Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 6, 1986

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ РАСТУЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ, ПОДВЕРЖЕННОГО СТАРЕНИЮ

Потапов В. Д.

Исследуется устойчивость сжатого растущего стержня из вязкоупругого материала, обладающего свойством старения [1]. В соответствии с определением устойчивости динамических систем по Четаеву и Ляпунову методом, изложенным в [2], получены условия устойчивости стержня, растущего в течение конечного промежутка времени, на конечном и полубесконечном интервалах времени. Некоторые результаты численного анализа поведения такого стержня приведены в [3].

1. Вариационная постановка задачи об устойчивости растущего вязкоупругого стержня. Рассмотрим стержень, который растет как в продольном, так и в поперечном направлениях, причем его поперечное сечение в каждый момент времени обладает двумя осями симметрии. Закон изменения длины стержня, а также кинематика его роста в плоскости поперечного сечения считаются заданными [1], в результате чего можно определить время зарождения материала $\tau^*(\rho)$ в окрестности точки с координатами $\rho = \{x, y, z\}$ (в начальный момент времени длина стержня равна $l(0)$). По истечении времени t_1 длина, площадь поперечного сечения и момент инерции стержня остаются неизменными и соответственно равными $l_0, F_0(x), J_0(x)$ ($F_0(x) \neq 0, J_0(x) \neq 0$). На стержень действует однопараметрическая консервативная сжимающая нагрузка $q(t, x)$, которая вызывает в нем нормальную силу $N_0(t, x) = -\beta N_*(t, x)$ (β — параметр нагрузки). При прямолинейном положении равновесия под действием нагрузки в стержне появляются осевые перемещения $u_0(t, x)$, которые определяют траекторию невозмущенного движения. Допустим, что при отсутствии внешней нагрузки ось стержня имеет в плоскости xy малое начальное искривление $\alpha w_0(x)$ (α — малый параметр). В этом случае стержень при действии нагрузки получает дополнительные перемещения αu_1, αw_1. Движение стержня, которому соответствуют перемещения $u_0 + \alpha u_1$, αw_1, будем называть возмущенным, а перемещения αu_1, αw_1 — возмущениями. Искривление стержня αw_0 является внешним возмущением, относительно которого предполагается, что оно дважды дифференцируемо по x, причем и первая, и вторая производные суммируемы с квадратом на отрезке $[0, l(t)]$, где $l(t)$ — длина стержня в текущий момент времени t.

Определение. Невозмущенное движение стержня называется устойчивым по отношению к возмущению αw_0 при $0 \leqslant t < \infty$, если для любого числа $A > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(A) > 0$, что для любого начального искривления αw_0, удовлетворяющего неравенству

$$\alpha \sup_x |w_0(x)| < \delta, \quad x \in [0, l(t)]$$

возмущение перемещения αw_1 удовлетворяет условию

$$\alpha \sup_{t, x} |w_1(t, x)| < A, \quad x \in [0, l(t)]$$

Если движение стержня исследуется на конечном промежутке времени $[0, T]$ и задано критическое значение прогиба $|w|^*$, то в этом случае можно говорить о критическом времени t_*, определяя его как момент первого достижения прогибом $|\alpha w_1|$ величины $|w|^*$:

$$\alpha \sup_{t,x} |w_1(t, x)| < |w|^*$$

причем

$$0 \leqslant t < t^*, \ \alpha \sup_x |w_1(t_*, x)| = |w|^*, \ x \in [0, l(t)]$$

Стержень называется устойчивым на интервале времени $[0, T]$, если $t_* > T$.

Уравнение состояния для неоднородно-стареющего вязкоупругого материала при одноосном напряженном состоянии примем в виде [4]

$$\sigma(t,\rho) = E(t - \tau^*(\rho))\,\varepsilon(t,\rho) - \int_{\tau^*(\rho)}^{t} R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho))\varepsilon(\tau,\rho)\,d\tau \tag{1.1}$$

где σ, ε — напряжение и деформация в растущем стержне, $E(t)$ — модуль упругомгновенных деформаций, $R(t, \tau)$ — ядро релаксации стареющего вязкоупругого материала.

