

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.
2. Евтеев В. П. Один класс периодических решений в осредненной ограниченной эллиптической задаче трех тел. — Докл. АН ТаджССР, 1983, т. 26, № 3, с. 152—157.
3. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
4. Евтеев В. П. Один класс периодических решений в ограниченной круговой задаче трех тел. — Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 7, с. 15—18.
5. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968. 279 с.

Душанбе

Поступила в редакцию  
I.IV.1985

УДК 531.35

### ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛОДИЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Куряков В. А.

Асимптотическими методами проводится построение полодий промежуточного движения несимметричного тела вокруг центра масс, основные эффекты которого обусловлены действием малого внешнего сопротивления среды, линейного относительно угловой скорости вращения. При составлении уравнений в оскулирующих переменных используется движение, отличное от эйлеровского. Предлагается модификация процедуры усреднения, позволяющая получить конечные выражения для полодий промежуточного движения. Приводятся результаты анализа промежуточного движения и эволюции полодий эйлеровского вращения тела.

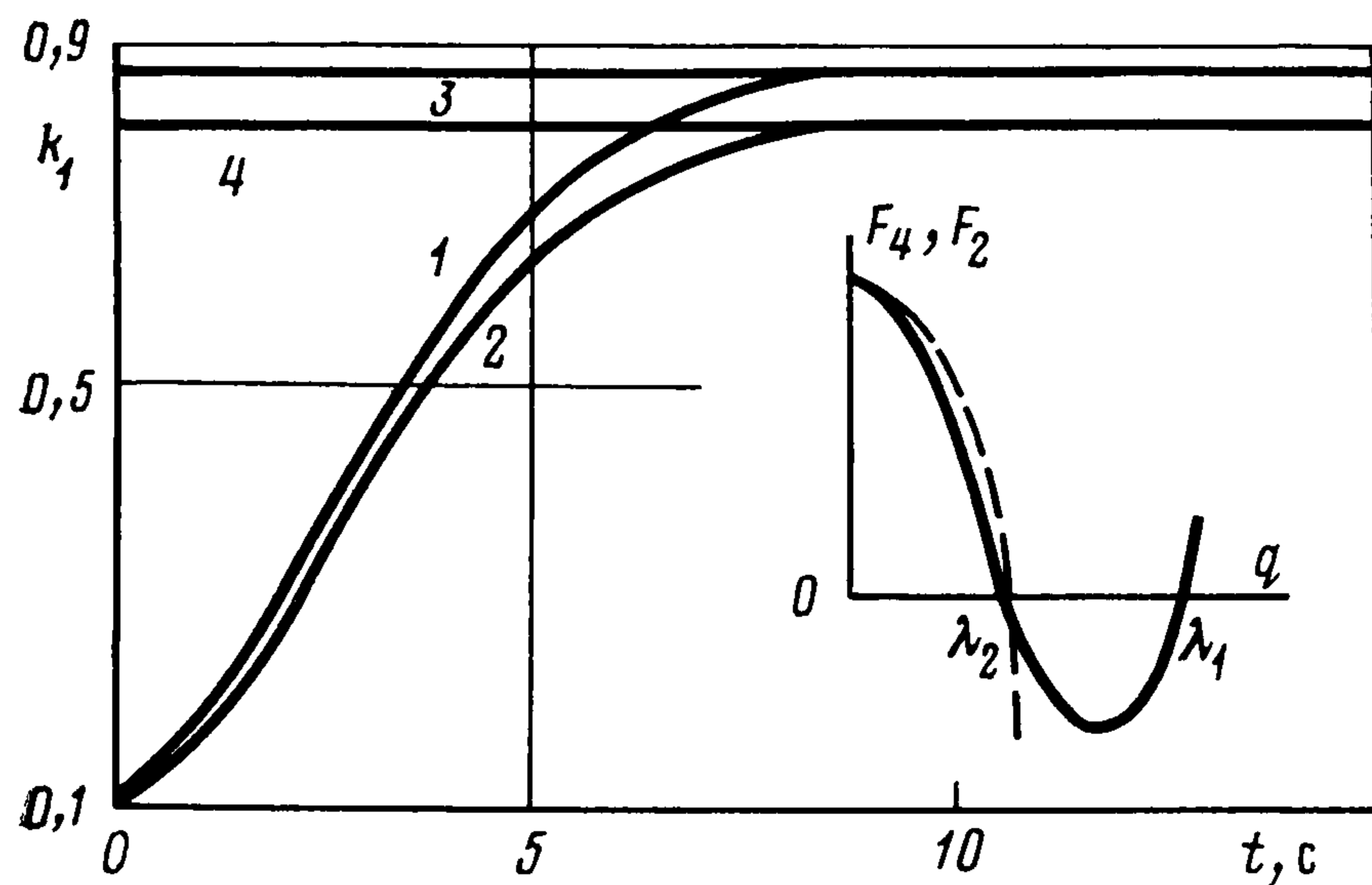
1. Рассматривается задача о быстром движении несимметричного твердого тела вокруг центра масс, основные эффекты которого обусловлены действием сопротивления внешней среды, линейного относительно угловой скорости. Быстрыми, следуя [1], будем называть такие движения, для которых момент внешних сил относительно неподвижной точки мал по сравнению с текущим значением кинетической энергии вращения. Динамические уравнения Эйлера, учитывающие отмеченные особенности движения, запишем в виде

