quad k_{1n}^\pm = \frac{\sqrt{3}}{9} \delta_n c_{n01}^r [\pm 7 - 3\theta(c_{n01}^r)] \left[ \frac{1 \pm \theta(c_{n01}^r)}{1 \pm 3\theta(c_{n01}^r)} \right]^{1/2} + \\ + \frac{4\sqrt{6}}{9} \left( \delta_0^2 c_{n20}^r + \frac{4}{9} \delta_n^2 c_{n02}^r - \Delta^r \right) + \dots, \quad c_{n01}^r \neq 0$$



Фиг. 2

При  $c_{n00}^r = c_{n01}^r = 0$  соответственно получим

$$(2.60) \quad \begin{aligned} k_{1n}^\pm = 0 & \text{ при } A_n^r \leq 0, B_n^r \leq 0; A_n^r + B_n^r \leq 0, B_n^r > 0 \\ & A_n^r > 0, B_n^r < 0, 2A_n^r + B_n^r < 0; \\ k_{1n}^\pm = \delta_0^2 c_{n20}^r + 1/2 \delta_n^2 c_{n02}^r - \Delta^r + \dots & \text{ при } A_n^r > 0, B_n^r < 0, \\ & 2A_n^r + B_n^r \geq 0; B_n^r \geq 0, 6A_n^r + B_n^r > 0 \end{aligned}$$

$$k_{1n}^\pm = \frac{1}{\sqrt{1-a_{n2}^2}} \left\{ \left[ \delta_n^2 \frac{1+a_{n2}^2}{2} c_{n02}^r - \delta_0^2 c_{n20}^r + \Delta^r \right] \times \right. \\ \times \left[ \frac{E(\sqrt{1-a_{n2}^2})}{K(\sqrt{1-a_{n2}^2})} - 1 \right] + \delta_n^2 c_{n02}^r \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( 2(1+a_{n2}^2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{E(\sqrt{1-a_{n2}^2})}{K(\sqrt{1-a_{n2}^2})} - a_{n2}^2 \right) \right] \left. \right\} + \dots$$

$$A_n^r < 0, B_n^r > 0, A_n^r + B_n^r > 0, 6A_n^r + B_n^r \leq 0$$

$$(2.61) \quad \Delta^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \delta_k^2 [c_{k00}^r \theta(c_{k00}^r) U_{nk01}^r - c_{k00}^i V_{nk01}^r]$$

Постоянная  $\Delta^i$  определяется из (2.61) заменой  $U_{nk01}^r$  ( $V_{nk01}^r$ ) на  $U_{nk01}^i$  ( $V_{nk01}^i$ ).

После подсчета коэффициентов интенсивности  $k_{jn}^\pm$  при помощи одной из формул (2.57)–(2.60), следуя [2], определим углы

$$(2.62) \quad \theta_n^\pm = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_{1n}^\pm - \sqrt{(k_{1n}^\pm)^2 + 8(k_{2n}^\pm)^2}}{4k_{2n}^\pm}$$

**3. Качественные и численные результаты.** Отметим ряд качественных свойств решения задачи. Из (2.10), (2.14)–(2.17) и (2.54) следует, что контактное давление  $q(x)$  испытывает влияние трещин, лишь начиная со второго приближения, т. е. величина этого влияния пропорциональна  $\delta_0^2$ . Нулевые члены разложений скачков перемещений  $v_n(x_n)$  и  $u_n(x_n)$  и напряжений  $p_n(x_n)$  (см. (2.10), (2.21)) на берегах рассматриваемой трещины определяются взаимным расположением трещины и области контакта, а также распределением давления и ориентацией трещины и не зависят от ее размера и присутствия других трещин (см. (2.14)). Из (2.55), (2.57) и (2.58) следует, что нулевые члены разложений размерных коэффициентов интенсивности  $k_{1n}^\pm$  и  $k_{2n}^\pm$  пропорциональны  $\sqrt{l_n}$ , а в остальном их свойства полностью аналогичны свойствам нулевых членов разложений  $v_n$ ,  $u_n$  и  $p_n$ . Первые члены разложений  $v_n$ ,  $u_n$ ,  $p_n$ ,  $k_{1n}^\pm$  и  $k_{2n}^\pm$ , кроме того, зависят от размеров трещины, а второй и последующие члены зависят также и от наличия других трещин.

