УДК 521.1

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПОЧТИ КРУГОВЫХ ОРБИТ ВО ВНУТРЕННЕМ ВАРИАНТЕ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Евтеев В. П.

Выявляется класс периодических орбит в классической ограниченной задаче трех тел. Используется разновидность метода малого параметра. Доказывается сходимость построенных решений и указывается их область сходимости.

1. Постановка задачи. Пусть материальная точка P_0 с массой m_0 обращается с постоянной угловой скоростью n по кеплеровской круговой орбите вокруг точки P_1 с массой m_1. За начало правой прямоугольной системы координат $OXYZ$ примем точку P_1. Плоскость орбиты точки P_0 примем за основную координатную плоскость XOY, прямую P_1OP_0 — за ось OX. Положительное направление оси OY выберем так, чтобы среднее движение было положительным.

Пусть теперь пассивно гравитирующее третье тело P обращается вокруг P_0, тогда уравнения его движения запишутся следующим образом [1]:

$$X^{\cdot\cdot} - 2nY^{\cdot} - n^2X = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad Y^{\cdot\cdot} - 2nX - n^2Y = \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad Z^{\cdot\cdot} = \frac{\partial U}{\partial Z} \tag{1.1}$$

$$U = f\left(\frac{m_0}{R} + \frac{m_1}{R_0}\right) + \frac{n^2m_1X_0X}{m_0+m_1}$$

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad R_0{}^2 = (X - X_0)^2 + Y^2 + Z^2$$

(X_0 — абсцисса точки P_0, f — постоянная тяготения).

Разложив R_0 по степеням X/X_0 и введя замену [2]

$$X = \alpha x, \quad Y = \alpha y, \quad Z = \alpha z, \quad t = k\tau/\sqrt{fm_1}$$

предположении, что

$$k = \alpha^{3/2}(k_0 + \alpha k_1 + \ldots), \qquad n/\sqrt{fm_1} = \alpha^{-3/2}(n_0 + \alpha n_1 + \ldots)$$

систему (1.1) приведем к виду

$$x'' - 2k_0n_0y' - k_0{}^2n_0{}^2x + \frac{k_0{}^2x}{r^3} + \alpha F_1 = \alpha^2\frac{\partial U}{\partial x} \tag{1.2}$$

$$y'' + 2k_0n_0x' - k_0{}^2n_0{}^2y + \frac{k_0{}^2y}{r^3} + \alpha F_2 = \alpha^2\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$z'' + \frac{k_0{}^2z}{r^3} + \alpha F_3 = \alpha^2\frac{\partial U}{\partial z}$$

Здесь

$$F_1 = Ay' + (B + \chi)x, \quad F_2 = -Ax' + (B + \chi)y, \quad F_3 = \chi z$$

$$A = 2(k_0n_1 + k_1n_0), \qquad B = 2(k_0k_1n_0{}^2 + k_0{}^2n_0n_1), \qquad \chi = -\frac{2k_0k_1}{r^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{m_0k_0{}^2}{m_1x_0{}^2} + O(\alpha), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = O(\alpha), \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = O(\alpha)$$

2. Доказательство существования периодических решений. Перейдем к новым переменным, воспользовавшись соотношениями

$$x = \rho\cos(v - k_0n_0\tau), \quad y = \rho\sin(v - k_0n_0\tau), \quad z = \zeta$$

Тогда система (1.2) перепишется в виде

$$\rho'' - \rho(v')^2 + \frac{k_0{}^2}{r^3}\rho + \alpha F_1 = \alpha^2\frac{\partial U}{\partial\rho} \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{d\tau}(\rho^2v') + \alpha F_2 = \alpha^2\frac{\partial U}{\partial v}, \qquad \zeta'' + \frac{k_0{}^2}{r^3}\zeta + \alpha F_3 = \alpha^2\frac{\partial U}{\partial\zeta}$$

При $\alpha = 0$ эта система допускает частное решение $\rho = 1$, $v = k_0\tau$, $\zeta = 0$, определяющее кеплерово круговое движение пассивно гравитирующей материальной точки.