При определении деформаций воспользуемся модифицированной гипотезой плоских сечений [1, 3], в соответствии с которой

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(t, \rho) = \Delta\varepsilon^\circ(t, x) + \Delta\chi(t, x)\, y \\
&\Delta\varepsilon^\circ(t, x) = \varepsilon^\circ(t, x) - \varepsilon^\circ(\tau^*(\rho), x), \ \Delta\chi(t, x) = \\
&= \chi(t, x) - \chi(\tau^*(\rho), x) \\
&\varepsilon^\circ = \frac{\partial(u_0 + \alpha u_1)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial(u_0 + \alpha u_1)}{\partial x}\right]^2 + \alpha^2\left[\frac{\partial(w_1 + w_0)}{\partial x}\right]^2 - \right. \\
&\left. - \alpha^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right\}, \quad \chi = -\alpha\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

(ε°, χ — осевая деформация и кривизна дополнительного искривления стержня).

Деформацию ε° представим в виде

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^\circ = \varepsilon_0{}^\circ + \alpha\varepsilon_1{}^\circ + \alpha^2\varepsilon_2{}^\circ \\
&\varepsilon_0{}^\circ = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 \approx \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
&\varepsilon_1{}^\circ = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial x} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x} \\
&\varepsilon_2{}^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial(w_1 + w_0)}{\partial x}\right]^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\varepsilon = \Delta\varepsilon_0{}^\circ + \alpha(\Delta\varepsilon_1{}^\circ + \Delta\chi\cdot y) + \alpha^2\Delta\varepsilon_2{}^\circ \tag{1.3}$$

Рассматривая квазистатическую постановку задачи, введем функционал ($V(t)$ — объем стержня) [5]

$$\begin{aligned}
&Э = \int_{V(t)} \left(\frac{1}{2}E\varepsilon^2 - \varepsilon\mathbf{R}\varepsilon\right)dV - \beta\int_0^{l(t)} qu\,dx \\
&E\varepsilon^2 = E(t - \tau^*(\rho))\,\varepsilon^2(t,\rho), \quad \varepsilon\mathbf{R}\varepsilon = \\
&= \varepsilon(t,\rho)\int_{\tau^*(\rho)}^{t} R(t - \tau^*(\rho), \tau - \tau^*(\rho))\,\varepsilon(\tau,\rho)\,d\tau
\end{aligned}$$

С учетом равенства (1.3) разложим функционал Э по степеням параметра α:

$$Э = Э_0 + \alpha Э_1 + \alpha^2 Э_2 + \ldots$$

В дальнейшем ограничимся выписанными членами этого разложения.

Проварьируем функционал Э по перемещениям u_1, w_1, относящимся к текущему моменту времени t (перемещение u_0, отвечающее невозмущенному движению, не варьируется). Условием стационарности функционала Э служит равенство нулю его первой вариации:

$$\delta Э = \alpha \delta Э_1 + \alpha^2 \delta Э_2 = 0 \tag{1.4}$$

$$\delta Э_1 = \int\limits_{V(t)} \delta (\Delta \varepsilon_1{}^\circ + \Delta \chi \cdot y)(E - \mathbf{R}) \Delta \varepsilon_0{}^\circ \, dV - \int\limits_0^{l(t)} q \delta u_1 \, dx$$

$$\delta Э_2 = \int\limits_{V(t)} [\delta \Delta \varepsilon_2{}^\circ (E - \mathbf{R}) \Delta \varepsilon_0{}^\circ + \delta (\Delta \varepsilon_1{}^\circ + \Delta \chi \cdot y)(E - \mathbf{R})(\Delta \varepsilon_1{}^\circ + \Delta \chi \cdot y) \, dV$$

Принимая во внимание то, что выражения $(E - \mathbf{R}) \Delta \varepsilon_0{}^\circ$, $(E - R) \cdot (\Delta \varepsilon_1{}^\circ + \Delta \chi \cdot y)$ определяют соответственно напряжение σ_0 в невозмущенном движении и возмущение напряжения σ_1, после интегрирования по площади поперечного сечения стержня $F(t, x)$ получим

$$\delta Э_1 = \int\limits_0^{l(t)} \left(N_0 \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} - q \delta u_1 \right) dx \tag{1.5}$$

$$\delta Э_2 = \int\limits_0^{l(t)} \left[-M_1 \frac{\partial^2 \delta w_1}{\partial x^2} + N_0 \frac{\partial (w_1 + w_0)}{\partial x} \frac{\partial \delta w_1}{\partial x} \right] dx + $$

$$+ \int\limits_0^{l(t)} \left(N_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + N_1 \right) \frac{\partial \delta u_1}{dx} \, dx$$

$$M_1(t, x) = \int\limits_{F(t, x)} \sigma_1 (t, \rho) y \, dF, \quad N_1(t, x) = \int\limits_{F(t, x)} \sigma_1 (t, \rho) \, dF$$

