через $\sigma \approx 1{,}8$. Это приводит к тому, что при переходе через такие значения σ, прежде всего $\sigma \approx 1{,}8$, меняется характер релаксации возмущений. Кроме того, все инкременты равномерно (при всех σ) отделены от нуля величиной $-\pi^2/4$. Это означает, что при любых значениях относительной скорости граничных плоскостей длинноволновые (с малыми волновыми числами) двух- и трехмерные возмущения, как и рассматриваемые здесь одномерные, не способны нарушить устойчивость стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Худяев С. И.* О краевых задачах для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений.— Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4, с. 787—790.
2. *Fudjita H.* On the nonlinear equations $\Delta u + e^4 = 0$ and $dv/dt = \Delta v + e^v$.— Bull. Amer. Math. Soc., 1969, v. 75, No. 1, p. 132—135.
3. *Истратов А. Г., Либрович В. Б.* Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 343—347.
4. *Гришин А. М.* Линеаризация уравнений теплового взрыва и устойчивость его решений в случае граничных условий третьего рода.— Инж.-физ. ж., 1965, т. 8, № 5, с. 620—626.
5. *Сивашинский Г. И.* О существовании и устойчивости решений стационарной теории теплового взрыва.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 137—139.
6. *Каганов С. А.* Об устойчивости стационарных решений в теории теплового взрыва.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, с. 1081—1085.
7. *Hagg A.* Heat effects in lubrication films.— J. Appl. Mech., 1944, v. 11, No. 2, p. A72—A76.
8. *Регирер С. А.* Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 414—418.
9. *Яблонский В. С., Каганов С. А.* Течение Куэтта с учетом зависимости вязкости от температуры и теплоты трения.— Изв. вузов. Нефть и газ, 1958, № 5, с. 57—65.
10. *Каганов С. А., Яблонский В. С.* О профиле скорости ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и изменения коэффициента вязкости от температуры.— Изв. вузов. Нефть и газ, 1960, № 1, с. 85—92.
11. *Joseph D. D.* Variable viscousity effects on the flow and stability of flow in chennels and pipes.— Phys. Fluids, 1964, v. 7, No. 11, p. 1761—1771.
12. *Каганов С. А.* Течение жидкости между двумя вращающимися соосными цилиндрами с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры.— Инж.-физ. ж., 1965, т. 8, № 3, с. 307—310.
13. *Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И.* Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости.— ПМТФ, 1965, № 5, с. 45—50.
14. *Gavis J., Laurence R. L.* Viscous heating in plane and curcular flows between moving surfaces.— Ind. Eng. Chem. Fundamentals, 1968, v. 7, No. 3, p. 232—239.
15. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 491 с.
16. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений.— Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2, с. 87—158.
17. *Барзыкин В. В., Мержанов А. Г.* Краевая задача в теории теплового взрыва.— Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 6, с. 1271—1276.
18. *Каганов С. А.* К стационарной теории теплового самовоспламенения.— ПМТФ, 1963, № 1, с. 133—135.
19. *Joseph D. D.* Bounds on λ for positive solutions of $\Delta\psi + \lambda f(r) \{\psi + G(\psi)\} = 0$.— Quart. Appl. Math., 1966, v. 23, No. 4, p. 349—354.
20. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 368 с.
21. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1984

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ УСЛОВИЙ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Малый В. И.

Показано, что условия совместности деформаций могут быть представлены в виде трех уравнений в области, занимаемой деформируемым телом, и трех граничных условий на его поверхности. Комбинация требований условий равновесия и совместности приводит к естественной постановке задачи в напряжениях для деформируемого твердого тела в виде системы шести уравнений для шести неизвестных компонент тензора напряжений и совокупности граничных условий, соответствующей девятому порядку системы уравнений.

Классическая постановка задачи в напряжениях для деформируемого твердого тела приводит к необходимости решать систему их трех уравнений равновесия и шести уравнений совместности для шести неизвестных компонент тензора напряжений. Поэтому можно ожидать, что какие-то из накладываемых постановкой задачи требований являются излишними. По крайней мере, такие соображения в подобных ситуациях при постановках новых задач систематически использовались в научной литературе и оказывались полезными.