$$(1.1) \quad Ap' + (C - B)qr = \varepsilon M_1(pqr, ABC, 123)$$

Здесь  $p, q, r$  — проекции вектора угловой скорости  $\omega$  на координатные оси,  $A, B, C$  — главные центральные моменты инерции тела,  $\varepsilon$  — малый неотрицательный параметр,  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — компоненты возмущающего момента  $M$ , где  $M = -I\omega$ ,  $I$  — матрица постоянных [2] коэффициентов сопротивления  $I_{ij}$  в связанных осях ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Далее будем полагать  $A > B > C$ .

Обычно при исследовании эволюции быстрых движений твердого тела вокруг центра масс в качестве порождающего используется движение Эйлера — Пуансо, которое получается из уравнений (1.1) при  $\varepsilon = 0$ , и применяется метод изменения произвольных постоянных (порождающего решения) Лагранжа [1—5]. Для рассматриваемой задачи такой выбор невозмущенного движения приводит к появлению эллиптических функций при последующем усреднении правых частей уравнений, что затрудняет нахождение их общего решения в конечной форме [1, 4]. В то же время универсальность [5] метода Лагранжа, применимого при произвольном выборе невозмущенного решения, позволяет проводить исследования с использованием движений, более близких к описываемому уравнениями (1.1), чем эйлеровское. Такие движения впервые отмечены в классической небесной механике, приобрели особое значение в связи с построением теории движения искусственных небесных тел и названы промежуточными, а соответствующие траектории — промежуточными орбитами [3, 5, 6].

Проблема построения траекторий (полодий и герполодий) промежуточного движения в динамике твердого тела обсуждалась в [3] и состоит в учете наиболее значительных особенностей вращательного движения таким образом, чтобы соответствующие уравнения допускали интегрирование в замкнутой форме. В публикуемой работе предлагается способ построения полодий промежуточного движения, учитывающего действие малых сил сопротивления вращению тела.



Фиг. 1

2. Интегрирование динамических уравнений Эйлера в случае Эйлера — Пуансо сводится к определению общего решения уравнения

$$(2.1) \quad q'^2 = F_4(q), \quad F_4(q) = \sigma^2 (\lambda_1^2 - q^2) (\lambda_2^2 - q^2) \\ \sigma^2 = (A - B)(B - C) / (AC)$$

записанного в обозначениях [7], где  $F_4(q)$  — многочлен четвертой степени относительно  $q$ .

Рассмотрим случай  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , что соответствует расположению  $\omega$  в окрестности оси момента инерции  $C$ . На интервале  $[-\lambda_2, \lambda_2]$  проведем аппроксимацию многочлена  $F_4(q)$  в правой части (2.1) многочленом второй степени  $F_2(q)$ . Графики одной из ветвей соответствующих четных функций  $F_4 = F_4(q)$  (сплошная линия) и  $F_2 = F_2(q)$  (штриховая) приведены на врезке к фиг. 1. Тогда, сохраняя прежние обозначения для проекций  $\omega$ , запишем

$$(2.2) \quad p = s_1 \lambda_2 \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \cos u_1, \quad q = s_2 \lambda_2 \sin u_1 \\ r = s_3 \lambda_1 \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u_1}, \quad k_1^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \\ u_1 = \lambda_1 \sigma t + \alpha$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная интегрирования,  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — числа, равные  $\pm 1$  и определяющие знаки радикалов [8].

