13. *Куряков В. А.* Быстрое движение вокруг центра масс твердого тела в среде с квадратичным законом сопротивления.— Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 2, с. 25—31.
14. *Мухин Н. П.* Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 6, с. 51—54.

Москва — Поступила в редакцию 28.XI.1985

УДК 532.5 : 534.1

ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТОЙ БРЕНТА — ВЯЙСЯЛЯ

Анютин А. П., Боровиков В. А.

Строится приближенное выражение для функции Грина $\Gamma(t, \sqrt{x^2+y^2}, z, z_0)$ уравнения внутренних волн в случае переменного квадрата частоты плавучести

$$N^2(z) = -\frac{9}{p_0(t)}\frac{dp_0(z)}{dz} = B^2 z$$

имеющее при $z, z_0 > 0$ и $t \to \infty$ ту же коротковолновую асимптотику, что и точная функция Грина. Оказалось, что эта асимптотика имеет качественное отличие от подробно рассмотренного во многих работах, например [1—10] [1], случая $N = \mathrm{const}$. При $N = \mathrm{const}$ функция Грина убывает при $t \to \infty$ как $t^{-1/2}$ и состоит из двух слагаемых $\Gamma_1 + \Gamma_2$, где Γ_1 осциллирует с частотой N, а Γ_2 — с частотой $N\cos\theta$ (θ — угол между направлением из источника в точку наблюдения и осью z [4, 5, 8]). Для $N = B^2 z$ функция Грина осциллирует лишь вне области V, заданной уравнением $r\sqrt{z_-} \leqslant {}^2/_3\, |z - z_0|^{3/2}$, где $z_- = \min(z, z_0)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Внутри V функция Грина не осциллирует и монотонно убывает как t^{-1}. Вне V эта функция состоит из двух слагаемых, аналогичных функциям Γ_1 и Γ_2 для случая $N = \mathrm{const}$.

1. Постановка задачи. Задача распространения и эволюции малых возмущений линейных внутренних волн в безграничной идеально стратифицированной жидкости в случае локализованных начальных возмущений сводится к построению функции Грина $\Gamma(t, \sqrt{x^2+y^2}, z, z_0)$, т. е. к определенному при $t > 0$ решению уравнения

$$L\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\Gamma + N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Gamma = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$\Delta\Gamma = 0;\quad \partial/\partial t\, \Delta\Gamma = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0) \tag{1.2}$$

Асимптотика Γ при $t \to \infty$ определяет асимптотику волнового поля при локализованных начальных возмущениях.

В случае постоянного N [1—10] функция Грина Γ строится методом Фурье [4, 5, 8], а ее асимптотика при $t \to \infty$ имеет вид [5]: $\Gamma = \Gamma_-(t) + \Gamma_+(t\,|\cos\theta|)$, где

$$\Gamma_\pm \sim \pm\frac{\sqrt{2}\sin\left(Nt \pm \frac{\pi}{4}\right)}{(N\pi)^{3/2}\rho\sqrt{t}\sin\theta};\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2} \tag{1.3}$$

$$\cos\theta = \frac{z - z_0}{\rho}$$

Здесь первое слагаемое — стоячая волна, осциллирующая с частотой N, а второе имеет пространственные осцилляции, длина волны которых стремится к нулю при $t \to \infty$. Гребни волн второго слагаемого — это конусы с вертикальной осью z, угол раскрыва которых $\alpha = \arccos[\pi(n - {}^1/_4)(Nt)^{-1}]$ увеличивается с ростом t.

---

[1] *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеально несжимаемой жидкости.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1978, № 114. 37 с.

Ниже рассматривается среда с линейной зависимостью

$$N^2(z) = B^2 z \tag{1.4}$$

Поскольку $N^2(z) < 0$ при $z < 0$ и стратификация среды неустойчива, будем отбрасывать решения, растущие при $z \to -\infty$. Для такой среды и расположенного в точке $z = z_0 > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ источника будет построено приближенное выражение u для функции Грина, т. е. точное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.2) приближенно, с точностью до функции, аналитической при $z_0 > 0$ и любых r.