1. Будем рассматривать упругое тело, занимающее трехмерную область V, ограниченную поверхностью S. В области введена декартова система координат x_i с векторами базиса $\mathbf{e}_i$, так что вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S имеет компоненты n_i. Дифференцирование по координате x_i будем обозначать индексом после запятой. Считаем заданными объемные силы f_i и поверхностные усилия F_i. Механические свойства материала рассматриваемого тела описываются, вообще говоря, нелинейными определяющими соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}) \tag{1.1}$$

связывающими тензор деформаций ε_{ij} с тензором напряжений σ_{kl}.

Классическая постановка краевой задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях обладает некоторыми особенностями, которые обращают на себя внимание. Выполнения трех уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \mathbf{x} \in V \tag{1.2}$$

при статических граничных условиях

$$\sigma_{ij} n_j = F_i, \quad \mathbf{x} \in S \tag{1.3}$$

недостаточно для однозначного определения шести компонент тензора напряжений σ_{ij}. Поскольку напряжения связаны с деформациями, определяющими соотношениями (1.1), недостающие соотношения получаются из естественных геометрических условий совместности Сен-Венана для компонент тензора деформации $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$, которые можно представить в виде [1]

$$g_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki}, \quad \mathbf{x} \in V \tag{1.4}$$

Хотя соотношений (1.4) оказалось больше, чем необходимо для формулировки определенной системы уравнений для шести функций σ_{ij} (или ε_{ij}), и система (1.2) — (1.4) теперь оказывается переопределенной в смысле [2], этот вопрос, как правило, в учебной литературе не обсуждается, а иногда имеют место и прямые утверждения, будто «можно убедиться», что все шесть соотношений (1.4) являются независимыми [1]. Но так как решение рассматриваемой системы (1.2) — (1.4), с одной стороны, существует, а с другой — единственно, можно ожидать, что какие-то три комбинации соотношений (1.4) могут быть отброшены, хотя и неизвестно, какие именно. Такое мнение высказывалось, например, Доннеллом [3] и Кристенсеном [4]. Заметим, однако, что в случае отбрасывания трех из соотношений совместности (или их комбинаций) ситуация все равно не стала бы обычной, так как оставшиеся уравнения образовали бы систему девятого порядка, а наличие трех граничных условий (1.3) по всей поверхности характерно для систем шестого порядка.

В этой связи нельзя не упомянуть работы [5—7], где [1] приведены соотношения совместности к трем уравнениям неразрывности в интегродифференциальной форме, имеющим, например, вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \int \varepsilon_{11,2}\,dx_1 + \int \varepsilon_{22,1}\,dx_2 + f_{1,2}(x_2, x_3) + f_{2,1}(x_1, x_3) \\ \varepsilon_{23} &= \int \varepsilon_{22,3}\,dx_2 + \int \varepsilon_{33,2}\,dx_3 + f_{2,3}(x_1, x_3) + f_{3,2}(x_1, x_2) \\ \varepsilon_{13} &= \int \varepsilon_{33,1}\,dx_3 + \int \varepsilon_{11,3}\,dx_1 + f_{3,1}(x_1, x_2) + f_{1,3}(x_2, x_3), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где неопределенные интегралы обозначают какую-либо частную первообразную для подынтегральной функции, а $f_1(x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_3)$ и $f_3(x_1, x_2)$ — произвольные функции двух соответствующих переменных. Однако необходимо отметить, что тогда как несовместность деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ приводит к явному невыполнению соотношений Сен-Ве-

[1] *Власов Б. Ф.* Построение методом двусторонних приближений по энергии в статике упругих элементов сооружений. Автореф. дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. М.: 1974. 42 с.

нана, для соотношений (1.5) она приводит к несуществованию таких функций f_i, при которых в (1.5) выполняется равенство. Таким образом, использование соотношений (1.5) при проверке совместности ε_{ij} (x) сводится к решению вопроса о существовании или несуществовании решения относительно f_i ($i = 1, 2, 3$) системы уравнений (1.5), т. е. к решению проблемы того же типа, что и возникающая при рассмотрении исходного вопроса: существуют ли три функции u_i, являющиеся решением соотношений Коши $u_{i,\,j} + u_{j,\,i} = 2\varepsilon_{ij}$.

