УДК 532.5

ОДНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИССИПАТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Мазо В. Л., Рудерман М. С.

Рассматривается одномерное нестационарное течение, в частности одномерная устойчивость стационарного течения Куэтта вязкой несжимаемой жидкости при учете выделения диссипативного тепла в предположении, что вязкость достаточно быстро, например экспоненциально, убывает с температурой. Показано, что в случае сильно вязкой жидкости плоская нестационарная задача может быть сведена к нестационарной задаче о переносе тепла в средах с нелинейно зависящими от температуры источниками тепла. Зависимость источников тепла от температуры в последней задаче существенно различна для разных типов граничных условий в исходной задаче: если задано касательное напряжение на границе, то плотность источников тепла зависит от температуры локально (такая задача рассматривалась ранее [1—6]); при заданных скоростях граничных плоскостей плотность источников тепла зависит от распределения температуры в целом по объему.

Что касается исследуемого на устойчивость стационарного течения, то оно существует и единственно не всегда [7—14]. Сводя задачу о существовании и единственности такого течения к стационарной задаче о распределении температуры в средах с нелинейно зависящими от температуры источниками тепла, можно использовать результаты [1, 2, 15—19].

1. Пусть z_* — поперечная координата, t_* — время, T — температура, u_* — скорость, τ_* — касательное напряжение, c — теплоемкость, ρ — плотность, λ — теплопроводность (последние три параметра предполагаются постоянными), $\varphi_*(T)$ — текучесть (обратная динамическая вязкость), зависящая от температуры T. Перейдем к следующим безразмерным величинам: $z = z_*/h$, где h — половинное расстояние между граничными плоскостями; $t = t_*/t_0$, где $t_0 = \rho c h^2/\lambda$; $\vartheta = (T - T_0)/\Delta T$, где T_0 — некоторая характерная температура, а ΔT — некоторый ее характерный разброс; $u = u_*/u_0$, где $u_0^2 = 2\lambda\Delta T\varphi_*(T_0)$; $\tau = \tau_*/\tau_0$, где $\tau_0 = u_0/(\varphi_*(T_0)\,h)$; $\varphi(\vartheta) = \varphi_*(T)/\varphi_*(T_0)$, причем в случае экспоненциальной текучести $\varphi(\vartheta) = e^{\vartheta}$.

В безразмерных переменных уравнения, описывающие рассматриваемое течение, имеют вид (Pr — число Прандтля)

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} + 2\tau^2\varphi(\vartheta), \quad \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi(\vartheta)\,\tau \tag{1.1}$$

На граничных плоскостях предполагается заданной постоянная и одинаковая температура

$$z = \pm 1, \qquad \vartheta = 0 \tag{1.2}$$

Рассматривается два типа динамических граничных условий. В первом случае предполагается заданным на одной из граничных плоскостей постоянное касательное напряжение:

$$z = 1,\ \tau = \tau_1;\ z = 0,\ u = 0 \qquad \text{(тип 1)} \tag{1.3}$$

(Второе условие несущественно и выбрано из тех соображений, чтобы в дальнейшем некоторые формулы оказались одинаковыми для обоих типов граничных условий.) Во втором случае предполагаются заданными скорости граничных плоскостей

$$z = \pm 1, \quad u = \pm v_1 \qquad \text{(тип 2)} \tag{1.4}$$

Стационарный вариант уравнений (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2\bar\vartheta}{\partial z^2} + 2\bar\tau^2\varphi(\vartheta) = 0, \quad \frac{\partial\bar\tau}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\bar u}{\partial z} = \varphi(\bar\vartheta)\,\bar\tau \tag{1.5}$$

Согласно второму уравнению (1.5), $\bar\tau$ — величина постоянная. В случае динамических граничных условий первого типа (1.3)

$$\bar\tau = \tau_1 \qquad \text{(тип 1)} \tag{1.6}$$

а в случае динамических граничных условий второго типа (1.4), усредняя третье уравнение (1.5) по интервалу от -1 до 1, получим

$$\bar\tau\langle\varphi(\bar\vartheta)\rangle = u_1 \qquad \text{(тип 2)} \tag{1.7}$$

где $\langle\ldots\rangle$ — символ усреднения.