Введем новые искомые функции

$$\rho = 1 + \xi, \quad v = \eta + k_0\tau, \quad \zeta = \xi$$

относительно которых система (2.1) будет иметь вид

$$\xi'' = (1+\xi)(k_0+\eta') - \frac{k_0^2}{r^3}(1+\xi) - \alpha F_1 + \alpha^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \tag{2.2}$$

$$\eta'' = \frac{2(k_0+\eta')\xi'}{1+\xi} + \frac{\alpha F_2}{1+\xi} + \frac{\alpha^2}{(1+\xi)^2}\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\zeta'' = -\frac{k_0^2}{r^3}\zeta + \alpha F_3 + \alpha^2 \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

Решение последней системы будем искать в виде рядов по степеням малого параметра

$$\xi = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha^i \xi_{i-1}, \quad \eta = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha^i \eta_{i-1}, \quad \zeta = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha^i \zeta_{i-1} \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в (2.2) и приравняем члены при одинаковых степенях α в правых и левых частях последней системы уравнений. Пусть теперь $k_0 n_1 + k_1 n_0 = k_0 k_1$. Тогда общее решение системы уравнений относительно ξ_1, η_1, ζ_1 будет иметь вид

$$\xi_1 = \beta_1 \cos k_0\tau + \beta_2 \sin k_1\tau + \beta_3 + a_{11} \cos k_0 n_1 \tau$$

$$\eta_1 = -2\beta_1 k_0 \tau + 2\beta_2 \cos k_1\tau + b_{01}\tau + b_{11} \sin k_0 n_1 \tau + \beta_6$$

$$\zeta_1 = \beta_4 \cos k_0\tau + \beta_5 \cos k_0 \tau$$

$$a_{11} = \frac{k_0^2(n_0+1)}{x_0^2(n_0-1)(n_0-2)n_0}, \qquad b_{01} = \frac{3}{2}k_0\beta_3$$

$$b_{11} = \frac{k_0}{x_0^2(n_0-1)}\left[\frac{1}{2k_0} - \frac{(n_0^2+2n_0+7)(n_0+1)k_0}{2(n_0-1)(n_0-2)n_0}\right]$$

($\beta_1 \ldots \beta_6$ — произвольные постоянные интегрирования). Предположим, что $n_0 = p/q$ не является целым числом ($p, q = \pm 1, \pm 2, \ldots$), тогда правые части системы уравнений (2.2) — периодические функции периода $T = 2\pi k_0^{-1} q$.

Потребуем выполнения условий

$$\psi_1 = \xi(T) - \xi(0) \equiv 0, \quad \psi_2 = \xi'(T) - \xi'(0) \equiv 0, \quad \psi_3 = \eta(T) - \eta(0) \equiv 0$$

$$\psi_4 = \eta'(T) - \eta'(0) \equiv 0, \quad \psi_5 = \zeta(T) - \zeta(0) \equiv 0, \quad \psi_6 = \zeta'(T) - \zeta'(0) \equiv 0$$

из которых можно определить $\beta_1, \ldots, \beta_6$ как однозначные функции α. Тогда ξ, η, ζ будут периодическими функциями с общим периодом T. Для системы (2.2) условия периодичности примут вид

$$\psi_1/\alpha = \beta_1 \cos k_0 T - \beta_1 + \beta_2 \sin k_0 T + a_{11} \cos k_0 n_1 T + O(\alpha) \equiv 0 \tag{2.4}$$

$$\psi_2/\alpha = -k_0\beta_1 \sin k_0 T + k_0\beta_2 \cos k_0 T - k_0\beta_2 + a_{11}k_0 n_1 \sin k_0 n_1 T + O(\alpha) \equiv 0, \quad \psi_3/\alpha = -2\beta_1 \sin k_0 T + 2\beta_2 \cos k_0 T - 2\beta_2 + b_{01} \sin k_0 n_1 T + O(\alpha) \equiv 0$$

$$\psi_5/\alpha = \beta_4 \cos k_0 T - \beta_4 + \beta_5 \sin k_0 T + O(\alpha) \equiv 0,$$

$$\psi_6/\alpha = -k_0\beta_4 \sin k_0 T + k_0 \beta_5 \cos k_0 T - k_0\beta_5 + O(\alpha) \equiv 0,$$

$$\psi_4/\alpha = -2\beta_1 \cos k_0 T + 2\beta_1 k_0 - 2\beta_2 \sin k_0 T - b_{11}k_0 n_1 \cos k_0 n_1 T + b_{11} k_0 n_1 + O(\alpha) \equiv 0$$

Пользуясь существованием интеграла Якоби у системы (2.2), можно выразить β_6 через $\beta_1, \ldots, \beta_5$. Поэтому последнее равенство (2.4) отбросим. Для оставшихся пяти равенств якобиан

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_5, \psi_6)}{D(\beta_1, \ldots, \beta_5)} = \frac{24\pi}{k_0(n_0-1)} \sin^4 \frac{\pi}{n_0-1}$$

Этот результат приводит к теореме.