Отметим, что выражения вида (2.2) можно получить из соответствующего решения Эйлера — Пуансо, удерживая с точностью  $O(k_1^2)$  первые гармоники в рядах Фурье [9], либо с использованием преобразования Ландена [6].

При решении основной задачи [10] построения уравнений движения по известным первым интегралам (2.2) запишем

$$(2.3) \quad Ap' + (C - B) q r \delta = 0 \quad (pqr, ABC) \\ \delta = \left[ 1 + \frac{B(A-B)q^2}{C(A-C)r^2} \right]^{1/2}$$

Уравнения (2.3) и их общее решение (2.2), используемые в дальнейшем для изучения поведения решений возмущенной системы (1.1), в отличие от порождающих будем называть базисными.

Для исследования эволюции движения составляются уравнения в оскулирующих элементах [5], в качестве которых выбираются произвольные постоянные базисного решения (2.2). После проведения выкладок запишем уравнения в следующем виде:

$$(2.4) \quad \lambda_1' = \varepsilon \left[ k_1 \frac{M_2}{B} \sin u_1 - \sqrt{\frac{C(A-C)}{B(A-B)}} \frac{M_3}{C} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u_1} \right] \\ \lambda_2' = \varepsilon \left[ \sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \frac{M_1}{A} \cos u_1 + \frac{M_2}{B} \sin u_1 \right] \\ u_1' = \lambda_1 \sigma \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u_1} + \frac{\varepsilon}{\lambda_2} \left[ \frac{M_2}{B} \cos u_1 - \sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}} \frac{M_1}{A} \sin u_1 \right]$$

где принято [8]  $s_1 = s_2 = 1, s_3 = -1$ .

Исследуем решение системы (2.4) при малом  $\varepsilon$  на большом промежутке времени  $t \sim \varepsilon^{-1}$  с использованием метода усреднения [11, 12]. Отметим, что уравнения (2.4) относятся к системам общего вида, усреднение которых проводится [11] вдоль траекторий невозмущенного движения Эйлера—Пуансо, что для (2.4) нетрудно показать. Система (2.4) использовалась [13] для сведения выкладок при усреднении к определению квадратур от элементарных функций. В целях упрощения процедуры усреднения введем среднее движение [5]  $n_1 = 2\pi/T_1$  вектора угловой скорости, где  $T_1 = 4K/(\lambda_1\sigma)$  — период обхода полюдий в невозмущенном движении. В результате, если сохранить для переменных прежние обозначения, приближенную систему с вращающейся фазой (назовем ее системой А) можно записать в виде (2.4) при замене первого слагаемого в последнем уравнении на  $n_1$ .

Переход к среднему движению в последнем уравнении соответствует аппроксимации порождающего решения Эйлера — Пуансо в процедуре усреднения (2.4) его приближенным выражением (2.2), где  $u_1 = n_1$ . Отметим также совпадение траекторий  $\omega$  и периодов порождающих движений для уравнений (2.4) и системы А.

В связи с предлагаемой модификацией процедуры усреднения следует отметить работу [14], где для упрощения исследований нелинейных систем дифференциальных уравнений в стандартной форме методом усреднения проведена замена исходных уравнений приближенными, составленными с использованием первого члена разложения порождающего решения в ряд по степеням некоторого параметра. Для периодических порождающих решений предложено использовать разложения в ряд Фурье.

3. Построение полюдий промежуточного движения предлагается проводить с использованием системы А. Запишем усредненную систему первого приближения, для чего подставим в правые части системы А выражения для проекций возмущающего момента с учетом (2.2) и проведем усреднение по быстрой переменной  $u_1$ . Погрешность усредненного решения для медленных переменных системы А составляет величину порядка  $\varepsilon$  на интервале времени, за которое  $\omega$  совершит  $\sim \varepsilon^{-1}$  оборотов по полюдиям.