Будет показано, что построенное решение осциллирует не везде, а лишь вне воронок, уравнения которых имеют вид

$$r\sqrt{z_0} < \frac{2}{3}|z - z_0|^{3/2} \ (z < z_0), \quad r\sqrt{z} = \frac{2}{3}|z - z_0|^{3/2} \quad (z > z_0) \tag{1.5}$$

Внутри этих воронок поле монотонно убывает при $t \to \infty$ как t^{-1}, вне воронок оно состоит из двух слагаемых, аналогичных (1.3).

Естественно ожидать, что сделанные допущения не сказываются на качественных особенностях поля, т. е. на его осцилляциях, длина волны которых стремится к нулю при $t \to \infty$.

2. Построение функции Грина. Чтобы найти функцию Грина $u(t, r, z, z_0)$, построим приближенное выражение $\Gamma(t, r, z, z_0)$, для функции Грина в полупространстве $z < H$ ($H \gg 1$) с нулевым граничным условием при $z = H$ и условием экспоненциального убывания при $z \to \infty$, после чего определим u как предел Γ при $H \to \infty$. Поскольку найденная таким методом формула для u ниже будет подвергнута непосредственной проверке, кратко опишем процедуру построения функций Γ и u, не останавливаясь на обосновании используемых приближений.

Функция Грина в слое $H_0 < z < H_1$ для нулевых граничных условий при $z = H_0$, H_1 имеет вид [11]

$$\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\sum_n \int_0^\infty \lambda_n^{-2} J_0(kr) \sin(\omega_n t)\, \varphi_n(k, z)\, \varphi_n(k, z_0)\, \omega_n \frac{dk}{k} \tag{2.1}$$

$$\lambda_n^2 = \int_{H_0}^{H_1} \varphi_n^2(k, z) N^2(z)\, dz \tag{2.2}$$

где λ_n — нормирующий множитель, $J_0(kr)$ — функция Бесселя, $\omega_n = \omega_n(k)$ и $\varphi_n(k, z)$ — собственные числа и собственные функции граничной задачи

$$\varphi_n'' + k^2/\omega_n^{-2}(N^2(z) - \omega_n^2)\varphi_n = 0, \quad \varphi_n(k, H_0) = \varphi_n(kH_1) = 0 \tag{2.3}$$

В рассматриваемом случае роль нижней границы $z = H_0$ играет условие экспоненциального убывания функции φ_n при $z \to -\infty$. Учитывая (1.4), из уравнения (2.3) получим ($v(\xi)$ — функция Эйри)

$$\varphi_n = v(\xi), \quad \xi = \left(\frac{kB}{\omega_n}\right)^{2/3}\left(\frac{\omega_n^2}{B^2} - z\right) \tag{2.4}$$

$$v(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \exp\left[\left(-i\frac{m^3}{3} + m\xi\right)\right] dm \tag{2.5}$$

ε — любая положительная постоянная.

Чтобы найти $\omega_n(k)$, воспользуемся нулевым граничным условием при $z = H_1$. Тогда получим (c_n — n-й корень функции Эйри)

$$\left(\frac{kB}{\omega_n}\right)^{2/3}\left(\frac{\omega_n^2}{B^2} - H_1\right) = c_n \tag{2.6}$$

В сумме (2.1) при $H_1 \gg 1$ существенны лишь слагаемые с достаточно большими n. Воспользовавшись известной асимптотикой корней c_n функции Эйри [12], из (2.6) получим

$$\omega_n \simeq \frac{2}{3}\frac{kB}{\pi n} H_1^{3/2} \tag{2.7}$$

Найдем теперь приближенное выражение для λ_n при $n \gg 1$. Для этого подставим в (2.2) выражение (2.4) и заменим $v(\xi)$ нулем при $\xi > 0$ и соответствующей асимптотикой при $\xi < 0$. Тогда

$$\lambda_n^2 \simeq \frac{B^2}{3} H_1^{3/2} \left(\frac{\omega_n}{kB}\right)^{1/3} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8), (2.4), (2.7) в (2.1) и положив

$$\xi_n = \frac{1}{\omega_n} = \frac{3n\pi}{2kBH_1^{3/2}}, \quad \Delta\xi = \frac{3\pi}{2kBH_1^{3/2}}$$