Теорема. Если k_0 — вещественное число, отличное от нуля, $n_0 k_1 + k_0 n_1 = k_0 k_1$, а величины $n_0 = p/q$ и $q/(p-q)$ не являются целыми числами ($p, q = \pm 1, \pm 2, \ldots$), то система (2.2) допускает формальное решение в виде рядов (2.3) периода $T = 2\pi k_0^{-1} q$.

Доказательство сходимости решений (2.3) можно привести методом мажорант [3]. Перепишем систему (2.2) в виде

$$du_k/d\tau = f_k(u_1, \ldots, u_6, \alpha), \quad k = 1, \ldots, 6 \tag{2.5}$$

полагая $\xi = u_1$, $\xi' = u_2$, $\eta = u_3$, $\eta' = u_4$, $\zeta = u_5$, $\zeta' = u_6$.

Имеем

$$(2.6)\qquad u_i' = u_{i+1} \quad (i = 1, 3, 5), \qquad u_2' = (1 + k_0)(k_0 + u_4)^2 + f\frac{\partial \varkappa}{\partial u_1}$$

$$u_4' = -\frac{2u_2(k_0 + u_4)}{1 + u_1} + f\frac{\partial \varkappa}{\partial u_3}, \qquad u_6' = f\frac{\partial \varkappa}{\partial u_5}$$

$$\varkappa = \frac{m_0}{R} + \frac{m_1}{R_0}, \qquad \frac{1}{R_0} = \frac{1}{A^{1/2} X_0 (1 + z/A)^{1/2}}$$

$$A = 1 - 2\frac{\alpha}{X}\cos((k_0 - k_0 n_1)\tau + u_3) + \left(\frac{\alpha}{X_0}\right)^2$$

$$z = \left(\frac{\alpha}{X_0}\right)^2 (u_1^2 + u_5^2) + 2\frac{\alpha}{X_0}\left(-\cos(k_0(n_0 - 1)\tau + n_0) + \frac{\alpha}{X_0}\right)u_1$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha}(1 + 2u_1 + u_1^2 + u_5^2)^{-1/2}$$

Пусть $\delta < 1$ и $|u_1| < \delta$, $|u_5| < \delta$, $\alpha/X_0 < 1/4$, тогда

$$|z| < \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{5}{8}\delta, \qquad \frac{9}{16} \leqslant A \leqslant \frac{25}{16}$$

Отсюда следует, что функция $1/R_0$ будет регулярна, если выполняется неравенство

$$2\delta^2 + 10\delta - 9 < 0$$

Итак, если

$$|u_1| < \frac{\sqrt{43} - 5}{2}, \qquad |u_5| < \frac{\sqrt{43} - 5}{2}, \qquad \frac{\alpha}{X} < \frac{1}{4}$$

то функция $1/R_0$ регулярна. Так же доказывается регулярность $1/R$ и $2u_1(k_0 + u_4)/(1 + u_1)$ при тех же условиях.

Из доказанного получаем теорему.

Теорема 2. Если в области

$$D = \{|u_i| < 1/2, \quad i = 1, \ldots, 6, \ \alpha/X_0 < 1/4, \ k_0 < 1\}$$

то правые части (2.6) будут аналитическими функциями, равномерно ограниченными по τ.

В области D имеем неравенства $|f_i(u_1, \ldots, u_6, \alpha)| < N$, $i = 1, \ldots, 6$, $N = 9/2 + [1 + f(m_0 + m_1)]/(7X_0)$.

Теорема доказана.

Для доказательства сходимости рядов (2.3) воспользуемся теоремой Коши [4, с. 45]. Разложим каждую функцию $f_i(u_1, \ldots, u_6, \alpha)$ $(i = 1, \ldots, 6)$ в ряд. Так как $|u_i| < 1/2$, то из теоремы Коши получаем

$$\left|\frac{1}{i_1! \ldots i_6!} \cdot \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_6} f(u_1, \ldots, u_6, \alpha)}{\partial^{i_1} u_1 \ldots \partial^{i_6} u_6}\right| < N\left(\frac{1}{2}\right)^{i_1 + \ldots + i_6}$$

Поэтому специального вида степенной ряд, не зависящий от

$$g(u) = g_k(u) = N\prod_{k=1}^{6}(1 - u_{k/2})^{-1}$$

будет мажорантой для любого из рядов $f_i(u_1, \ldots, u_6, \alpha)$.