Усредненные уравнения для медленных переменных запишем в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \lambda_1' &= -\frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \left[ \frac{I_{22}}{B} \lambda_2^2 + \frac{I_{33}}{C} (2\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \right] \\ \lambda_2' &= -\frac{\varepsilon\lambda_2}{2} \left( \frac{I_{11}}{A} + \frac{I_{22}}{B} \right) \end{aligned}$$

При использовании предложенного подхода к выбору базисного решения и модификации процедуры усреднения представляется возможным получить решения для уравнений (3.1) в конечной форме

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \lambda_1^2(t) &= \{C_1 + C_2\alpha_1 [\exp(\alpha_2\varepsilon t) - 1]\} \exp\left(-2\frac{I_{33}}{C}\varepsilon t\right) \\ \lambda_2(t) &= C_2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{I_{11}}{A} + \frac{I_{22}}{B}\right)\varepsilon t\right] \\ \alpha_1 &= \left(\frac{I_{33}}{C} - \frac{I_{22}}{B}\right) \left(2\frac{I_{33}}{C} - \frac{I_{11}}{A} - \frac{I_{22}}{B}\right)^{-1}, \quad \alpha_2 = \left(2\frac{I_{33}}{C} - \frac{I_{11}}{A} - \frac{I_{22}}{B}\right) \end{aligned}$$

Здесь  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные постоянные интегрирования, которые можно определить следующим образом:  $C_1 = \lambda_1^2(0)$ ,  $C_2 = \lambda_2(0)$ .

Для случая  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$  в уравнениях (2.4) и ниже необходимо поменять местами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ,  $I_{11}/A$  и  $I_{33}/C$ ,  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, где  $k_2 = k_1^{-1}$ .

Выражения (2.2), где значения  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  и  $k_1(t)$  медленно изменяются в соответствии с зависимостями (3.2), определяют полюдии промежуточного движения тела вокруг центра масс. Промежуточное движение задается естественным способом путем выбора закона движения вектора угловой скорости по полюдиям.

4. Сравним полюдии промежуточного движения, определяемые выражениями (2.2), (3.2) с результатами работы [1]. Исследование промежуточных полюдий сводится к анализу уравнения относительно функции  $k_1$

$$(4.1) \quad k_1'^2 = \varepsilon k_1^2 \left[ \left(2\frac{I_{33}}{C} - \frac{I_{11}}{A} - \frac{I_{22}}{B}\right) - k_1^2 \left(\frac{I_{33}}{C} - \frac{I_{22}}{B}\right) \right]$$

Соответствующее уравнение [1] относительно  $k_1$ , описывающее эволюцию полюдий эйлеровского вращения тела, запишем в виде

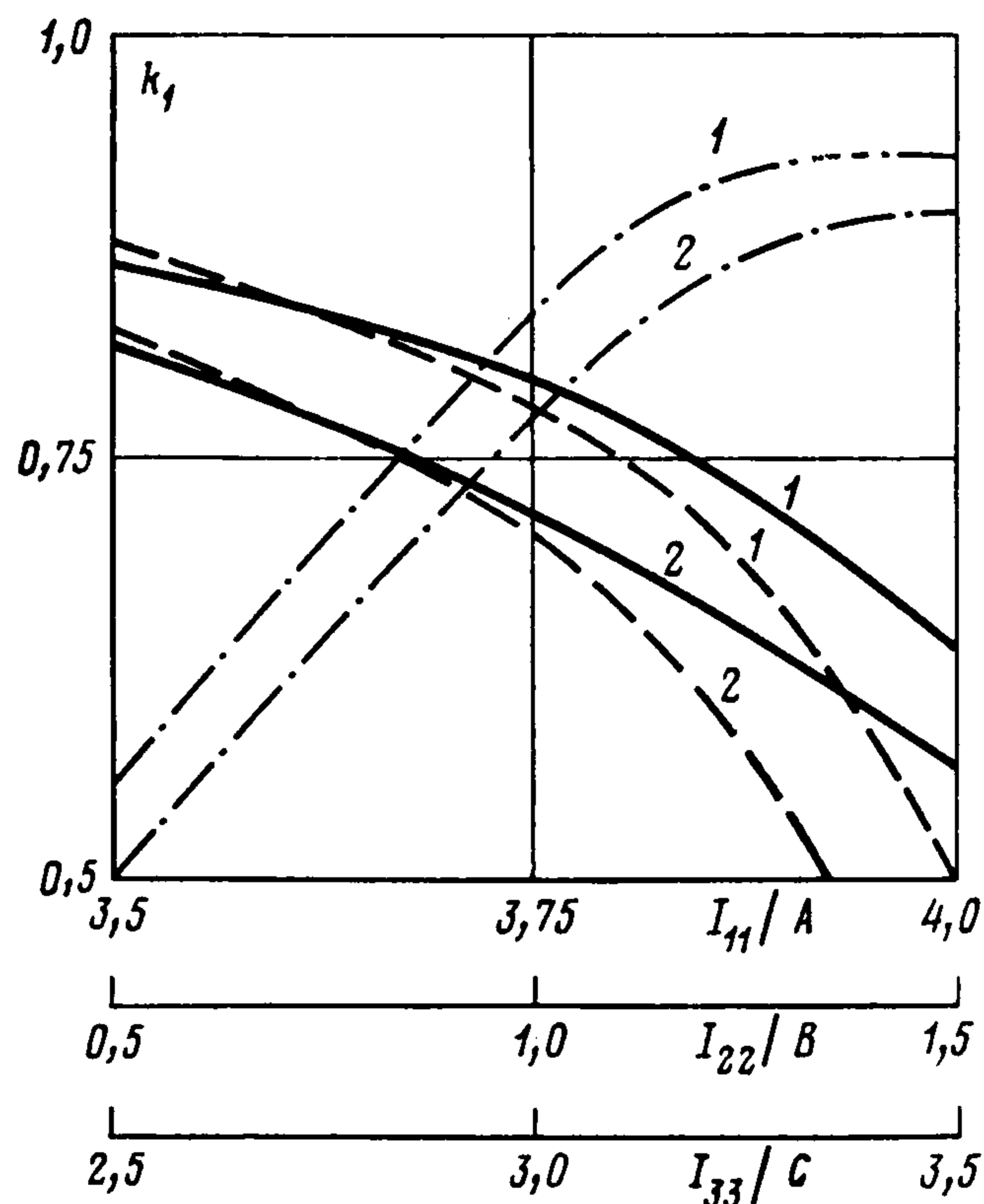
$$(4.2) \quad k_1'^2 = 2\varepsilon \left[ k_1^2 \left( \frac{I_{33}}{C} \frac{E}{K} + \frac{I_{22}}{B} \frac{K-E}{K} - \frac{I_{11}}{A} \right) + \frac{K-E}{K} \left( \frac{I_{11}}{A} - \frac{I_{22}}{B} \right) \right]$$