В силу зависимости построенного решения лишь от интегралов  $c_{nkj}^r$  и  $c_{nkj}^i$  (см. (2.14)) возможен ряд обобщений. Аналогично могут быть исследованы задачи с учетом шероховатости поверхностей [8], трения скольжения (линейным и нелинейным) [9], трения с проскальзыванием и сцеплением [10], смазки [4], износа [11] и т. д. При этом нулевой член асимптотики давления  $q_0(x)$  будет определяться решением соответствующей задачи без учета трещин,  $q_1(x) = 0$ , а второй член разложения будет зависеть от наличия, расположения, размеров и ориентации трещин. При изучении задач с заранее неизвестной площадкой контакта ее границы с точностью до  $O(\delta_0)$  не зависят от наличия трещин. Выражения для функций

$v_n, u_n, p_n$  и постоянных  $k_{1n}^\pm$  и  $k_{2n}^\pm$  совпадут с соответствующими выражениями, полученными в п. 2 (при этом следует иметь в виду, что здесь роль величин  $c_{nkj}^r$  и  $c_{nkj}^i$  будут выполнять, вообще говоря, иные интегралы). Отличия возникнут лишь в случае задачи с заранее неизвестной областью контакта во вторых членах разложений этих функций и связаны с вариацией границ области контакта. Тем не менее и в этом случае решение задач для  $v_{n2}, u_{n2}$  и  $p_{n2}$  может быть приведено к виду, аналогично исследованному в п. 2.

Рассмотрим подробно результаты, полученные для задачи с трением в случае полного проскальзывания. При этом первое уравнение в (1.2) заменяется уравнением [4, 9]

$$(3.1) \quad f(x) - \lambda \int_a^x \psi(q(t)) dt + \frac{2}{\pi} \int_a^c q(t) \ln \frac{1}{|x-t|} dt - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \delta_k \int_{-1}^1 \{v_k'(t) W_k^r(t, x) - u_k'(t) W_k^i(t, x)\} dt = \delta^0$$

и, кроме того, видоизменяются правые части уравнений (1.4) (см. (3.3)). В (3.1)  $\psi = \psi(q)$  — достаточно гладкая функция давления, определяющая напряжения трения,  $\lambda$  — постоянная, играющая роль коэффициента трения. Решение уравнения (3.1) при  $\lambda \ll 1$  и  $\delta_0 \ll 1$  можно построить методами из [9]. При рассмотрении задачи с заранее неизвестной областью контакта к (3.1) необходимо добавить условия  $q(a) = q(c) = 0$ . Кроме того, проделав изложенный в п. 2 анализ, можно убедиться в справедливости формул (2.21)–(2.26), (2.34), (2.40), (2.43), (2.44), (2.46)–(2.54), (2.57)–(2.61) при соответствующей замене выражений для  $c_{nkj}^r + ic_{nkj}^i$ ,  $q_k(x)$  из (2.6), (2.15)–(2.17).

В частности, ограничиваясь рассмотрением двучленных разложений для задачи с заранее неизвестными границами  $a = -b$ ,  $c = b$  при  $\psi(q) = q$  и  $f(x) = (x+d)^2$ , получим [5]

$$(3.2) \quad q_0(x) = \cos \pi\gamma (b_0 + x)^{1/2-\gamma} (b_0 - x)^{1/2+\gamma}, \quad b_0 = (1-4\gamma^2)^{-1/2} \\ d_0 = -2\gamma b_0, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{2}; \quad q_1(x) = 0$$