Так как правые части уравнений

$$g_k^{\cdot} = g(y), \quad y_k(\tau_0) = b_0 \quad (k = 1, \ldots, 6) \quad (b_0 = \mathrm{const})$$

не зависят от k, то их решения $y_k(\tau)$ даются одним степенным рядом $y = y(\tau)$, удовлетворяющим уравнению

$$y^{\cdot} = N(1 - y/2)^{-6}, \quad y(\tau_0) = b_0$$

Прямое интегрирование дает

$$y = 2 - 2(b - 7N\tau/2)^{1/7}, \quad b = (1 - b_0/2)^7 + 7N\tau_0/2$$

Соответствующий ряд сходится при $|\tau| < 2b/7N$. Тем более будет сходиться $|u_i(\tau)|$ при этом условии. Таким образом, сходимость доказана.

Окончательно получаем теорему.

Теорема. Если $|\tau| < 2b/7N$, то в области $\bar{D}$ ряды (2.3) абсолютно сходятся. Функции, представляемые этими рядами, являются решением системы (2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.
2. *Евтеев В. П.* Один класс периодических решений в осредненной ограниченной эллиптической задаче трех тел.— Докл. АН ТаджССР, 1983, т. 26, № 3, с. 152—157.
3. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
4. *Евтеев В. П.* Один класс периодических решений в ограниченной круговой задаче трех тел.— Докл. АН ТаджССР, 1977, т. 20, № 7, с. 15—18.
5. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968. 279 с.

Душанбе

Поступила в редакцию
I.IV.1985

УДК 531.35

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛОДИЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ДВИЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Куряков В. А.

Асимптотическими методами проводится построение полодий промежуточного движения несимметричного тела вокруг центра масс, основные эффекты которого обусловлены действием малого внешнего сопротивления среды, линейного относительно угловой скорости вращения. При составлении уравнений в оскулирующих переменных используется движение, отличное от эйлеровского. Предлагается модификация процедуры усреднения, позволяющая получить конечные выражения для полодий промежуточного движения. Приводятся результаты анализа промежуточного движения и эволюции полодий эйлеровского вращения тела.

1. Рассматривается задача о быстром движении несимметричного твердого тела вокруг центра масс, основные эффекты которого обусловлены действием сопротивления внешней среды, линейного относительно угловой скорости. Быстрыми, следуя [1], будем называть такие движения, для которых момент внешних сил относительно неподвижной точки мал по сравнению с текущим значением кинетической энергии вращения. Динамические уравнения Эйлера, учитывающие отмеченные особенности движения, запишем в виде

$$Ap^{\cdot} + (C - B)\,qr = \varepsilon M_1\,(pqr,\ ABC,\ 123) \tag{1.1}$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на координатные оси, A, B, C — главные центральные моменты инерции тела, ε — малый неотрицательный параметр, M_i ($i = 1, 2, 3$) — компоненты возмущающего момента $\mathbf{M}$, где $\mathbf{M} = -I\boldsymbol{\omega}$, I — матрица постоянных [2] коэффициентов сопротивления I_{ij} в связанных осях (i, $j = 1, 2, 3$). Далее будем полагать $A > B > C$.

Обычно при исследовании эволюции быстрых движений твердого тела вокруг центра масс в качестве порождающего используется движение Эйлера — Пуансо, которое получается из уравнений (1.1) при $\varepsilon = 0$, и применяется метод изменения произвольных постоянных (порождающего решения) Лагранжа [1—5]. Для рассматриваемой задачи такой выбор невозмущенного движения приводит к появлению эллиптических функций при последующем усреднении правых частей уравнений, что затрудняет нахождение их общего решения в конечной форме [1, 4]. В то же время универсальность [5] метода Лагранжа, применимого при произвольном выборе невозмущенного решения, позволяет проводить исследования с использованием движений, более близких к описываемому уравнениями (1.1), чем эйлеровское. Такие движения впервые отмечены в классической небесной механике, приобрели особое значение в связи с построением теории движения искусственных небесных тел и названы промежуточными, а соответствующие траектории — промежуточными орбитами [3, 5, 6].

Проблема построения траекторий (полодий и герполодий) промежуточного движения в динамике твердого тела обсуждалась в [3] и состоит в учете наиболее значительных особенностей вращательного движения таким образом, чтобы соответствующие уравнения допускали интегрирование в замкнутой форме. В публикуемой работе предлагается способ построения полодий промежуточного движения, учитывающего действие малых сил сопротивления вращению тела.