В этом смысле соотношения (1.5) правильнее было бы не называть уравнениями неразрывности (совместности) в отличие от соотношений Сен-Венана, явное выполнение (или невыполнение) которых является необходимым и достаточным условием совместности (или несовместности) деформаций ε_{ij}.

2. Покажем, что шесть соотношений совместности (1.4) не являются независимыми между собой. Действительно, из определения g_{ij} (1.4) имеем равенства

$$g_{ij,\,j} = \varepsilon_{jj,\,kki} - \varepsilon_{jk,\,jki}, \qquad g_{jj} = 2\,(\varepsilon_{jj,\,kk} - \varepsilon_{jk,\,jk})$$

Поэтому между шестью условиями совместности (1.4) имеются три связи

$$2g_{ij,\,j} = g_{jj,\,i} \tag{2.1}$$

3. Покажем теперь, что в качестве необходимых и достаточных условий совместности деформаций ε_{ij} (x) вместо шести соотношений (1.4) можно использовать три условия в области

$$g_{12}(\mathbf{x}) = 0, \qquad g_{23}(\mathbf{x}) = 0, \qquad g_{31}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in V \tag{3.1}$$

и три условия на границе (по i не суммировать!)

$$2g_{ii}(\mathbf{x}) - g_{jj}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in S_{i-}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

где S_{i-} — часть границы тела S, для которой выполняется неравенство $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_i \leqslant 0$.

Для каждой внутренней точки $\mathbf{x} \in V$ существуют ее проекции $\mathbf{x}_{(i)} = x_{(i)k}\mathbf{e}_k \in S_{i-}$ по направлению $\mathbf{e}_i$ на часть границы S_{i-}, такие, что все точки $x_{(i)}' = x'_{(i)k}\mathbf{e}_k$ отрезков, соединяющих $\mathbf{x}_{(i)}$ и $\mathbf{x}$, описываемые выражением

$$\mathbf{x}_{(i)}' = \mathbf{x} + (x'_{(i)i} - x_i)\,\mathbf{e}_i, \quad x_{(i)i} \leqslant x'_{(i)i} \leqslant x_i$$

в котором по повторяющемуся индексу i не предполагается суммирование, находятся внутри тела, т. е. $\mathbf{x}'_{(i)} \in V$.

Для пары точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_1$ в силу (2.1) $i = 1$ справедливо равенство

$$2\,g_{11}(\mathbf{x}) - g_{jj}(\mathbf{x}) = 2g_{11}(\mathbf{x}_{(1)}) - g_{jj}(\mathbf{x}_{(1)}) - 2\int\limits_{x_{(1)1}}^{x_1} [g_{12,2}(\mathbf{x}'_{(1)}) + g_{13,3}(\mathbf{x}'_{(1)})]\,dx'_{(1)1}$$

Аналогичные равенства справедливы для пар точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_3$. Поэтому, если выполнены условия (3.1) и (3.2), то равенства (3.2) справедливы при $x \in V$, а следовательно, и $g_{jj}(\mathbf{x}) = 0$, $g_{11}(\mathbf{x}) = 0$, $g_{22}(\mathbf{x}) = 0$, $g_{33}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in V$, так что соотношения (1.4) выполнены для всех точек тела $\mathbf{x} \in V$. Обратное утверждение, что при выполнении (1.4) выполнены и (3.1), (3.2), тривиально. Таким образом, наряду с обычной формой представления необходимых и достаточных условий совместности деформаций ε_{ij} (x) в виде соотношений (1.4) справедливо их представление в виде (3.1), (3.2).

Очевидно, что все сделанные утверждения останутся справедливыми, если в (3.2) поверхности S_{i-} заменить на части S_{i+} поверхности S тела, для которых выполнены неравенства $\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_i \geqslant 0$.

