УДК 539.3 : 534.1

ХАРАКТЕР ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧЕК В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Гусейн-Заде М. И.

Исследуется характер излучения звука в сжимаемой жидкости вне сферы, полностью охватывающей колеблющуюся оболочку. Используется возможность представления точного решения задачи в элементарных функциях. Из полученных формул следует, что при удалении от сферы давление описывается убывающей по степенному или полиномиальному закону функцией с осцилляцией, причем характер осцилляции зависит от частоты вынужденных колебаний. Установлено, что интенсивность звука представляется в виде полинома с положительными коэффициентами относительно квадрата обратной величины расстояния от центра сферы. Простое представление для интенсивности звука позволило исследовать характер излучения от сферической поверхности в зависимости от частоты и волнового числа. Исследовано ближнее поле, выяснено влияние на него сжимаемости жидкости. Получены простые формулы для давления в дальнем поле.

Задача о вынужденных колебаниях сжимаемой жидкости вне сферической поверхности рассматривалась неоднократно [1—3]. Тем не менее представляет интерес остановиться на некоторых вопросах, важных для исследования характера излучения звука от поверхности. Выясняется, в частности, что распространенное предположение об экспоненциальном затухании давления в жидкости при колебании в ней оболочки [4—7] [1] неправомерно.

Исследуем вынужденные колебания сжимаемой жидкости вне сферы S радиуса R, в которую целиком заключена колеблющаяся оболочка, находящаяся под действием поверхностной нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$. В случае сферической оболочки сфера S совпадает с оболочкой. В случае произвольной оболочки эта сфера находится в ближайшей окрестности оболочки (причем, в отдельных точках может совпадать с ней).

Колебания жидкости вне оболочки полностью определяются ее нормальными перемещениями, для нахождения которых нужно решать задачу о совместных колебаниях оболочки и жидкости. При сложной форме оболочки это далеко не простая задача. В случае сферической оболочки метод разделения переменных позволяет получить решение в виде разложения по сферическим функциям [8]. Однако здесь нет необходимости останавливаться на полном решении задачи о колебании оболочки в жидкости.

Колебания жидкости вне сферы S в сферической системе координат $\bar r$, θ, φ определяются потенциалом смещений $\Phi(\bar r, \theta, \varphi)$ (временная координата всюду опущена), который удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Phi(\bar r, \theta, \varphi) + \bar k^2\Phi(\bar r, \theta, \varphi) = 0, \quad \bar k^2 = \omega^2/a^2$$

(ω — частота колебаний, a — скорость звука в жидкости) при условии, что при $\bar r = R$ (R — радиус сферы) производная по $\bar r$ от $\Phi(\bar r, \theta, \varphi)$ равна нормальным смещениям на сфере S, а на бесконечности выполняется условие излучения Зоммерфельда.

Метод разделения переменных позволяет представить решение этой задачи в виде разложения по сферическим функциям. Исследуем поле давления в жидкости, соответствующее одному члену разложения. В задачах об излучении звука такое исследование имеет важное значение в связи с резонансными явлениями, которые проявляются в резком возрастании смещений и давлений на так называемых резонансных частотах. На таких частотах основной вклад в величины смещений и давлений дает резонирующая гармоника.

Давление в жидкости, соответствующее определенному члену разложения по сферическим гармоникам, представляется в виде

$$p_{nm}(r, \theta, \varphi) = p_n(1)\,\Psi_n(k, r)\,P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi \tag{1}$$

$$\Psi_n(k, r) = r^{-1/2}H_{n+0,5}(kr)/H_{n+0,5}(k), \quad k = \bar kR, \quad r = \bar r/R$$

---

[1] См. также: *Васильев Д. Г., Симонов И. В.* Асимптотические оценки комплексных частот колебаний оболочки в жидкости.— Препринт Ин-та пробл. механ. АН СССР. М., 1981, № 186. 67 с.