Тем самым система (1.5) сводится к своему первому уравнению с добавлением одного из соотношений (1.6) или (1.7). При заданном значении $\bar{\tau}$ первое уравнение (1.5) замкнутое и совпадает со стационарным уравнением переноса тепла в средах с нелинейно зависящими от температуры источниками тепла, что позволяет использовать имеющиеся результаты [1, 2, 15—19]. Перенесение этих результатов на рассматриваемую задачу следует делать с учетом связи $\bar{\tau}$ с динамическими граничными условиями, выраженными соотношениями (1.6) или (1.7).

При экспоненциальном законе текучести стационарная задача имеет следующее решение [9, 10, 13—15]:

$$(1.8)\qquad \bar{\vartheta} = \ln\frac{\mathrm{ch}^2\sigma}{\mathrm{ch}^2(\sigma z)},\quad \bar{\tau} = \frac{\sigma}{\mathrm{ch}\,\sigma},\quad \bar{u} = \mathrm{sh}\,\sigma\,\frac{\mathrm{th}\,(\sigma z)}{\mathrm{th}\,\sigma}$$

где σ — параметр, определяемый в случае граничных условий первого типа из уравнения

$$(1.9)\qquad \tau_1 = \sigma/\mathrm{ch}\,\sigma \qquad (\text{тип } 1)$$

а в случае граничных условий второго типа — из уравнения

$$(1.10)\qquad u_1 = \mathrm{sh}\,\sigma \qquad (\text{тип } 2)$$

Формулы (1.8) вместе с уравнениями (1.9) или (1.10) дают полное решение системы (1.5) с граничными условиями (1.2) — (1.4). Отсюда имеем следующие утверждения.

При заданном касательном напряжении на границе τ_1 существует критическое значение приложенного касательного напряжения τ_{cr} и соответствующее ему критическое значение параметра σ_{cr}, определяемого уравнением

$$(1.11)\qquad \sigma_{cr}\,\mathrm{th}\,\sigma_{cr} = 1 \quad (\sigma_{cr} \approx 1{,}2)$$

такие, что уравнение (1.9) разрешимо относительно σ только при $\tau_1 \leqslant \tau_{cr}$. При $\tau_1 < \tau_{cr}$ имеется два решения уравнения (1.9) относительно σ, меньшее из которых ($\sigma < \sigma_{cr}$) дает низкотемпературное решение стационарной задачи, а большее ($\sigma > \sigma_{cr}$) — высокотемпературное; при $\tau_1 = \tau_{cr}$ имеется одно решение уравнения (1.9) относительно σ, которое дает единственное решение стационарной задачи; при $\tau_1 > \tau_{cr}$ уравнение (1.9) относительно σ неразрешимо и потому решение стационарной задачи не существует (происходит гидродинамический тепловой взрыв).

При заданных скоростях граничных плоскостей $\pm u_1$ уравнение (1.10) всегда, и притом единственным образом, разрешимо относительно σ. Это означает, что решение стационарной задачи всегда существует (гидродинамический тепловой взрыв не происходит) и единственно.

2. Упростим нестационарную задачу, предполагая, что жидкость сильно вязкая ($\mathrm{Pr} \gg 1$). Это означает, что характерное время течения жидкости много меньше характерного времени релаксации температуры. Такое течение динамически квазистационарно, т. е. распределение скорости в своем «быстром» времени успевает подстроиться под «медленно» меняющееся распределение температуры. При таком предположении второе уравнение (1.1) переходит в уравнение $\partial\tau/\partial z = 0$, из которого следует, что касательное напряжение, как и в стационарном случае, постоянно по пространству, но, вообще говоря, меняется во времени. При заданном касательном напряжении на границе (условие (1.3))

$$(2.1)\qquad \tau = \tau_1 \qquad (\text{тип } 1)$$

следовательно, касательное напряжение τ не меняется во времени. При заданных скоростях граничных плоскостей (условие (1.4)), усредняя третье уравнение (1.1) по интервалу от -1 до 1, получим

$$(2.2)\qquad \tau\,\langle\varphi(\vartheta)\rangle = u_1 \qquad (\text{тип } 2)$$

следовательно, касательное напряжение τ вместе с температурой ϑ меняются во времени.