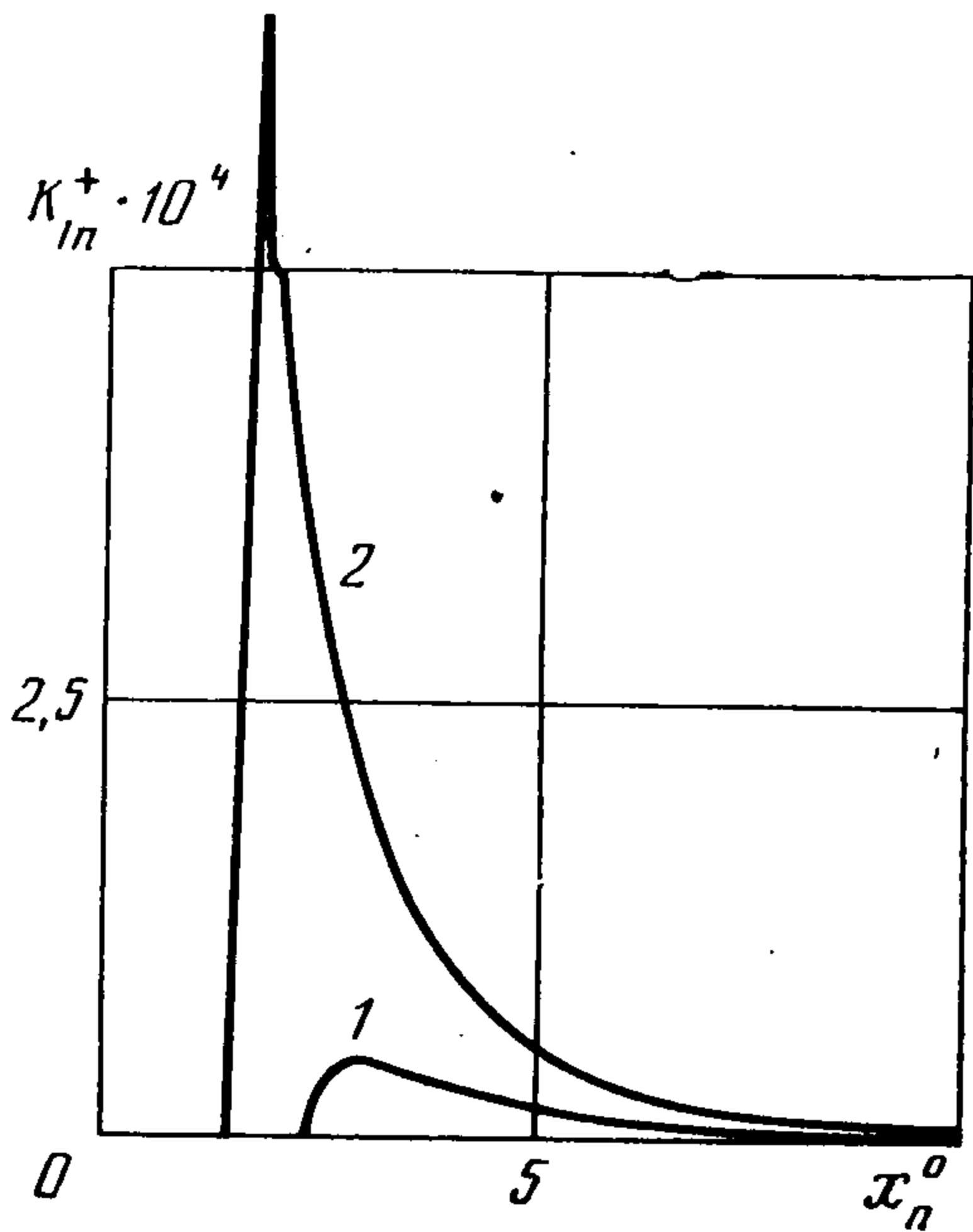
$$(3.3) \quad c_{nkj}^r + ic_{nkj}^i = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b q_k(t) [D_{nj}(t) - \lambda \overline{G_{nj}(t)}] dt$$

В (3.3) принято  $\tau(x) = -\lambda q(x)$ , а функции  $G_{nj}(t)$  — коэффициенты разложения по степеням  $\delta_n x_n$  ядра  $G_n(t, x_n)$ , определяющего влияние касательных напряжений на поверхности полуплоскости на напряженно-деформированное состояние упругого материала вблизи трещин. Функции  $G_n(t, x_n)$  и  $G_{nj}(t)$  определяются из соотношений [2]