Величина $p_n(1)$, равная максимальному значению давления на сфере S, зависит от параметров, характеризующих оболочку и жидкость; на ее значении отражаются резонансные свойства колебаний оболочки в жидкости. Величина $P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi$ дает угловое распределение давления. Зависимость $p_{nm}(r, \theta, \varphi)$ от безразмерного расстояния r определяется функций $\Psi_n(k, n)$.

Для характеристики поля звукового давления большое значение имеет величина интенсивности звука (ρ — плотность жидкости, p — давление)

$$I = |p|^2/(2\rho a)$$

Интенсивность звука равна потоку энергии, переносимой волной через единичную площадку, перепендикулярную направлению распространения волны. Для интенсивности звука, отвечающей полю давления (1), получим выражение

$$I^{(n,m)} = \frac{1}{2\rho a}|p_n(1)|^2 |\Psi_n(k, r)|^2 |P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi|^2 \tag{2}$$

Величина $|p_n(1)|^2/(2\rho a)$ определяет максимальное значение интенсивности звука на сфере S, а величина $|P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi|^2$ — ее угловое распределение.

Функции $\Psi_n(k, r)$, $\Phi_n(k, r) = |\Psi_n(k, r)|^2$, характеризующие зависимость от r давления и интенсивности звука в жидкости, полностью определяются значениями только параметров k и n. Это позволяет исследовать характер излучения звукового давления от сферы S без определения значения $p_n(1)$, для нахождения которого потребовалось бы полное решение задачи о совместных колебаниях оболочки и жидкости.

Преобразуем $\Psi_n(k, r)$, $\Phi_n(k, r)$, воспользовавшись выражениями функций Ганкеля полуцелого порядка через элементарные функции.

Следует заметить, что представление решения рассматриваемой задачи через элементарные функции имеется [1, 2]. Результаты данной работы можно было бы получить и из соотношений, приведенных в [1, 2], без использования функций Ганкеля.

Имеем

$$\operatorname{Re}\Psi_n(k, r) = \frac{1}{F_n(k)}\frac{1}{r}[E_n(k, r)\cos k(r-1) + G_n(k, r)\sin k(r-1)] \tag{3}$$

$$\operatorname{Im}\Psi_n(k, r) = \frac{1}{F_n(k)}\frac{1}{r}[-G_n(k, r)\cos k(r-1) + E_n(k, r)\sin k(r-1)]$$

$$\Phi_n(k, r) = \frac{1}{F_n(k)}\frac{1}{r^2}F_n(kr)$$

$$E_n(k, r) = Q_n^{(1)}(kr)Q_n^{(1)}(k) + Q_n^{(2)}(kr)Q_n^{(2)}(k)$$

$$G_n(k, r) = Q_n^{(1)}(kr)Q_n^{(2)}(k) - Q_n^{(2)}(kr)Q_n^{(1)}(k)$$

$$F_n(kr) = [Q_n^{(1)}(kr)]^2 + [Q_n^{(2)}(kr)]^2$$

$$Q_n^{(1)}(x) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\nu (n+2\nu)!}{(2\nu)!\,(n-2\nu)!\,(2x)^{2\nu}}$$

$$Q_n^{(2)}(x) = \sum_{\nu=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^\nu (n+2\nu+1)!}{(2\nu+1)!\,(n-2\nu-1)!\,(2x)^{2\nu+1}}$$

Видно, что $\operatorname{Re}\Psi_n(k, r)$, $\operatorname{Im}\Psi_n(k, r)$ представляют собой сумму произведений полиномов степени $n+1$ относительно $1/r$ на $\cos k(r-1)$ и $\sin k(r-1)$. Таким образом, функции $\operatorname{Re}\Psi_n(k, r)$, $\operatorname{Im}\Psi_n(k, r)$, характеризующие изменение давления по r, убывают по r с осцилляцией. Характер осцилляции зависит от безразмерной частоты k.