Отсюда в первом случае первое уравнение (1.1), решаемое совместно с тривиальным соотношением (2.1), сводится к уравнению

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} + 2\tau_1^2\varphi(\vartheta) \qquad (\text{тип } 1)$$

описывающему нестационарный перенос тепла в средах с нелинейно зависящими от температуры источниками тепла. Во втором случае первое уравнение (1.1) и соотношение (2.2) решаются совместно и сводятся к одному:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} + 2u_1^2\varphi(\vartheta)/\langle\varphi(\vartheta)\rangle \qquad \text{(тип 2)}$$

которое также можно считать описывающим перенос тепла в средах с нелинейно зависящими от температуры источниками тепла, но с одной особенностью — плотность источников тепла в каждой точке зависит от температуры не только в этой точке, но и от распределения температуры по всему объему.

Исследуем устойчивость стационарных решений по отношению к малым возмущениям. Представим нестационарные величины ϑ, τ и u в виде сумм стационарных решений $\bar\vartheta$, $\bar\tau$ и $\bar u$ и малых возмущений ϑ', τ' и u' (далее штрихи опускаем). Линеаризуем первое уравнение (1.1) и соотношения (2.1) и (2.2) относительно малых возмущений, полагая, что возмущения во времени меняются экспоненциально с инкрементом λ, и используя для стационарных решений первое уравнение (1.5) и соотношения (1.6), (1.7). В результате для возмущений получим уравнение

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + 2\bar\tau^2\varphi'(\bar\vartheta)\,\vartheta + 4\bar\tau\varphi(\bar\vartheta)\,\tau = \lambda\vartheta \tag{2.3}$$

с граничным условием (1.2) и соотношения

$$\tau = 0 \qquad \text{(тип 1)} \tag{2.4}$$

$$\bar\tau\,\langle\varphi'(\bar\vartheta)\,\vartheta\rangle \quad \langle\varphi(\bar\vartheta)\rangle\,\tau = 0 \qquad \text{(тип 2)} \tag{2.5}$$

Сводя уравнение (2.3) и соотношения (2.4) или (2.5) к одному уравнению, получим

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + 2\bar\tau^2\varphi'(\bar\vartheta)\,\vartheta = \lambda\vartheta \qquad \text{(тип 1)}$$

(2.6)

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + 2\bar\tau^2\varphi'(\bar\vartheta)\,\vartheta - 4\bar\tau^2\varphi(\bar\vartheta)\,\langle\varphi'(\bar\vartheta)\,\vartheta\rangle/\langle\varphi(\bar\vartheta)\rangle = \lambda\varphi \qquad \text{(тип 2)}$$

Граничные условия по-прежнему имеют вид (1.2).

Итак, в первом случае имеем стандартную задачу Штурма — Лиувилля, чего нельзя сказать о втором случае. В обоих случаях соответствующее уравнение (2.6) вместе с граничным условием (1.2) составляют самосопряженные задачи. Поэтому спектр инкрементов действительный — колебательный режим отсутствует.

3. В дальнейшем будем рассматривать случай экспоненциальной текучести, используя для стационарных решений формулы (1.8). Удобно ([20], § 23, задача 5) перейти к новой переменной $\zeta = \operatorname{th}(\sigma z)$ и положить $\lambda = \mu^2\sigma^2$. Тогда уравнения (2.6) запишутся в виде

$$\frac{d}{d\zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{d\vartheta}{d\zeta}\right) + \left(2 - \frac{\mu^2}{1-\zeta^2}\right)\vartheta = 0 \qquad \text{(тип 1)} \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{d\zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{d\vartheta}{d\zeta}\right) + \left(2 - \frac{\mu^2}{1-\zeta^2}\right)\vartheta = 4\langle\vartheta\rangle \qquad \text{(тип 2)} \tag{3.2}$$

Здесь $\langle\ldots\rangle$ — символ усреднения по интервалу от $-\omega$ до ω, где $\omega = \operatorname{th}\sigma$. Граничные условия в новой перменной имеют вид

$$\zeta = \pm\omega, \quad \vartheta = 0 \tag{3.3}$$

Прежде всего отметим, что при $\sigma = 0$ оба уравнения (2.6) вырождаются в уравнение $d^2\vartheta/dz^2 = 0$, откуда следует, что спектр инкрементов отрицательный, т. е. при $\sigma = 0$ стационарные решения устойчивы.

