Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 531.36

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Блинов А. П.

Определяются достаточные условия существования конечной области притяжения невозмущенного решения автономных систем с запаздыванием и дается ее оценка снизу способом, для которого требуется лишь знание функции Ляпунова для исследуемой системы при отсутствии запаздывания.

Результаты исследования устойчивости нелинейных систем с запаздыванием [1, 2] позволяют определять области устойчивости в пространстве параметров нелинейной задачи и находить области притяжения невозмущенного решения, в основном, для автономных и неавтономных систем первого порядка.

Для конструктивного применения методов [1, 2] к системам более высокого порядка предлагалось [3] использование вектор-функции Ляпунова.

Пусть невозмущенное движение $x = 0$ системы

$$x_i^{\cdot} = f_i(x(t)) + \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(x(t))\, u_j(x(t-\tau)), \quad \tau = \mathrm{const} \geqslant 0 \tag{1}$$

$$x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad f_i,\ F_{ij},\ u_j \in C^1(\Omega), \quad \Omega \subset R^n, \quad m \leqslant n$$

при отсутствии запаздываний ($\tau = 0$) асимптотически устойчиво и для (1) известна определенно-положительная в выпуклой области $\Omega_0 \subset \Omega$ функция Ляпунова $V(x)$, производная по времени от которой в силу системы (1) ($\tau = 0$) определенно отрицательна в Ω. Некоторые или все (при $m = n$) функции $f_i(x(t))$ здесь могут быть тождественно равны нулю.

За начальный момент времени примем $t = 0$. Пусть при $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ начальную непрерывную кривую описывает функция $\Phi(t) \in \Omega$. Представим ее в виде суммы $\Phi(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, где $\|\varphi(t)\| \leqslant \varphi^*$, $\varphi^* = \mathrm{const}$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора), а функция $\psi(t)$, $\psi(0) = x(0)$ — решение системы (1) при $\tau = 0$. Без ограничения общности будем считать $\varphi(0) = 0$. Функцию $\psi(t)$ назовем опорной функцией.

Пусть область Ω^* вместе с границей $\partial\Omega^*$, определяемой уравнением $V(x) = v^*$, $v^* = \mathrm{const} > 0$, лежит внутри Ω_0. Такая область является областью притяжения невозмущенного решения $x = 0$ системы (1) при $\tau = 0$ [1]. Она может разрушиться при $\tau \neq 0$. Ниже рассматриваются только ограниченные области. Если же движение $x = 0$ при $\tau = 0$ асимптотически устойчиво в целом, то ограниченную область Ω_0 выбираем произвольно.

Под областью притяжения невозмущенного движения $x = 0$ системы (1) будем понимать множество таких точек фазового пространства, которые являются начальными значениями решений (1), стремящихся при $t \to \infty$ к невозмущенному движению $x = 0$ при любых начальных функциях $\Phi(t)$ из определенного выше класса.

Выясним условия, налагаемые на параметры τ и φ^*, при которых область Ω^* остается лежать в области притяжения невозмущенного движения.

В промежутке времени $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ представим решение системы (1) ($\tau \neq 0$) в виде суммы $x(t) = \psi(t) + y(t)$, где $y(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-\tau, 0]$. Тогда функция $y(t)$ в соответствии с (1) при $t \geqslant 0$ должна удовлетворять векторному дифференциальному уравнению, которое может быть записано в виде

$$y^{\cdot} = \sum_{k=1}^{4} F_k(y, \psi, \tau) \tag{2}$$

$$F_1 = f(\psi + y) + F(\psi + y)\, u(\psi + y) - f(\psi) - F(\psi)\, u(\psi)$$

$$F_2 = F(\psi + y)\, [u(\psi) - u(\psi + y)], \quad F_3 = F(\psi + y)\, \{u[\psi(t-\tau) + y(t-\tau)] - u[\psi(t-\tau)]\}, \quad F_4 = F(\psi + y) \{u[\psi(t-\tau)] - u[\psi(t)]\}$$

(Здесь и иногда ниже в функциях, не зависящих от τ, аргумент t явно не выписываем.)

Решение $x(t)$ системы (1), проходящее при $t = 0$ через точку $x_0 \in \bar{\Omega}^*$ ($\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω), при любой начальной функции $(\varphi(t) + \psi(t))$, $\psi(0) = x_0$ не может покинуть область Ω_0 за время, меньшее

$$t^* = \frac{a^*}{A^*}, \quad A^* = \max_{x,\, z \in \bar{\Omega}_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(x)\, u(z) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

где a^* — расстояние между поверхностями $\partial\Omega^*$ и $\partial\Omega_0$ ($\partial\Omega_0$ — граница области Ω_0, определяемая уравнением $V(x) = v_0$).