4. Считая деформации ε_{ij} выраженными через напряжения σ_{ij} в соответствии с определяющими соотношениями для материала рассматриваемого тела (1.1), приходим к естественной постановке задачи в напряжениях в виде уравнений (1.2), (3.1) и граничных условий (1.3), (3.2). В этом случае для шести неизвестных функций σ_{ij} имеем шесть уравнений, как всегда и хотелось. Сумма удвоенного числа граничных условий (1.3), заданных по всей поверхности тела S, и числа граничных условий (3.2), заданных на частях S_{i-} (или S_{i+}) поверхности S, как можно было также ожидать, соответствует девятому порядку системы (1.2), (3.1). Некоторая непривычность того, что граничные условия (3.2) заданы на части поверхности тела, а не на всей поверхности S, объясняется нечетностью порядка системы и характерна для подобных ситуаций.

Интересно с этой же точки зрения сравнить сформулированную постановку задачи в напряжениях с предложенной в работе [8]. Если считать деформации выраженными через напряжения при помощи определяющих соотношений (1.1), ввести некоторый постоянный симметричный тензор ξ_{ij} и некоторый симметричный тензор-оператор $Q_{ij}(S_{kl})$ от тензора-аргумента $S_{kl}=\sigma_{kn,\,nl}+\sigma_{ln,\,nk}+f_{k,\,l}+f_{l,\,k}$ и при этом считать, что $\xi_{nn}\neq 2$ и для связи Q_{ij} с S_{kl} выполнены такие же свойства, какие обычно считаются выполненными для определяющих соотношений (1.1), то напряжения σ_{kl} при действии объемных сил f_i в теле V и усилий F_i на его поверхности S являются решением системы двенадцатого порядка из шести уравнений [8]

$$\varepsilon_{ij,\,nn}+\varepsilon_{nn,\,ij}-\varepsilon_{in,\,nj}-\varepsilon_{jn,\,ni}+\xi_{ij}(\varepsilon_{mn,\,mn}-\varepsilon_{mm,\,nn})+Q_{ij}+$$
$$+(\xi_{ij}-\delta_{ij})Q_{nn}=0,\qquad \mathbf{x}\in V$$

при граничных условиях (1.3) и

$$\sigma_{ij,\,j}+f_i=0,\qquad \mathbf{x}\in S$$

Достоинством данной постановки задачи в сравнении с классической является то, что число уравнений соответствует числу неизвестных функций, а удвоенное число граничных условий, заданных по всей поверхности тела S, соответствует порядку системы. В то же время можно сказать, что постановка задачи (1.2), (3.1), (1.3), (3.2) представляет определенный интерес в связи с более низким порядком получающейся системы уравнений, естественностью формулировки как простой комбинации требований выполнения условий равновесия и совместности, а также с отсутствием необходимости еще на стадии постановки вводить не имеющие отношения к содержанию рассматриваемой задачи количественные характеристки тензора ξ_{ij} и тензор-оператора $Q_{ij}\ (S_{kl})$.

По-видимому, в связи с более высокими порядками дифференцирования в условиях совместности (3.1), (3.2), чем в условиях равновесия (1.2), (1.3), практически удобнее численно реализовывать задачу в деформациях (1.2), (3.1), (1.3), (3.2), считая в (1.2) и (1.3) напряжения, выраженными через деформации в соответствии с определяющими соотношениями (1.1), разрешенными относительно напряжений

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) \tag{4.1}$$

Исключение составляет случай однородного изотропного упругого тела.

В силу полной эквивалентности классического представления условий совместности (1.4) и найденного выше (3.1), (3.2) существование и единственность решения задачи (1.2), (3.1), (1.3), (3.2) имеют место при выполнении тех же требований к нагрузкам f_i и F_i и свойствам определяющих соотношений (1.1) или (4.1), что и для классической постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жермен П.* Механика сплошных сред. М.: Мир, 1965. 479 с.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
3. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
4. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
5. *Власов Б. Ф.* О числе независимых уравнений неразрывности.— Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы, 1968, т. 34, вып. 5, с. 171—174.
6. *Власов Б. Ф.* Об уравнениях неразрывности деформаций.— Прикл. механика, 1970, т. 6, вып. 11, с. 85—90.
7. *Ионов В. Н., Огибалов П. М.* Прочность пространственных элементов конструкций. Ч. 2. Статика и колебания. М.: Высш. шк., 1979. 536 с.
8. *Победря Б. Е.* Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 531—541.

Москва

Поступила в редакцию 17.VI.1985