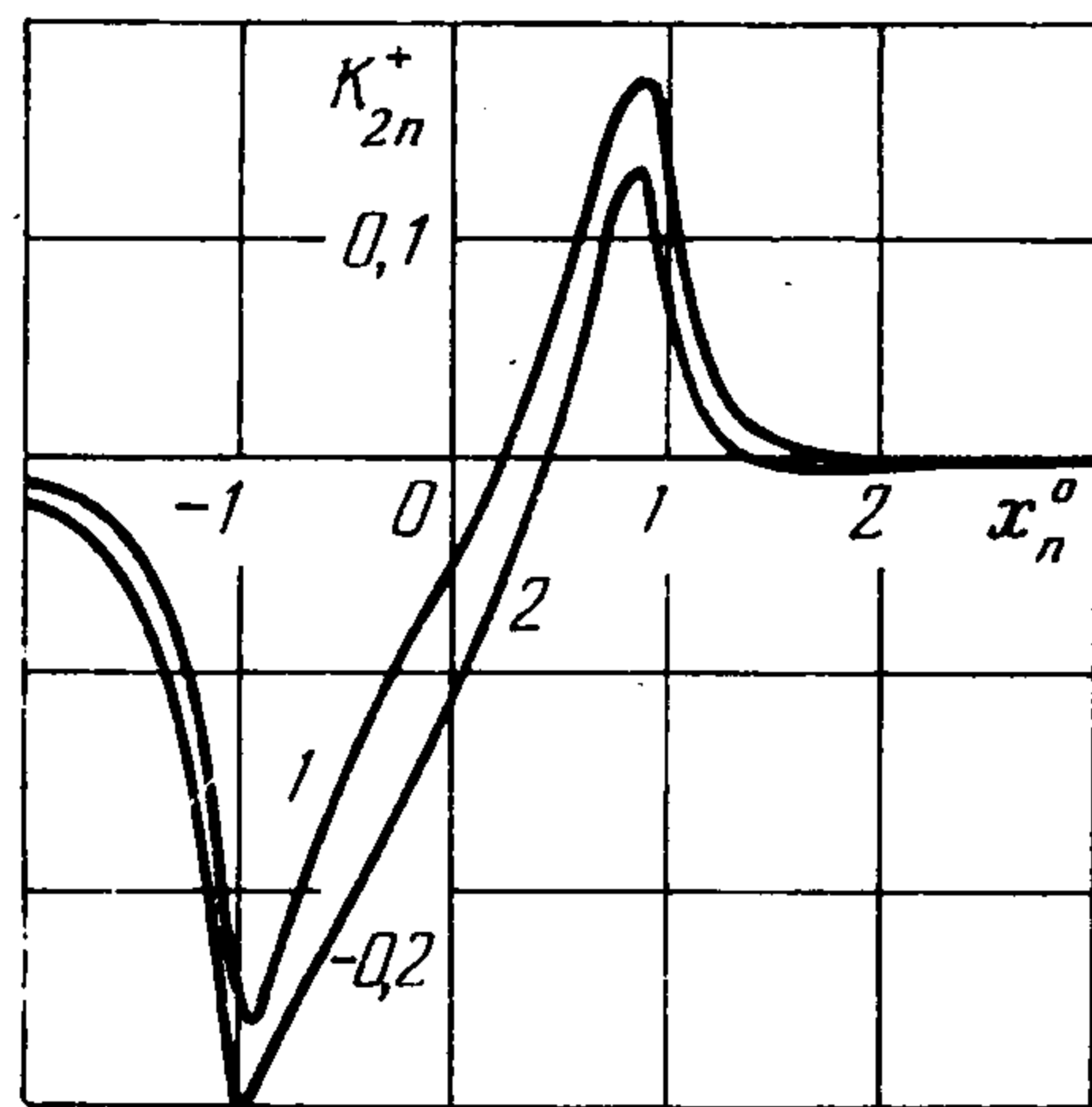
$$(3.4) \quad G_n(t, x_n) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{t - X_n} + \frac{1 - e^{-2i\alpha_n}}{t - \bar{X}_n} - e^{-2i\alpha_n} \frac{t - X_n}{(t - \bar{X}_n)^2} \right] \\ G_n(t, x_n) = \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_n x_n)^j G_{nj}(t)$$