В виду равновесности стержня в невозмущенном движении соблюдается равенство $\delta Э_1 = 0$. Тогда из соотношения (1.4) следует

$$\delta Э_2 = 0 \tag{1.6}$$

В силу независимости вариаций δu_1, δw_1 из (1.6) получим два соотношения. Из одного из них находится возмущение осевого перемещения стержня u_1, которое, как можно показать, тождественно равняется нулю, а второе соотношение имеет вид

$$\int\limits_0^{l(t)} \left[-M_1 \frac{\partial^2 \delta w_1}{\partial x^2} + N_0 \frac{\partial (w_1 + w_0)}{\partial x} \frac{\partial \delta w_1}{\partial x} \right] dx = 0 \tag{1.7}$$

Здесь [1]

$$M_1 = L(t, t, x) \chi (t, x) - \int\limits_{\tau_1^*(x)}^{t} \frac{\partial}{\partial \tau} L(t, \tau, x) \chi (\tau, x) \, d\tau$$

$$L(t, \tau, x) = \int\limits_{\tau_1^*(x)}^{\tau} L_1 (t - \xi, \tau - \xi) y^2 (\xi) \, dF(\xi)$$

$$\xi = \tau^* (\rho), \quad \tau_1^* (x) = \tau_1^* (\rho^\circ), \quad \rho^\circ = \{x, 0, 0\}$$

$$L_1 (t, \tau) = E(\tau) - \Gamma (t, \tau) > 0, \quad \Gamma (t, t) = 0$$

$$\partial L_1 (t, \tau) / \partial \tau = R(t, \tau)$$

$$L(t, t, x) = \int\limits_{\tau_1^*(x)}^{t} E(t - \xi) y^2 (\xi) \, dF(\xi) = EJ_* (t, x)$$

($EJ_* (t, x)$ — приведенная изгибная жесткость).

2. Устойчивость стержня на полубесконечном промежутке времени. *Теорема*. Если соблюдаются условия

$$\lim_{t\to\infty} N_*(t,x) = N^*(x) \neq 0, \quad x \in [0, l_0] \tag{2.1}$$

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = E_0, \quad L(t,t,x) \neq 0, \quad x \in [0, l(t)]$$

$$\sup_x \left| \frac{\partial}{\partial\tau} L(t,\tau,x) \right| \leqslant R_0(t,\tau) J_0(x), \quad \sup_t \int_0^t R_0(t,\tau)\,d\tau = R_0$$

и существует функция $R_*(t, \tau)$, такая, что при $T \to \infty$

$$\sup_{t\geqslant T} \int_T^t R_*(t,\tau)\,d\tau \to R$$

$$\int_T^t \sup_x \left| \frac{\partial}{\partial\tau} L(t,\tau,x) - R_*(t,\tau) J_0(x) \right| d\tau \to 0$$

то растущий стержень устойчив при $t \in [0, \infty)$, если параметр нагрузки β удовлетворяет неравенству $\beta < \lambda_1 (1 - R/E_0)$. Здесь λ_1 — минимальное собственное значение однородной краевой задачи, которой соответствует уравнение

$$\int_0^{l_0} E_0 J_0(x) w''^2(x)\,dx = \lambda \int_0^{l_0} N^*(x) w'^2(x)\,dx$$

Заметим, что такая краевая задача самосопряженная и ее собственные значения вещественны и положительны [6].