где  $K = K(k_1)$ ,  $E = E(k_1)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно,  $k_1$  — модуль эллиптических функций Якоби. Можно показать, что с учетом дополнительного условия существования ненулевых квазистационарных решений уравнения (4.1)

$$\left(2 \frac{I_{33}}{C} - \frac{I_{11}}{A} - \frac{I_{22}}{B}\right) \left(\frac{I_{33}}{C} - \frac{I_{22}}{B}\right)^{-1} \leq 1$$

результаты качественного анализа поведения решений уравнения (4.1) совпадают с приведенными в [1] для уравнения (4.2).

Для численного сравнения на фиг. 1 приведены графики решений уравнений (4.2) — кривая 1 и (4.1) — кривая 2 при  $I_{11}/A = 3,5$ ,  $I_{22}/B = 1,5$ ,  $I_{33}/C = 3,0$ ,  $k_1(0) = 0,1$ .



Фиг. 2

Прямые 3, 4 соответствуют квазистационарным решениям. На фиг. 2 представлены зависимости квазистационарных решений от значений коэффициентов диссипации, где кривые 1 отвечают уравнению (4.2), а кривые 2 — (4.1). Сплошными линиями выделена зависимость от  $I_{11}/A$ , где принято  $I_{22}/B = 1,5$ ,  $I_{33}/C = 3,0$ , штриховыми линиями — зависимость от  $I_{22}/B$  при  $I_{11}/A = 2,5$ ,  $I_{33}/C = 2,0$ , и штрихпунктирными — зависимость от  $I_{33}/C$  для  $I_{11}/A = 4,0$ ,  $I_{22}/B = 0,2$ .

Из приведенных результатов следует, что отличия построенных полостей промежуточного движения от соответствующих эволюционных изменений полостей эйлеровского вращения [1] не превосходят для рассмотренных случаев 10%. Погрешность связана с усреднением правых частей системы А вдоль полостей (2.2) с учетом закона движения  $\omega$  по ним вида  $u_1 \dot{=} n_1$  вместо выражения  $u_1 \dot{=} \lambda_1 \sigma \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 u_1}$ , отвечающего движению Эйлера — Пуансо.