Можно ожидать, что границами устойчивости являются такие $\sigma = \sigma_0$, при которых максимальный инкремент обращается в нуль. Поэтому для определения границ устойчивости положим в уравнениях (3.1) и (3.2) $\mu = 0$ и найдем такие $\sigma = \sigma_0$, при которых существуют решения этих уравнений, удовлетворяющие граничным условиям (3.3).

Решения уравнения (3.1) при $\mu = 0$ — функции Лежандра порядка 1 [21], т. е.

$$\vartheta = \alpha\zeta + \beta\,(\zeta \operatorname{Arth}\zeta - 1), \quad \alpha,\ \beta = \mathrm{const} \qquad \text{(тип 1)}$$

Из граничных условий (3.3) следует, что $\alpha = 0$ и $\sigma_0 \operatorname{th}\sigma_0 = 1$. Последнее уравнение совпадает с уравнением (1.11), т. е. граница устойчивости σ_0 совпадает с критическим значением σ_{cr}.

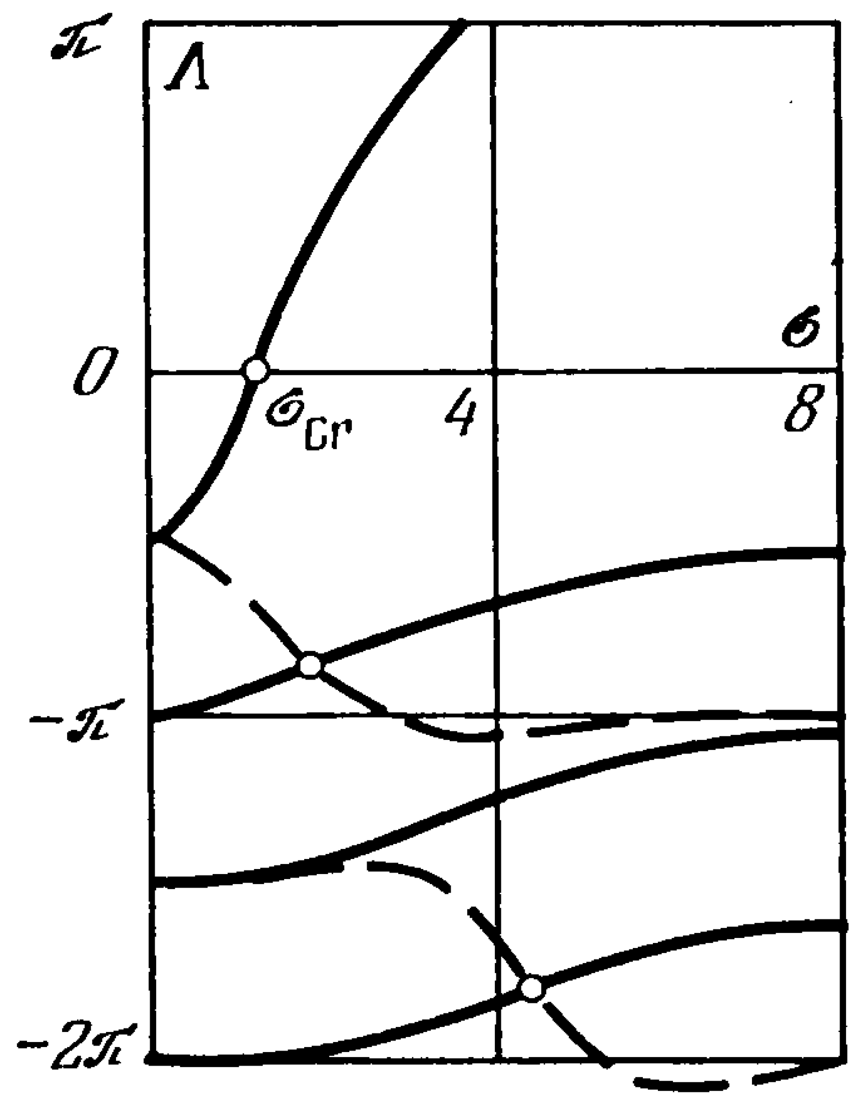
Итак, при $\sigma = 0$ все инкременты отрицательны, каковыми остаются при $\sigma < \sigma_{cr}$; при $\sigma = \sigma_{cr}$ один из инкрементов, который с необходимостью максимален, обращается в нуль; при $\sigma > \sigma_{cr}$ максимальный инкремент становится положительным; других переходов через нуль нет. (Некоторые из этих заключений верны, только если спектральные кривые находятся в общем положении. Результаты п. 4 показывают, что это действительно так.) Другими словами, при $\sigma < \sigma_{cr}$ имеет место устойчивость, при $\sigma = \sigma_{cr}$ — нейтральная устойчивость, при $\sigma > \sigma_{cr}$ — неустойчивость. Следовательно, в случае, когда на границе задано касательное напряжение или, что то же самое, тепло переносится в среде с нелинейно, но локально и притом экспоненциально зависящими от температуры источниками тепла, из двух имеющихся стационарных решений низкотемпературное устойчиво, а высокотемпературное неустойчиво, что совпадает с результатами работ [1—6].