Доказательство. Примем в качестве вариации прогиба δw_1 в уравнении (1.7) сам прогиб w_1. Тогда (1.7) можно представить следующим образом (далее индекс 1 будем опускать, а производную по x обозначим штрихом):

$$\int_0^{l(t)} \Big\{ L(t,t,x) w''(t,x) - \int_{\tau_1^*(x)}^t \frac{\partial}{\partial\tau} L(t,\tau,x) w''(\tau,x)\,d\tau \Big] w''(t,x) - \tag{2.2}$$

$$- \beta N_*(t,x) [w(t,x) + w_0(x)]' w'(t,x) \Big\}\,dx = 0$$

Введем обозначения

$$\int_0^{l(t)} E_0 J_0(x) w''^2(t,x)\,dx = \| W''(t) \|^2, \; \Omega(t) = \sup_{\tau\in[0,t]} \| W''(\tau) \| \tag{2.3}$$

$$\int_0^{l(t)} E_0 J_0(x) w_0''^2(x)\,dx = \| W_0''(t) \|^2, \; \| W_0'' \| = \sup_{\tau\in[0,t_1]} \| W_0''(\tau) \|$$

Представим равенство (2.2) для момента времени $t > t_1$ следующим образом:

$$\int_0^{l_0} [E_0 J_0(x) w''^2(t,x) - \beta N^*(x) w'^2(t,x)]\,dx = \tag{2.4}$$

$$= \int_0^{l} \beta N^*(x) w_0'(x) w'(t,x)\,dx + I_1 + I_2 + I_3$$

Здесь

$$I_1 = \int_0^{l_0} \int_{\tau_1^*(x)}^t \frac{\partial}{\partial\tau} L(t,\tau,x) w''(\tau,x)\,d\tau w''(t,x)\,dx$$

$$I_2 = \int_0^{l_0} \beta [N_*(t,x) - N^*(x)] [w'(t,x) + w_0'(x)] w'(t,x)\,dx$$

$$I_3 = \int_0^{l_0} [E_0 J_0(x) - L(t,t,x)] w''^2(t,x)\,dx$$

В соответствии с условиями (2.1) для любого числа $A > 0$ найдется $T = T(A)$, такое, что при $t > T$

$$|E_0 J_0(x) - L(t, t, x)| = \Big| E_0 J_0(x) - \int\limits_{\tau_1^*(x)}^{t} E(t - \xi) y^2(\xi) dF(\xi) \Big| <$$
$$< A E_0 J_0(x), \quad |N^*(x) - N_*(t, x)| < A N^*(x)$$

Доопределяя $w''(\tau, x)$ при $0 \leqslant \tau < \tau_1^*$: $w''(\tau, x) \equiv 0$, получим оценки

$$I_1 \leqslant \int\limits_0^{l_0}\int\limits_0^{T} R_0(t, \tau) J_0(x) w''(\tau, x) d\tau w''(t, x) dx +$$
$$+ (A + R/E_0) \| W''(t) \| \Omega(t) \leqslant (A + R/E_0) \| W''(t) \| \Omega(t) +$$
$$+ \| W''(t) \| \Omega(T) R_0/E_0, \quad I_3 \leqslant A \| W''(t) \|^2,$$
$$I_2 \leqslant A\beta\lambda_1^{-1} \| W''(t) \| (\| W''(t) \| + \| W_0'' \|)$$

Принимая во внимание соотношение [6]

$$\int\limits_0^{l_0} E_0 J_0(x) w''^2(x) dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_0^{l_0} N^*(x) w'^2(x) dx \tag{2.5}$$

вместо равенства (2.4) имеем

$$\Big[1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - A\Big(1 + \frac{\beta}{\lambda_1}\Big)\Big] \| W''(t) \| - \Big(A + \frac{R}{E_0}\Big) \Omega(t) \leqslant \tag{2.6}$$
$$\leqslant \frac{\beta}{\lambda_1} (1 + A) \| W_0'' \| + \frac{R_0}{E_0} \Omega(T)$$

Можно показать, что величина $\Omega(T)$ ограничена.

Рассмотрим промежуток времени $[0, t_1]$. На основании теоремы о среднем можно записать

$$\int\limits_0^{l(t)} L(t, t, x) w''^2(t, x) dx = H_1(t, \eta_1) \| W''(t) \|^2$$

$$\int\limits_0^{l(t)} L(t, t, x) w_0''^2(x) dx = H_0(t, \eta_0) \| W_0''(t) \|^2$$

причем

$$H_i(t, \eta_i) = \frac{L(t, t, x)}{E_0 J_0(x)}\Big|_{x=\eta_i}, \quad \eta_i \in [0, l(t)], \quad i = 0,1$$