Поэтому если область Ω не совпадает с R^n, то примем предварительное ограничение для запаздывания: $\tau \leqslant t^*$. Решению $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$ будет соответствовать решение $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$ системы (2) с начальной функцией $\varphi(t)$.

Оценим по норме решение $y(t)$ в промежутке времени $[0, \tau]$. Область Ω_0 выпукла, поэтому для норм слагаемых правой части (2) можно дать оценку сверху [4]

(3) $$\|F_1\| \leqslant K_1 \|y\|, \quad \|F_2\| \leqslant K_2 K_3 \|y\|$$

$$\|F_3\| \leqslant K_2 K_3 \|y(t-\tau)\|, \quad \|F_4\| \leqslant K_2 K_3 \|\psi(t-\tau) - \psi(t)\|$$

$$K_1 = n^{3/2} a_1, \quad a_1 \geqslant \left| \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_k} \right|, \quad h_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(x)\, u_j(x)$$

$$K_2 = n\sqrt{m}\ a_2, \quad a_2 \geqslant \left| \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_k} \right|, \quad K_3 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F_{ij}^2(x) \right]^{1/2}$$

$x \in \bar{\Omega}_0$; $i, k = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$.

Здесь $\psi(t)$ — опорное решение, соответствующее решению $x(t)$, т. е. $\psi(0) = x(0)$. Так как

$$|\psi_i(t-\tau) - \psi_i(t)| = \left| \int_{t-\tau}^{t} h_i(x(s))\, ds \right|$$

то

$$\|\psi(t-\tau) - \psi(t)\| \leqslant A\tau, \qquad A = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} h_i^2(x) \right\}^{1/2}, \qquad x \in \bar{\Omega}_0$$

Следовательно, для системы (2) имеет место неравенство

(4) $$\|y^{\cdot}\| \leqslant a\|y\| + b\,\|y(t-\tau)\| + bA\tau, \quad a = K_1 + b, \quad b = K_2 K_3$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получим $\|y\|^{\cdot} \leqslant \|y^{\cdot}\|$. Тогда для $0 \leqslant t \leqslant \tau$, введя новую переменную $z = \|y\|$ и учитывая, что $z(t-\tau) = \|\varphi(t-\tau)\|$, для системы (2) можем записать дифференциальное скалярное неравенство

(5) $$z^{\cdot} \leqslant az(t) + b\varphi_0(t) + bA\tau, \quad \varphi_0(t) = \|\varphi(t-\tau)\|$$

Учитывая, что $z(0) = 0$, и используя метод доказательства утверждения (Д) ([5], с. 172), получим

(6) $$z(t) \leqslant c\,(A\tau + \varphi^*)\,(e^{at} - 1), \quad c = b/a]$$

Таким образом, отклонение по норме исследуемой траектории системы (1) от опорной траектории на промежутке $0 \leqslant t \leqslant \tau$ не превосходит величины $z(\tau)$, оцениваемой правой частью неравенства (6).

Обозначим $\{\psi^k(t)\}$ $(k = 1, 2 \ldots)$ последовательность опорных траекторий для решения $x(t)$ (1), удовлетворяющих условиям $\psi^k(k\tau) = x(k\tau)$. Для отклонения $x(t)$ от $\psi^1(t)$, $t \in [0, \tau]$ имеет место оценка

(7) $$\|\psi^1(t) - x(t)\| \leqslant \|\psi^1(t) - \psi(t)\| + \|\psi(t) - x(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\psi^1(\tau) - \psi(\tau)\|\, e^{na_1\tau} + z(\tau) \leqslant z(\tau)\,(1 + e^{na_1\tau})$$

Заметим, что неравенство (7) сохраняется и для любого опорного решения $\psi^\lambda(t)$, $\psi(\lambda\tau) = x(\lambda\tau)$, $\lambda \in [0,1]$ при $t \in [-\lambda\tau, (1-\lambda)\tau]$.

Исследуем некоторые свойства решений (1).

Лемма 1. Если параметры τ, φ^* удовлетворяют неравенству

(8) $$c\,(A\tau + \varphi^*)\,(e^{a\tau} - 1)\,(e^{na_1\tau} + 1) < \varphi^*$$

то при $t \geqslant 0$, пока траектория $x(t)$ остается в области Ω_0, она принадлежит множеству начальных функций.