Ниже приведены численные результаты для  $k_{1n}^+$  и  $k_{2n}^+$ , полученные на основании приведенных формул при  $y_n^0 = -0,2$  и  $\delta_n = 0,1$ , причем кривым 1 соответствует коэффициент трения  $\lambda = 0,1$ , а кривым 2 —  $\lambda = 0,2$ . При  $\lambda = 0,1$  имеем  $\gamma = 0,0159$ ,  $b_0 = 1,0005$ ,  $d_0 = -0,0318$ , а при  $\lambda = 0,2$  —  $\gamma = 0,0317$ ,  $b_0 = 1,002$ ,  $d_0 = -0,0635$ .

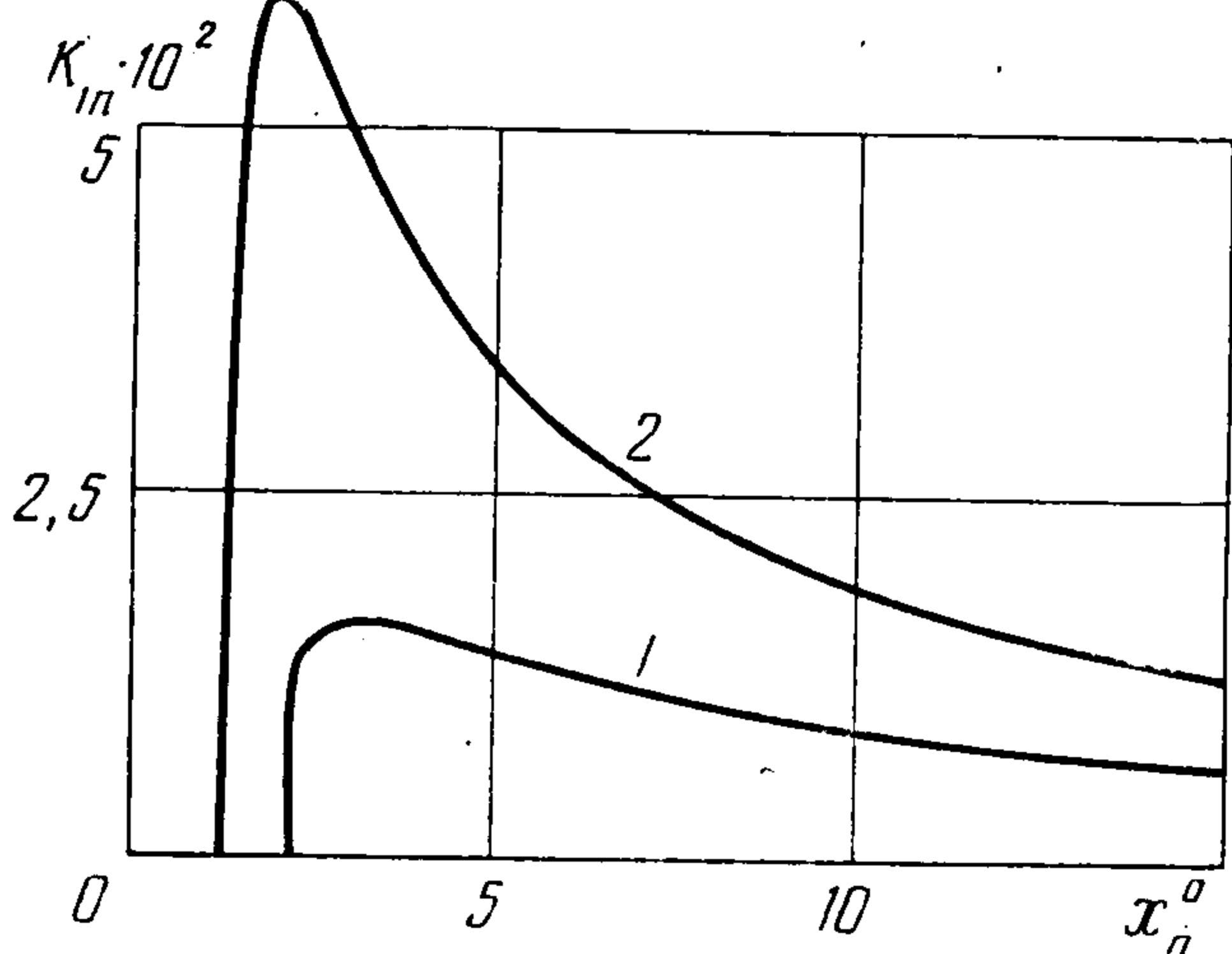
Кривые зависимости коэффициента интенсивности напряжений  $k_{1n}^+$  для случаев горизонтальной  $\alpha_n = 0$  (фиг. 3) и вертикальной  $\alpha_n = \pi/2$  (фиг. 4) трещин ведут себя