Характер излучения звука вблизи сферы наиболее просто установить на основании изучения зависимости интенсивности звука $I^{(n,m)}$ от r, k, n, которая определяется функцией $\Phi_n(k, r)$.

Выясним свойства полинома $F_n(kr)$, через который выражается функция $\Phi_n(k, r)$. Положим

$$F_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j^{(n)} x^{-2j}$$

Для коэффициентов $a_j^{(n)}$ получены точные формулы. Заметим, что при численном определении этих коэффициентов путем возведения в квадрат и сложения полиномов

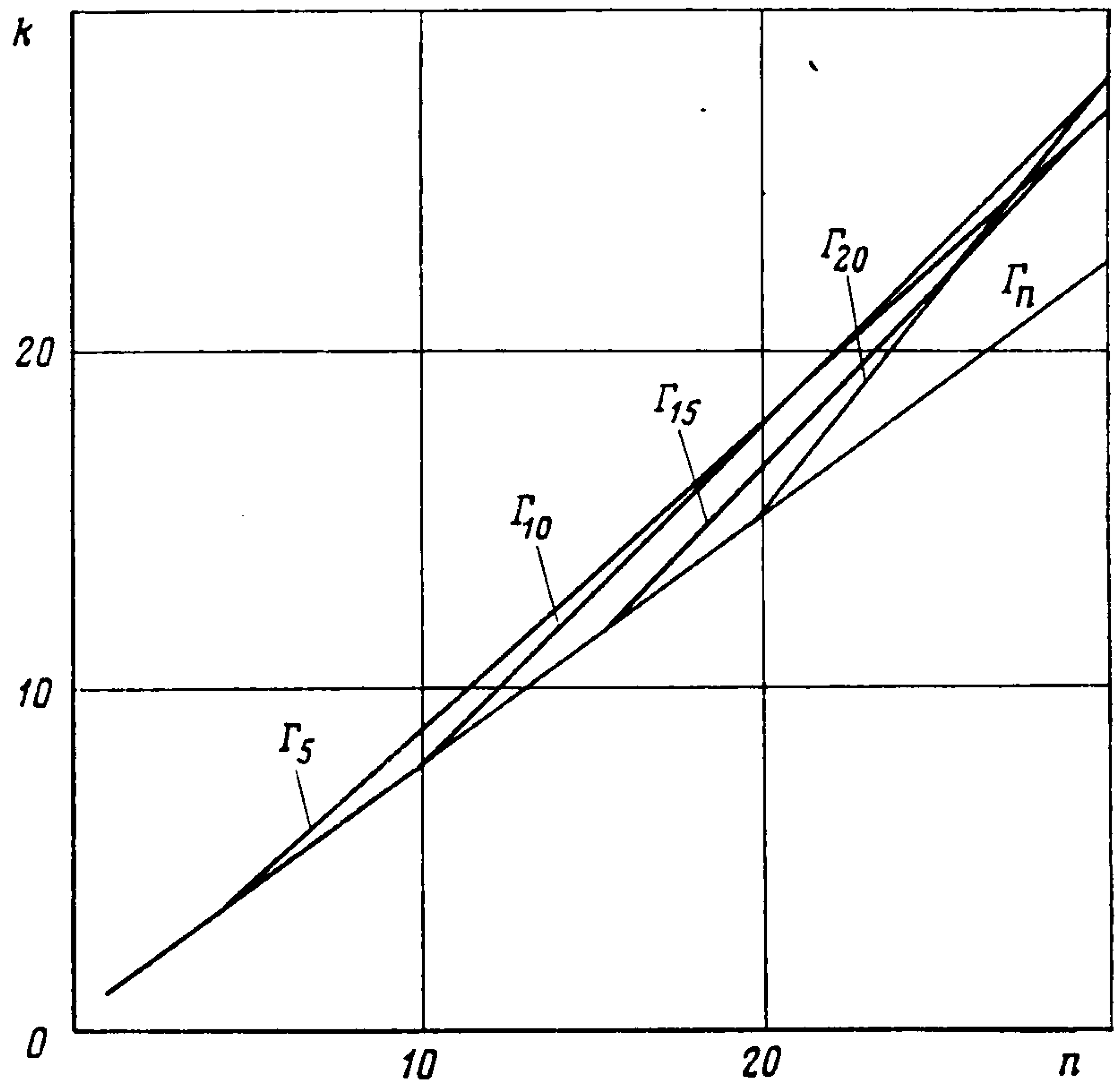
$Q_n^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2)$, через которые выражаются $F_n(x)$, происходит потеря точности при сравнительно небольших n. Получено, что