получим при $H_1 \gg 1$ интегральную сумму, которая при $H_1 \to \infty$ переходит в интеграл. Замена переменных $g = kB\xi$, $\omega = (B\xi)^{-1}$ переводит этот интеграл в выражение

$$u = -\frac{1}{\pi^2 B} \int_0^\infty \int_0^\infty g^{1/3} U(g, \omega)\, dg\, d\omega \tag{2.9}$$

$$U(g, \omega) = \sin B\omega t U_1(g, \omega), \quad U_1(g, \omega) = \tag{2.10}$$
$$= J_0(g\omega r)\, v\,[g^{2/3}(\omega^2 - z)]\, v\,[g^{2/3}(\omega^2 - z_0)]$$

Покажем, что функция u удовлетворяет уравнению (1.1) при условиии (1.4). Для этого достаточно проверить, что при любых ω и g величина $U(g, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) U + B^2 z \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right] U = 0 \tag{2.11}$$

Поэтому функция u как суперпозиция (интеграл по параметрам g и ω с весом $g^{1/3}$) точных решений уравнений (2.11) также будет решением этого уравнения. Очевидно, что $u \equiv 0$ при $t = 0$. В п. 3 будет найдено значение $\partial u/\partial t$ при $t = 0$ и показано, что

$$\partial \Delta u/\partial t\,|_{t=0} = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0) + \Psi(r, z) \tag{2.12}$$

где Ψ — регулярная функция при всех r, z.

Для удобства дальнейших выкладок преобразуем выражение (2.9) для u путем записи произведения функций Эйри в (2.10) в форме произведения интегралов (2.5) соответственно по переменным m, n.

Затем сделаем замену переменных $\alpha = m + n$, $\beta = m - n$ и проведем интегрирование по переменной β. В результате получим

$$u = \frac{-e^{i\pi/4}}{4\pi^2\sqrt{\pi B}} \int_0^\infty \int_0^\infty g^{1/3} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \sin \omega Bt J_0(g\omega r) \exp\left[i\left\{\frac{\alpha^3}{12} + g^{2/3}\alpha\left(\omega^2 - \frac{z+z_0}{2}\right) - \right.\right. \tag{2.13}$$
$$\left.\left. - g^{4/3}\frac{(z - z_0)^2}{4\alpha}\right\}\right] \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}\, dg\, d\omega$$

3. Проверка начального условия. Найдем $\partial u/\partial t\,|_{t=0}$. Продифференцируем соотношение (2.13) по t и положим $t = 0$. В полученном выражении, поскольку при $\operatorname{Im} q > 0$ справедлива формула [12]

$$\int_0^\infty \xi J_0(p\xi) \exp(iq\xi^2)\, d\xi = \frac{i}{2q} \exp\left(-\frac{ip^2}{4q}\right)$$

можно провести интегрирование по ω. Затем сделаем замену переменных $\tau = \sqrt{g}$, $\alpha = \beta\tau^{2/3}$, а также заменим контур интегрирования по β на сумму отрезков вещественной оси $|\beta| > \varepsilon$ и полуокружность радиуса ε при $\varepsilon \to 0$. Получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{e^{3i\pi/4}}{4\pi^{5/2}} [\lim_{\varepsilon\to 0} I_1 + \lim_{\varepsilon\to 0} I_2] \tag{3.1}$$

$$I_1 = \int_0^\infty d\tau \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\infty\right] \exp\{i\tau^2 f(\beta)\} \frac{d\beta}{\beta^{3/2}}$$

$$I_2 = -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^\infty d\tau \int_0^\pi d\psi e^{-i\psi/2} \exp\left\{i\tau^2\left[\frac{\varepsilon^3 e^{i\psi^3}}{12} - \frac{\varepsilon\xi e^{i\psi}}{2} - \frac{\rho^2 e^{-i\psi}}{4\varepsilon}\right]\right\}$$

$$f(\beta) = \frac{\beta^3}{12} - \frac{\beta\xi}{2} - \frac{\rho^2}{4\beta}, \quad \beta = \varepsilon e^{i\psi}, \quad \rho = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}, \quad \xi = z + z_0$$

В интеграле I_2 сделаем замену переменной $\tau = \sqrt{\varepsilon}v$, тогда получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = -i\int_0^\infty dv\int_0^\pi d\psi e^{i\psi/2}\exp\left[-\frac{iv^2\rho^2e^{i\psi}}{4}\right] = -\frac{\pi^{3/2}\sqrt{i}}{\rho} \tag{3.2}$$