Из равенства (2.2) при учете соотношения (2.5) следует

$$\| W''(t) \| \leqslant C_1 \| W_0'' \| + C_2 \int\limits_0^{t} R_0^*(\tau) \| W''(\tau) \| d\tau \tag{2.7}$$

$$R_0^*(\tau) = \sup_{t \in [0, t_1]} \frac{R_0(t, \tau)}{E_0}$$

$$C_1 = \sup_t \frac{\beta}{\lambda_1(t)} \sqrt{\frac{H_0(t, \eta_0)}{H_1(t, \eta_0)}} \Big(1 - \frac{\beta}{\lambda_1(t)}\Big)^{-1},$$

$$C_2 = \sup_t \frac{1}{H_1(t, \eta_1)} \Big(1 - \frac{\beta}{\lambda_1(t)}\Big)^{-1}$$

Здесь предполагается, что $\beta < \lambda_1(t)$ для любого $t \in [0, t_1]$.

Если функция $R_0(t, \tau)$ имеет слабую особенность при $t = \tau$, то в неравенстве (2.7) предварительно нужно перейти к итерированному ядру [7], которое, начиная с некоторого номера n, является регулярным.

Применяя лемму Гронуолла—Беллмана, найдем

$$\| W''(t) \| \leqslant C_1 \| W_0'' \| \exp \Big[C_2 \int\limits_0^{t} R_0^*(\tau) d\tau \Big], \quad t \in [0, t_1]$$

Аналогично может быть доказана ограниченность функции $\Omega(t)$ при $t_1 < t \leqslant T$.

Таким образом, $\| W''(t) \| \leqslant \| W_0'' \| \Phi(t)$, где $\Phi(t)$ — некоторая ограниченная функция. В результате из соотношения (2.6) имеем

$$\left[1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{R}{E_0} - A\left(2 + \frac{\beta}{\lambda_1}\right)\right] \Omega(t) \leqslant \left[\frac{\beta}{\lambda_1}(1 + A) + \Phi(T)\right] \| W_0'' \| \tag{2.8}$$

На основании теоремы о среднем запишем

$$\| W''(t) \| = E_0 J_0 (x_0(t)) \; \| w''(t) \|^2 \tag{2.9}$$

$$\int_0^{l_0} N^*(x) w'^2(t, x)\, dx = N^*(x_1, t) \, \| w'^2(t) \|$$

$$\| w'(t) \|^2 = \int_0^{l_0} w'^2(t, x)\, dx, \quad \| w''(t) \|^2 = \int_0^{l_0} w''^2(t, x)\, dx$$

С учетом неравенства (2.5) получим

$$N^*(x_1(t)) \, \| w'(t) \|^2 \leqslant E_0 J_0 (x_0(t)) \, \| w''(t) \|^2 / \lambda_1 \tag{2.10}$$

Из (2.8) — (2.10) следует, что при

$$\beta < (1 - R/E_0) \lambda_1 \tag{2.11}$$

функция $w(t, x)$ имеет суммируемые с квадратом на отрезке $[0, l_0]$ первую и вторую производные.

Располагая начало координат на том конце, где прогиб стержня w равен нулю, запишем

$$|w(t, x)| = \left| \int_0^x w'(t, x)\, dx \right| \leqslant \int_0^x |w'(t, x)|\, dx \leqslant \sqrt{l_0} \, \| w'(t) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{l_0} \sup_t \| w'(t) \|.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1°. Если растущий стержень армированный, причем материал арматуры подчиняется закону Гука $\sigma_a = E_a \varepsilon_a$, то условие (2.11) остается справедливым и в этом случае, только под λ_1 понимается минимальное собственное значение однородной краевой задачи, которой соответствует равенство

$$\int_0^{l_0} [E_0 J_0(x) + E_a J_a(x)] \, w''^2(x)\, dx = \lambda \int_0^{l_0} N^*(x) \, w'^2(x)\, dx$$

Здесь $J_a(x)$ — момент инерции арматуры в поперечном сечении стержня.