$$a_j^{(n)} = A_j B_j^{(n)}, \quad A_1 = {}^1/_2, \quad B_1^{(n)} = n(n+1)$$

$$A_j = \frac{1}{2^{2j}} \frac{2}{(j-1)!} (j+1)(j+2)\ldots(j+(j-1))$$

$$B_j^{(n)} = n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(j-1)^2)(n+j) \quad (j \geqslant 2)$$

Отсюда видно, что все $a_j^{(n)} > 0$. Можно убедиться, что их величина резко возрастает с ростом степени $1/x^2$.



Фиг. 1

Отметим, что функция $\Phi_n(k, r)$ и интенсивность звука $I^{(n,\,m)}$ монотонно убывают с ростом r. Исследуем поведение $\Phi_n(k, r)$ вблизи сферы S. Из сравнения коэффициентов в $F_n(kr)$ при различных степенях $1/r^2$ со свободным членом, равным единице, получаем $a_j^{(n)}/k^{2j} = 1$ или $k = \sqrt[2j]{a_j^{(n)}}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Эти равенства на плоскости n, k определяют серию кривых Γ_j, точкам которых соответствуют значения n, k, для которых коэффициент при $1/r^{2j}$ сравним с единицей. Из фиг. 1, где представлены кривые Γ_j ($j = 5$; 10; 15; 20) и Γ_n ($j = n$), видно, что эти кривые довольно плотно заполняют некоторую область G плоскости n, k, причем кривые Γ_j веерообразно отходят от кривой Γ_n. Для кривых Γ_j характерно, что все они с ростом n очень быстро приближаются к прямым. Это следует из того, что для больших n уравнения Γ_j с точностью до $O(n^{-2})$ можно представить в виде

$$j = 1, \quad k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n}\right); \quad j = 2, \quad k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1/4}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{5}{8n}\right)$$

$$j = 3, \quad k = \left(\frac{5}{16}\right)^{1/6}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{35}{24n}\right); \ldots$$

$$j = n, \quad k = \frac{2}{e}\left[n + \frac{\ln 2}{2} + \left(\frac{1}{4}\ln^2 2 - \frac{1}{24}\right)\frac{1}{n}\right]$$

Для значений n, k из области G вклады отдельных слагаемых в величину $F_n(kr)$ при r, мало отличающихся от единицы одного порядка.

Для области G_1 значений n, k, расположенных ниже области G, основной вклад в величину $F_n(kr)$ при r, близких к единице, дает член с наивысшей степенью $1/r^2$, т. е. член $a_n^{(n)}/(k^{2n}r^{2n})$.