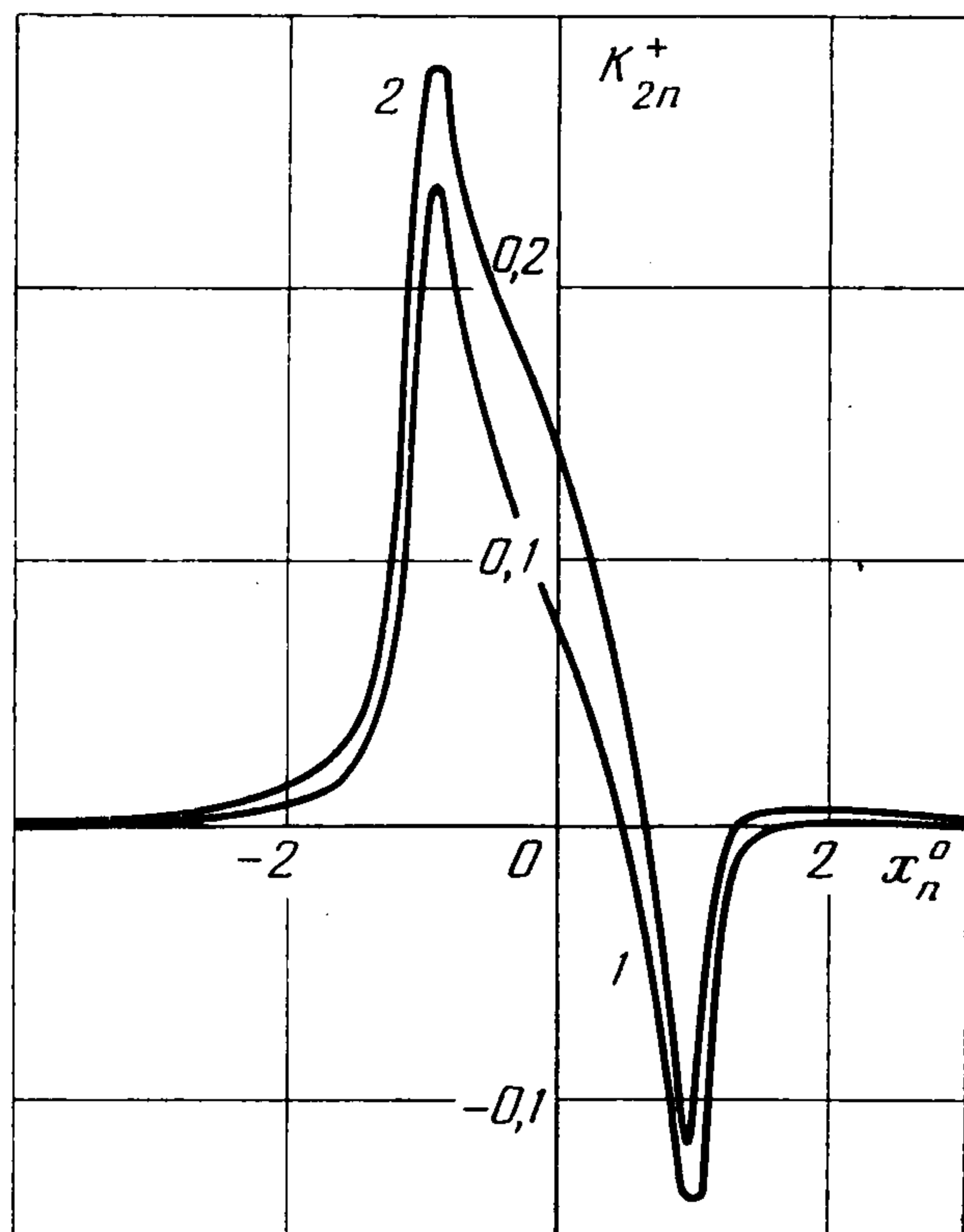
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