Автор благодарит Д. А. Погорелова за постановку задачи и внимание к работе, Л. Д. Акуленко, В. Г. Демина и В. Ф. Журавлева за обсуждение работы и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Леценко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 5—13.
2. Белецкий В. В., Яншин А. М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984, 187 с.
3. Баркин Ю. В., Демин В. Г., Марков Ю. Г., Панкратов А. А. Переменные Пуассона, Андуайе и Шарлье в небесной механике и динамике твердого тела. — В кн.: Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. школа, 1982, № 12, с. 92—100.
4. Леценко Д. Д. О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо-сопротивляющейся среде. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 3, с. 89—94.
5. Дубошин Г. Н. Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 351 с.
6. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
7. Бухгольц Н. Н. Основы курса теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972. 332 с.
8. Wittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner, 1977. 224 p. — Рус. перев.: М.: Мир, 1980. 292 с.
9. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
10. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 143 с.
11. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
12. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.

13. *Куряков В. А.* Быстрое движение вокруг центра масс твердого тела в среде с квадратичным законом сопротивления. — Изв. АН СССР. МТТ, 1986, № 2, с. 25—31.  
 14. *Мухин Н. П.* Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем. — Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 6, с. 51—54.

Москва

Поступила в редакцию  
28.XI.1985

УДК 532.5 : 534.1

## ЭВОЛЮЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТОЙ БРЕНТА — ВЯЙСЯЛЯ

Анютин А. П., Боровиков В. А.

Строится приближенное выражение для функции Грина  $\Gamma(t, \sqrt{x^2 + y^2}, z, z_0)$  уравнения внутренних волн в случае переменного квадрата частоты плавучести

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(t)} \frac{d\rho_0(z)}{dz} = B^2 z$$

имеющее при  $z, z_0 > 0$  и  $t \rightarrow \infty$  ту же коротковолновую асимптотику, что и точная функция Грина. Оказалось, что эта асимптотика имеет качественное отличие от подробно рассмотренного во многих работах, например [1—10]<sup>1</sup>, случая  $N = \text{const}$ . При  $N = \text{const}$  функция Грина убывает при  $t \rightarrow \infty$  как  $t^{-1/2}$  и состоит из двух слагаемых  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  осциллирует с частотой  $N$ , а  $\Gamma_2$  — с частотой  $N \cos \theta$  ( $\theta$  — угол между направлением из источника в точку наблюдения и осью  $z$  [4, 5, 8]). Для  $N = B^2 z$  функция Грина осциллирует лишь вне области  $V$ , заданной уравнением  $r\sqrt{z_-} \leq 2/3 |z - z_0|^{3/2}$ , где  $z_- = \min(z, z_0)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Внутри  $V$  функция Грина не осциллирует и монотонно убывает как  $t^{-1}$ . Вне  $V$  эта функция состоит из двух слагаемых, аналогичных функциям  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  для случая  $N = \text{const}$ .

1. Постановка задачи. Задача распространения и эволюции малых возмущений линейных внутренних волн в безграничной идеально стратифицированной жидкости в случае локализованных начальных возмущений сводится к построению функции Грина  $\Gamma(t, \sqrt{x^2 + y^2}, z, z_0)$ , т. е. к определенному при  $t > 0$  решению уравнения

$$(1.1) \quad L\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\Gamma + N^2(z) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Gamma = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

с начальными условиями при  $t = 0$

$$(1.2) \quad \Delta\Gamma = 0; \quad \partial/\partial t \Delta\Gamma = \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0)$$

Асимптотика  $\Gamma$  при  $t \rightarrow \infty$  определяет асимптотику волнового поля при локализованных начальных возмущениях.

В случае постоянного  $N$  [1—10] функция Грина  $\Gamma$  строится методом Фурье [4, 5, 8], а ее асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  имеет вид [5]:  $\Gamma = \Gamma_-(t) + \Gamma_+(t |\cos \theta|)$ , где

$$(1.3) \quad \Gamma_{\pm} \sim \pm \frac{\sqrt{2} \sin\left(Nt \pm \frac{\pi}{4}\right)}{(N\pi)^{3/2} \rho \sqrt{t} \sin \theta}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{z - z_0}{\rho}$$

Здесь первое слагаемое — стоячая волна, осциллирующая с частотой  $N$ , а второе имеет пространственные осцилляции, длина волны которых стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Гребни волн второго слагаемого — это конусы с вертикальной осью  $z$ , угол раскрытия которых  $\alpha = \arccos [\pi(n - 1/4)(Nt)^{-1}]$  увеличивается с ростом  $t$ .

<sup>1</sup> *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеально несжимаемой жидкости. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1978, № 114. 37 с.