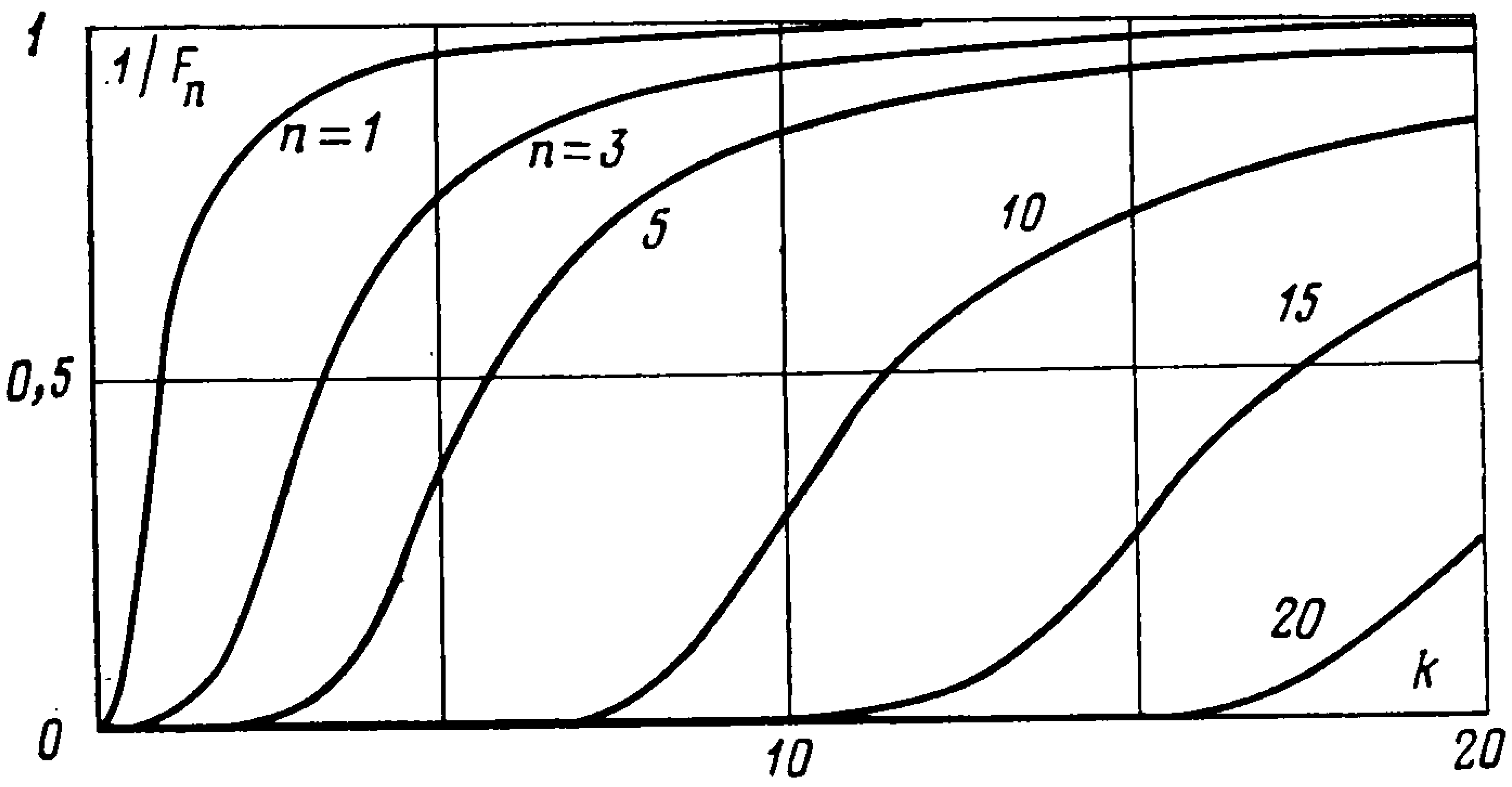
Для области G_2 значений n, k, расположенных выше области G, величина $F_n(kr)$ для r, близких к единице, определяется свободным членом, равным единице.

Таким образом, на плоскости n, k имеются три области с различным характером изменения интенсивности звука вблизи сферы. В области G_1 зависимость от r интенсивности звука около сферы близка к $1/r^{2n+2}$, т. е. примерно такая же, как в случае несжимаемой жидкости. Для этих значений n, k влияние сжимаемости жидкости вблизи сферы оказывается несущественным.

В области G_2 зависимость от r интенсивности звука $I^{(n, m)}$ около сферы близка к $1/r^2$. Для этих значений n, k влияние сжимаемости сказывается в непосредственной близости к сфере S и излучение от сферы проникает наиболее далеко в глубь жидкости.