Решение уравнения (3.2) при $\mu = 0$ можно получить исходя из решений (3.1) при $\mu = 0$ и используя метод вариации постоянных. Имеем $\vartheta = \alpha\zeta + \beta\,(\zeta \operatorname{Arth} \zeta - 1) + 2\langle\vartheta\rangle$. Беря среднее, получим окончательно

$$\vartheta = \alpha\zeta + \beta\,(\zeta \operatorname{Arth} \zeta - 1 + f(\sigma)), \quad \alpha, \ \beta = \mathrm{const}$$

$$f(\sigma) = (\sigma + \operatorname{th} \sigma - \sigma \operatorname{th}^2 \sigma)/\operatorname{th} \sigma \qquad \text{(тип 2)}$$

Из граничных условий (3.3) следует, что $\alpha = 0$ и $\sigma_0 \operatorname{th} \sigma_0 = 1 - f(\sigma_0)$. Последнее уравнение решений не имеет. Это означает, что инкременты ни при каком значении σ не переходят через нуль, а поскольку они отрицательны при $\sigma = 0$, то они остаются отрицательны и при всех значениях σ. Итак, когда заданы скорости граничных плоскостей, единственное стационарное решение всегда устойчиво.



4. Найдем спектр инкрементов возмущений при произвольном значении параметра σ. Прежде всего заметим, что уравнения (3.1) и (3.2) вместе с граничными условиями (3.3) составляют самосопряженные задачи и инвариантны относительно отражения $\zeta \to -\zeta$. Поэтому спектр инкрементов действительный и, по крайней мере для однократного спектра, собственные функции могут быть только либо четными, либо нечетными.

В первом случае, когда следует исходить из уравнения (3.1), его решения — обобщенные функции Лежандра порядка единицы и степени μ [21]. Линейно комбинируя эти функции, получим следующую пару четного a_+ и нечетного a_- решений уравнения (3.1):

$$a_+(\zeta) = \operatorname{ch}(\mu \operatorname{Arth} \zeta) - \zeta \operatorname{sh}(\mu \operatorname{Arth} \zeta)/\mu$$

$$a_-(\zeta) = \zeta \operatorname{ch}(\mu \operatorname{Arth} \zeta) - \mu \operatorname{sh}(\mu \operatorname{Arth} \zeta)$$

Спектр ищется из требования выполнения для решений $a_\pm$ граничных условий (3.3). Общая картина поведения спектра (величины $\Lambda = \operatorname{sign} \lambda \sqrt{|\lambda|}$) в зависимости от σ приведены на фигуре сплошными линиями.

Во втором случае, когда следует исходить из уравнения (3.2), его четное решение b_+ можно получить из решений $a_\pm$ уравнения (3.1) и используя метод вариации постоянных. Из граничных условий (3.3) имеем

$$b_+(\zeta) = \frac{4\langle b_+\rangle}{(1-\mu^2)\,a_+(\omega)}\,(a_+(\omega)\,a(\zeta) - a_+(\zeta)\,a(\omega))$$

$$a(\zeta) = a_-(\zeta)\,A_+(\zeta) - a_+(\zeta)\,A_-(\zeta), \quad A_\pm(\zeta) = \int_0^\zeta a_\pm(\zeta')\,d\zeta'$$

Беря среднее, приходим к уравнению

$$a_+(\omega)\int_0^\omega a(\zeta)\,d\zeta - a(\omega)\int_0^\omega a_+(\zeta)\,d\zeta - \omega\,(1-\mu^2)\,a_+(\omega) = 0$$

Картина поведения инкрементов с четными номерами в зависимости от σ приведена на фигуре штриховыми линиями.