2°. Если внешняя нагрузка многопараметрическая и такая, что

$$N_*(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i N_i^*(x)$$

то условие устойчивости стержня запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\lambda_i} < 1 - \frac{R}{E_0}$$

где λ_i — минимальное собственное значение однородной краевой задачи, которой отвечает равенство

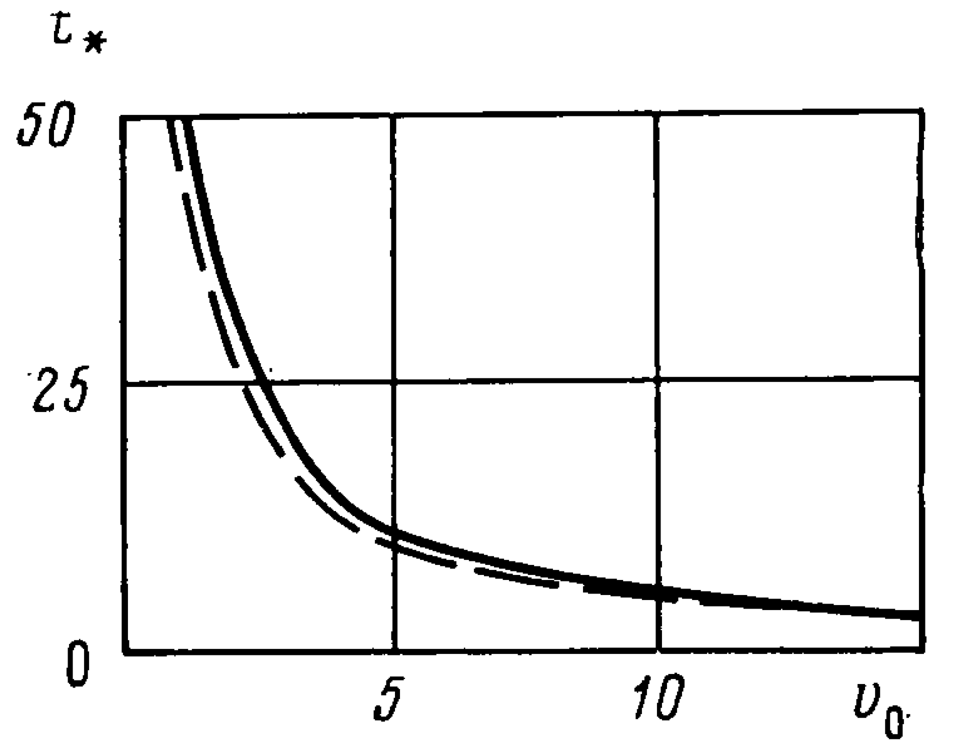
$$\int_0^{l_0} E_0 J_0(x) \, w''^2(x)\, dx = \lambda \int_0^{l_0} N_i^*(x) \, w'^2(x)\, dx$$

3°. Если характеристики материала инвариантны относительно начала отсчета времени, т. е. $L_1(t, \tau) = E_0 - \Gamma(t - \tau)$, то при $\tau > t_1$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L(t, \tau, x) = R(t - \tau) J_0(x), \quad R = \int_0^{\infty} R(\theta)\, d\theta, \quad R(t - \tau) = \frac{\partial \Gamma(t - \tau)}{\partial (t - \tau)}$$

В этом случае критическое значение параметра нагрузки определяется для растущего стержня так же, как для упругого стержня с длительным модулем упругости $E_* = E_0 - R$.

3. Устойчивость растущего стержня на конечном интервале времени. Устойчивость растущего вязкоупругого стержня на конечном промежутке времени $[0, T]$ может быть исследована при помощи соотношения (2.7), из которого при заданных оценке начального искривления w_0 и предельном прогибе w^* получаются оценки критического времени t_* или критических значений других параметров, в частности значения скоростей, характеризующих рост стержня, и т. п.



В качестве примера рассмотрим стержень, у которого один конец (при $x = 0$) жестко защемлен, а другой (при $x = l(t)$) — свободен. Начальное искривление оси стержня описывается параболой $w_0(x) = ax^2$. Стержень имеет постоянное поперечное сечение и находится под действием собственного веса. Рост стержня происходит только в осевом направлении с экспоненциальной скоростью: $v(t) = v_0 e^{-\alpha t}$.

Заметим, что нормальная сила на свободном конце стержня равна нулю, однако это не отразится на окончательных результатах.