Вычислим теперь $\lim I_1$ при $\varepsilon\to 0$. Поскольку $\beta^{-3/2}$ продолжается на отрицательную полуось через верхнюю полуплоскость, имеем

$$I_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\int_0^\infty d\tau\int_\varepsilon^\infty \{\cos[\tau^2 f(\beta)] + \sin[\tau^2 f(\beta)]\}\frac{d\beta}{\beta^{3/2}} = \tag{3.3}$$

$$= \sqrt{\pi}\,e^{i\pi/4}\int_{\beta_0}^\infty \frac{d\beta}{\beta^{3/2}\sqrt{f(\beta)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho}e^{i\pi/4}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{\sqrt{3\xi}},\quad \beta_0 = [3\xi + \sqrt{9\xi^2+3\rho^2}]^{1/2}$$

где β_0 — корень уравнения $f(\beta_0) = 0$.

В результате, используя (3.2), (3.3), получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = +\Phi(r, z),\quad \Phi(r, z) = \frac{1}{4\pi^2\rho}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{\sqrt{3}(z+z_0)} \tag{3.4}$$

Отсюда следует формула (2.12), где $\Psi(r, z) = \Delta\Psi(r, z)$ — функция, регулярная при $z_0 > 0$ и любых z, ρ.

4. Асимптотика функции $u(t, r, z, z_0)$ при $t \gg 1$. Согласно (2.9), (2.13), запишем выражение для u в форме

$$u(t, r, z, z_0) = -\int_0^\infty \sin B\omega t F(\omega)\, d\omega \tag{4.1}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi^2 B}\int_0^\infty g^{1/2}U_1(g, \omega)\, dg = \frac{e^{-i\pi/4}}{4\pi^{5/2}B}\int_0^\infty g^{1/2}I_0(g\omega r)\, dg\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} e^{igf(\beta)}\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} \tag{4.2}$$

Из формулы (4.1) видно, что асимптотика u при $t\to\infty$ и фиксированных значениях r, z, z_0 определяется, во-первых, значением $F(\omega)$ при $\omega = 0$ и, во-вторых, особыми точками функции $F(\omega)$, т. е. значениями ω, в которых $F(\omega)$ теряет аналитичность.

Можно показать, что

$$F(0) = \lim_{\omega\to 0} F(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2 B(z^2 + zz_0 + z_0^2)}$$

Найдем теперь особые точки функции $F(\omega)$ и их вклад в асимптотику u при $t\to\infty$. Для этого в последнем интеграле в (4.2) переведем интегрирование по β на вещественную ось, а затем перейдем с отрицательной полуоси на положительную заменой $-\beta\to\beta$. Результат можно записать в форме

$$F(\omega) = \left.\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right|_{\xi=0},\quad Q = -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^{5/2}B}\int_0^\infty \frac{dg}{\sqrt{g}}\int_0^{2\pi}\cos[g\omega r\sin\theta]\, d\theta\times$$

$$\times\int_0^\infty [\operatorname{si} g(f+\xi) + \cos g(f+\xi)]\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

Используя соотношения

$$\int_0^{2\pi}\sin[g\omega r\sin\theta]\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(g\omega r\sin\theta)\, d\theta\int_0^\infty \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} g(f+\xi)\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^\infty \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} g[f + \xi + \omega r\cos\theta]\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

и проведя интегрирование по переменной g, можно получить

$$Q = \frac{-1}{2\pi^2 B}\iint_s [\Phi(\beta, \theta, \xi)]^{-1/2}\frac{d\theta\, d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

$$\Phi(\beta, \theta, \xi) = \frac{\beta^3}{12} + \beta\left(\omega^2 - \frac{z+z_0}{2}\right) - \frac{(z-z_0)^2}{4\beta} + \omega r\cos\theta + \xi$$