Для нечетного решения уравнения (3.2) имеем $b_- = a_-$, поскольку среднее нечетной функции равно нулю. Следовательно, инкременты с нечетными номерами из предыдущего случая будут инкрементами и в рассматриваемом случае.

Главная особенность поведения спектра инкрементов состоит в том, что по мере увеличения σ, т. е. увеличения скорости одной границы относительно другой, инкременты возмущений попарно (инкремент с четным номером и инкремент с последующим нечетным номером) меняются местами при переходе через некоторое, для каждой пары свое, значение σ, причем первая пара инкрементов меняется местами при переходе через $\sigma \approx 1{,}8$. Это приводит к тому, что при переходе через такие значения σ, прежде всего $\sigma \approx 1{,}8$, меняется характер релаксации возмущений. Кроме того, все инкременты равномерно (при всех σ) отделены от нуля величиной $-\pi^2/4$. Это означает, что при любых значениях относительной скорости граничных плоскостей длинноволновые (с малыми волновыми числами) двух- и трехмерные возмущения, как и рассматриваемые здесь одномерные, не способны нарушить устойчивость стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Худяев С. И.* О краевых задачах для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений.— Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4, с. 787—790.
2. *Fudjita H.* On the nonlinear equations $\Delta u + e^4 = 0$ and $dv/dt = \Delta v + e^v$.— Bull. Amer. Math. Soc., 1969, v. 75, No. 1, p. 132—135.
3. *Истратов А. Г., Либрович В. Б.* Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 343—347.
4. *Гришин А. М.* Линеаризация уравнений теплового взрыва и устойчивость его решений в случае граничных условий третьего рода.— Инж.-физ. ж., 1965, т. 8, № 5, с. 620—626.
5. *Сивашинский Г. И.* О существовании и устойчивости решений стационарной теории теплового взрыва.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 137—139.
6. *Каганов С. А.* Об устойчивости стационарных решений в теории теплового взрыва.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 6, с. 1081—1085.
7. *Hagg A.* Heat effects in lubrication films.— J. Appl. Mech., 1944, v. 11, No. 2, p. A72—A76.
8. *Регирер С. А.* Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 414—418.
9. *Яблонский В. С., Каганов С. А.* Течение Куэтта с учетом зависимости вязкости от температуры и теплоты трения.— Изв. вузов. Нефть и газ, 1958, № 5, с. 57—65.
10. *Каганов С. А., Яблонский В. С.* О профиле скорости ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и изменения коэффициента вязкости от температуры.— Изв. вузов. Нефть и газ, 1960, № 1, с. 85—92.
11. *Joseph D. D.* Variable viscousity effects on the flow and stability of flow in chennels and pipes.— Phys. Fluids, 1964, v. 7, No. 11, p. 1761—1771.
12. *Каганов С. А.* Течение жидкости между двумя вращающимися соосными цилиндрами с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры.— Инж.-физ. ж., 1965, т. 8, № 3, с. 307—310.
13. *Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И.* Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости.— ПМТФ, 1965, № 5, с. 45—50.
14. *Gavis J., Laurence R. L.* Viscous heating in plane and curcular flows between moving surfaces.— Ind. Eng. Chem. Fundamentals, 1968, v. 7, No. 3, p. 232—239.
15. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 491 с.
16. *Гельфанд И. М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений.— Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2, с. 87—158.
17. *Барзыкин В. В., Мержанов А. Г.* Краевая задача в теории теплового взрыва.— Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 6, с. 1271—1276.
18. *Каганов С. А.* К стационарной теории теплового самовоспламенения.— ПМТФ, 1963, № 1, с. 133—135.
19. *Joseph D. D.* Bounds on λ for positive solutions of $\Delta\psi + \lambda f(r)\{\psi + G(\psi)\} = 0$.— Quart. Appl. Math., 1966, v. 23, No. 4, p. 349—354.
20. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 368 с.
21. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1984

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ УСЛОВИЙ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

Малый В. И.

Показано, что условия совместности деформаций могут быть представлены в виде трех уравнений в области, занимаемой деформируемым телом, и трех граничных условий на его поверхности. Комбинация требований условий равновесия и совместности приводит к естественной постановке задачи в напряжениях для деформируемого твердого тела в виде системы шести уравнений для шести неизвестных компонент тензора напряжений и совокупности граничных условий, соответствующей девятому порядку системы уравнений.