аналогично. В то же время при  $\alpha_n = \pi/2$  значение  $k_{1n}^+$  более чем на порядок выше, чем для случая  $\alpha_n = 0$ . Кроме того, величина  $k_{1n}^+$  существенно увеличивается с увеличением коэффициента трения и достигает максимума в непосредственной близости от границы области контакта со стороны, противоположной направлению движения штампа. При отсутствии трения ( $\lambda = 0$ ) напряжения всюду в полуплоскости сжимающие, трещины закрыты и, как следствие, коэффициент интенсивности  $k_{1n}^+$  тождественно равен нулю. С увеличением глубины залегания трещины  $y_n^0$  коэффициент интенсивности  $k_{1n}^+$  (при тех  $x_n^0$ , при которых  $k_{1n}^+ > 0$ ) для вертикальной трещины ( $\alpha_n = \pi/2$ ) монотонно убывает, а для горизонтальной трещины ( $\alpha_n = 0$ ) сначала возрастает до максимального значения, а затем убывает до нуля. В обоих случаях при  $x_n^0 \sim 1$  обращение в нуль  $k_{1n}^+$  происходит при  $|y_n^0| \sim 1$ .

Иначе ведет себя коэффициент интенсивности напряжений сдвига  $k_{2n}^+$ . В обоих случаях при  $\alpha_n = 0$  (фиг. 5) и  $\alpha_n = \pi/2$  (фиг. 6) кривые  $k_{2n}^+ = k_{2n}^+(x_n^0)$  достигают экстремальных значений в непосредственной окрестности границ области контакта. Кроме того, поведение величин  $k_{2n}^+$  в зависимости от  $y_n^0$  различно при различных  $x_n^0$ . Так, например, при  $x_n^0 = -5; -2; -1; 1$  функции  $k_{2n}^+(y_n^0)$  имеют один экстремум в случаях горизонтальной и вертикальной трещин, а при  $x_n^0 = 2,5$  для вертикальной трещины и  $x_n^0 = 5$  для горизонтальной трещины функции  $k_{2n}^+(y_n^0)$  имеют два экстремума. Очевидно, что сильное влияние на величину  $k_{2n}^+$  оказывает ориентация трещины и весьма слабое влияние — значение коэффициента трения  $\lambda$ .

Заметим, что при  $\delta_0 \ll 1$  величины  $k_{1n}^+$  и  $k_{1n}^-$  ( $k_{2n}^+$  и  $k_{2n}^-$ ) близки.

В заключение необходимо подчеркнуть, что полученные результаты свидетельствуют о сильном влиянии трения на процесс разрушения упругих тел и могут быть использованы при оценке долговечности (ресурса) на основании кинетического уравнения развития трещин типа Пэриса. Кроме того, отметим, что приведенный анализ задачи вполне объясняет результаты усталостных испытаний модельного подшипника качения [12, с. 39] при различном уровне напряжений трения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
4. Кудиш И. И. Контактно-гидродинамическая задача теории смазки для упругих тел с трещинами.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 5, с. 799—808.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
6. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск.: Наука, 1980. 121 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактных задач при учете поверхностной структуры взаимодействующих тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 58—70.
9. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотические методы в контактных задачах с нелинейным трением.— Прикл. механика, 1981, т. 17, № 6, с. 76—84.
10. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
11. Александров В. М., Коваленко Е. В. Математические методы в контактных задачах с износом.— В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела, М.: Наука, 1984, с. 77—89.
12. Влияние внешних факторов на контактную прочность при качении / Пинегин С.В., Шевелев И. А., Гудченко В. М. и др. М.: Наука, 1972. 102 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VII.1985