где интегрирование проводится лишь по той части S полуполосы $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \beta < \infty$, на которой $\Phi(\beta, \theta, \xi) > 0$. Функция $Q(0)$, а вместе с ней и $\partial Q/\partial\xi|_{\xi=0}$ имеет особые точки, в которых нарушается аналитичность по ω лишь при тех значениях ω, для которых граница ∂S области интегрирования S, заданная уравнением $\Phi(\beta, \theta, \xi) = 0$, имеет при $\xi = 0$ особые точки, т. е. при тех значениях ω, для которых существует вещественное решение системы:

$$\Phi(\beta, \theta, 0) = 0, \ \Phi_\beta'(\beta, \theta, 0) = 0, \ \Phi_\theta'(\beta, \theta, 0) = 0 \tag{4.3}$$

Из последнего уравнения (4.3) следует, что $\cos\theta = \pm 1$. Из второго уравнения (4.3) получим

$$\beta^2 = m + n \pm 2\sqrt{mn}, \quad m = z_0 - \omega^2, \quad n = z - \omega^2$$

Чтобы величина β была вещественной, необходимо $\omega^2 < \min(z, z_0)$. Положим $z > z_0$. Тогда вещественный корень β существует лишь при $\omega^2 < z_0$ и имеет вид $\beta = \alpha_1\sqrt{m} + \alpha_2\sqrt{n}$, где $\alpha_{1,2} = \pm 1$. Подставляя эти соотношения в первое уравнение (4.3) и учитывая, что $\cos\theta = \pm 1$, $\omega > 0$, придем к уравнению для особой точки ω_1 при $\alpha_1\alpha_2 < 0$ и особой точки ω_2 при $\alpha_1\alpha_2 > 0$

$$\omega_{1,2} r = \frac{2}{3}\left[(z - \omega_{1,2}^2)^{3/2} \mp (z_0 - \omega_{1,2}^2)^{3/2}\right] \tag{4.4}$$

Учитывая, что левые части (4.4) — монотонно растущие функции $\omega_{1,2}$, а правые — убывающие функции, можно показать, что при $r\sqrt{z_0} \geqslant {}^2/_3 (z - z_0)^{3/2}$ особые точки ω_1, ω_2 существуют и главный член асимптотики u определяется тремя слагаемыми — вкладами точек $\omega = 0$, ω_1 и ω_2:

$$u \sim -\frac{\sqrt{3}}{4\pi^2 Bt}\,\frac{1}{z^2 + zz_0 + z_0} + C_1\frac{\sin(Bt\omega_1 + \pi/4)}{\sqrt{t}} + C_2\frac{\sin(Bt\omega_2 - \pi/4)}{\sqrt{t}} \tag{4.5}$$

где $C_{1,2}$ — некоторые функции переменных r, z, z_0, не зависящие от t.

К результату (4.4), (4.5) можно прийти и эвристическим путем, если в (4.2) воспользоваться асимптотикой функций Эйри при $\omega^2 < z$, z_0 и $g \to \infty$ и вычислить получающиеся при этом интегралы в явном асимптотическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mowbray D. E., Rarity B. S. H.* The internal wave pattern produced by a sphere moving vertically in a density stratified liquid.— J. Fluid Mech., 1967, v. 30, No. 3, p. 489—495.
2. *Miles J. W.* Internal waves generated by a horizontally moving source.— Geophys. Fluid Dynam., 1971, v. 2, No. 1, p. 63—87.
3. *Докучаев В. П., Долина Н. С.* Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1977, т. 13, № 6, с. 655—663.
4. *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 9, с. 954—961.
5. *Секерж-Зенькович С. Я.* Фундаментальное решение оператора внутренних волн.— Докл. АН СССР (ДАН), 1979, т. 246, № 2, с. 286—289.
6. *Стурова И. В.* Внутренние волны, возникающие в экспоненциально стратифицированной жидкости при произвольном расположении источника.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 67—74.
7. *Теодорович Э. В., Городцов В. А.* О некоторых сингулярных решениях уравнений внутренних волн.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 7, с. 776—779.
8. *Секерж-Зенькович С. Я.* Построение фундаментального решения оператора внутренних волн.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 266—274.
9. *Секерж-Зенькович С. Я.* Задача Коши для уравнения внутренних волн.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 6, с. 946—953.
10. *Городцов В. А.* Эволюция осесимметричных распределений завихренности в идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости (линейное описание).— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 583—589.
11. *Миропольский Ю. З.* О распространении импульсов в стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 12, с. 1314—1322.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.V.1984