Для значений n, k из области G зависимость от r вблизи сферы S определяется полиномом степени $n+1$ относительно $1/r^2$, все члены которого примерно одного порядка.

По мере увеличения расстояния от сферы S для низких и средних частот (области G, G_1) происходит постепенное увеличение роли членов с меньшими степенями $1/r^2$ в выражении для интенсивности звука $I^{(n, m)}$. На значительном расстоянии от сферы S зависимость от r интенсивности звука становится близкой к $1/r^2$.



Фиг. 2

Получим упрощенные формулы для давления и интенсивности звука в дальнем поле при больших значениях r в случае низких и средних частот (область G_1, G) и при любых r для высоких частот (область G_2). Имеем

$$p_{nm}(r, \theta, \varphi) = p_n(1)\frac{1}{\sqrt{F_n(k)}}\frac{1}{r}e^{i(k(r-1)-\chi)}P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi \tag{4}$$

$$I^{(n, m)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\rho a}|p_n(1)|^2\frac{1}{F_n(k)}\frac{1}{r^2}|P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi|^2 \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\chi = Q_n^{(2)}(k)/Q_n^{(1)}(k)$$

Заметим, что $p_n(1)$ в (4), (5) имеет комплексное значение. Кроме того, в (4), (5) входят множители $1/\sqrt{F_n(k)}$ и $1/F_n(k)$, значения которых существенно сказываются на величинах давления и интенсивности звука, определяемых по упрощенным формулам.

Для каждого n значения $1/F_n(k)$ с ростом k возрастают от нуля до единицы (фиг. 2). С ростом n растет диапазон частот, для которых $1/F_n(k)$ принимает очень малые значения. Для этих частот давление и интенсивность звука в дальнем поле незначительны. Располагая зависимостями $1/F_n(k)$ от k, для каждого n можно определить частоты, для которых излучение имеет проникающий характер. Для этих частот значения $1/F_n(k)$ не сильно отличаются от единицы.

В заключение отметим, что для давления и интенсивности звука получены представления в элементарных функциях, позволяющие определять их во всей массе жидкости вне сферической поверхности по их амплитудным значениям на сфере. Установлены три области значений параметров n, k с различным характером ближнего поля. Получено, что интенсивность звука вблизи сферы для низких частот изменяется как $1/r^{2n+2}$, для высоких частот — как $1/r^2$, а для средних частот — по полиномиальному закону степени $n+1$ относительно $1/r^2$. Заметим, что диапазоны частот зависят от значения волнового числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стретт Дж. В., лорд Релей.* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.

4. *Гольденвейзер А. Л., Радовинский А. Л.* Асимптотические свойства задачи колебаний оболочек, взаимодействующих с жидкостью.— В кн.: Тр. 2-го Всесоюз. симпоз. по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. М.: Наука, 1982, с. 287—288.
5. *Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* Коротковолновые колебания замкнутой оболочки в жидкости, возбуждаемые окружной нормальной силой.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 228—237.
6. *Васильев Д. Г., Гольденвейзер А. Л.* Колебания и излучение оболочки вращения при действии кольцевой нагрузки.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 184—193.
7. *Попов А. Л.* Осесимметричные колебания оболочек вращения в жидкости при сосредоточенных воздействиях.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 168—173.
8. *Авербух А. З., Вейцман Р. И.* О колебаниях сферической оболочки в сжимаемой жидкости.— В кн.: Гидроупругие колебания в машинах. М.: Наука, 1983, с. 34—40.

Москва

Поступила в редакцию
19.08.1985

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 24.07.86 Подписано к печати 29.09.86 Т-21207 Формат бумаги $70\times108^{1}/_{16}$
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 34,3 Уч.-изд. л. 16,3 Бум. л. 5,5
Тираж 2204 экз. Зак. 2798

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6