Модуль упругости материала постоянный и равен E_0, а ядро релаксации имеет вид [1]

$$R(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau}\{\omega(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]\}, \quad \omega(\tau) = C_0 + A_0 e^{-b\tau}$$

При принятых предположениях справедливы равенства

$$H_i(t, \eta_i) \equiv 1, \ \|W''(t)\|^2 = E_0 J_0 \|w''(t)\|^2$$
$$\|W_0''(t)\|^2 = E_0 J_0 \|w_0''(t)\|^2 = E_0 J_0 (2a\sqrt{l(t)})^2$$

Соотношение (2.7) принимает вид

$$\left(1 - \frac{q}{\lambda_1(t)}\right)\|w''(t)\| \leqslant \frac{q}{\lambda_1(t)} 2a\sqrt{l(t)} + \int_0^t \frac{R_0(t, \tau)}{E_0}\|w''(\tau)\| d\tau \tag{3.1}$$
$$\lambda_1(t) \approx 7{,}84 E_0 J_0 / l^3(t)$$

По норме $\|w''(t)\|$ может быть получена оценка величины прогиба стержня

$$|w'(t, x)| = \left|\int_0^x w''(t, x)\,dx\right| \leqslant \int_0^x |w''(t, x)|\,dx \leqslant l^{1/2}(t)\frac{\Omega(t)}{E_0 J_0}$$

$$|w(t, x)| = \left|\int_0^x w'(t, x)\,dx\right| \leqslant l^{3/2}(t)\frac{\Omega(t)}{E_0 J_0} \tag{3.2}$$

Используя соотношения (3.1) и (3.2), можно найти оценку значения критического времени t_*. При этом

$$R_0(t, \tau) = bA_0 + (\gamma C_0 + \gamma A_0 - bA_0)\, e^{-\gamma(t-\tau)}$$

Результаты решения задачи в виде зависимости t_* от параметра v_0, найденные при значениях постоянных $l(0) = 0$, $C_0/E_0 = 0{,}075$, $A_0/E_0 = 0{,}75$, $\gamma = 0{,}02 \cdot 1$/сут, $b = 0{,}005 \cdot 1$/сут, $l_0 = v_0/\alpha = 50$ м, $q = 0{,}255\lambda_1$, $a = 4 \cdot 10^{-5}$м$^{-1}$, показаны на фигуре в виде сплошной кривой, которая отвечает значению предельного прогиба w^*, равного 0,01 м (время t_* измеряется в сутках, а v_0 — в м/сут). Представленный график свидетельствует о существенном влиянии скорости наращивания стержня на величину критического времени.

Зависимость w^* от t_* можно получить в более обозримой форме, для чего запишем неравенство (3.1) следующим образом:

$$\| w''(t) \| \leqslant \Phi(t) + \varphi(t) \int_0^t R_0^*(\tau) \| w''(\tau) \| d\tau$$

$$\varphi(t) = [1 - q\lambda_1^{-1}(1 - e^{-\alpha t})^3]^{-1}, \quad \Phi(t) = 2\, a l_0^{1/2} q \lambda_1^{-1} (1 - e^{-\alpha t})^{3,5} \varphi(t),$$
$$R_0^*(\tau) = \gamma(C_0 + A_0) / E_0$$

Учитывая монотонное изменение функций $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ с увеличением времени t, для оценки t_* имеем трансцендентное уравнение

$$w^* = l_0^{3/2} \Phi(t_*)(1 - e^{-\alpha t_*})^{3/2} \exp[t_* \varphi(t_*) \gamma(C_0 + A_0)/E_0] \tag{3.3}$$

Выразив α через v_0, при фиксированном значении w^* получим отсюда зависимость между t_* и параметром v_0, которая на фигуре показана штрихами. Сопоставление приведенных графиков свидетельствует о близости результатов, которые дают соотношения (3.1), (3.2) и (3.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.*, *Потапов В. Д.* Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 4, с. 799—803.
2. *Потапов В. Д.* Устойчивость тел из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 4, с. 648—653.
3. *Арутюнян Н. Х.*, *Михайлов М. Н.*, *Потапов В. Д.* Об устойчивости растущего вязкоупругого армированного стержня, подверженного старению.— ПМТФ, 1984, № 5, с. 143—151.
4. *Арутюнян Н. Х.*, *Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 348 с.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
7. *Дроздов А. Д.*, *Колмановский В. Б.*, *Потапов В. Д.* Устойчивость стержней из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 177—187.

Москва

Поступила в редакцию
18.X.1985