Доказательство. Из неравенств (6)—(8) следует, что $\| \psi^1(t) - x(t) \| < \varphi^*$ при $t \in [0, \tau]$. Но тогда и $\| \psi^k(t) - x(t) \| < \varphi^*$ при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$ для $k = 2, 3, \ldots$

Замечание к неравенству (7) применимо для произвольного промежутка времени $[(k-1-\lambda)\tau, (k-\lambda)\tau]$, $\lambda \in [0,1]$, поэтому и последнее неравенство сохраняется для такого промежутка времени.

Лемма 2. Если вместе с неравенством (8) выполняются неравенства

$$c(A\tau + \varphi^*)(e^{a\tau} - 1) < \rho; \quad \varphi^* \leqslant a^* \tag{9}$$

где ρ — минимальное расстояние между поверхностью $\partial\Omega^*$ и ее образом при отображении $\psi(t)$ за время τ, то решение (1) $x(t)$, $x(0) \in \overline{\Omega}^*$ при $t \geqslant 0$ не может покинуть область Ω_0.

Доказательство. Из условия $\varphi^* \leqslant a^*$ и (8) следует, что при $t \in [0, \tau]$ траектория $x(t)$ не покинет Ω_0 и при $t = \tau$ фазовая точка окажется внутри Ω^*. Поэтому для $t \in [\tau, 2\tau]$ применима лемма 1, в силу которой неравенство (9) сохранится. Тогда и при любом $t \geqslant 0$ траектория $x(t)$ не может выйти из Ω_0.

Лемма 3. Если запаздывание τ удовлетворяет неравенству

$$\lambda < 1, \quad \lambda = c^2 (e^{a\tau} - 1)^2 (e^{na_1\tau} + 1) \tag{10}$$

и при $t \geqslant 0$ траектория $x(t)$ остается в $\overline{\Omega}_0$, то ее отклонение от опорной траектории $\psi^k(t)$ для $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($\psi^k(k\tau) = x(k\tau)$) не превосходит величины $z_k \to z_*$ при $k \to \infty$, т. е.

$$z_* < z^*, \quad z^* = D/(1-\lambda) \tag{11}$$

$$D = cA\tau(e^{a\tau} - 1)[1 + c(e^{a\tau} - 1)(e^{na_1\tau} + 1)]$$

причем

$$z_k < z^* + \varphi^* \text{ для } k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Доказательство. Для $t \in [0, \tau]$ отклонение оценивается величиной z_1, равной правой части неравенства (6) при $t = \tau$. Чтобы получить аналогичную оценку для $t \in [\tau, 2\tau]$, достаточно согласно (7), в неравенство (6) вместо φ^* подставить величину $z_1(1 + e^{na_1\tau})$, т. е. $z_2 = D + \lambda\varphi^*$.

Продолжая этот процесс, на шаге с номером k получим

$$z_k = D(1+\lambda)(1+\lambda^2)(1+\lambda^4)\cdots(1+\lambda^{2^{k-3}}) + \lambda^{2^{k-2}}\varphi^*$$

В силу условия (10) $z_k \to z_*$, $z_* < \infty$, $k \to \infty$. (Отметим, что z_* от φ^* не зависит.) Учитывая, что

$$(1+\lambda)(1+\lambda^2)\cdots(1+\lambda^{2^{k-3}}) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^{1+2+\cdots+2^{k-3}} < 1/(1-\lambda)$$

получим (11). Теперь неравенство (12) очевидно.

Далее предположим, что все области Ω_v, ограниченные поверхностями $V(x) = v$, $v \in [0, v_0]$, выпуклы и $\partial\Omega_0$ определяется уравнением $V(x) = v_0$. Предположим также, что для каждой такой области определено неравенство (6) и величина ρ, т. е. известны функции $A = A(v)$, $a = a(v)$, $a_1 = a_1(v)$, $a_2 = a_2(v)$, $\rho = \rho(v)$. Тогда и z_k, z_*, λ, D, z^* будут функциями от v.

Обозначим $\lambda'(v)$, $D'(v)$, $z'(v)$ выражения, которые получатся соответственно из $\lambda(v)$, $D(v)$, $z^*(v)$ после замены $c(v)$ на $\sqrt{c'(v)}$, $c'(v) = \max c^2(v')$, $v' \leqslant v$. Видно, что $\lambda(v) \leqslant \lambda'(v)$, $D(v) \leqslant D'(v)$, $z^*(v) \leqslant z'(v)$ и правые части этих неравенств монотонно убывают при $v \to 0$, причем $z'(v) \to 0$.

Теорема. Для того чтобы Ω^* принадлежала области притяжения невозмущенного движения $x = 0$ (1), достаточно, чтобы параметры τ и φ^* удовлетворяли неравенствам (8, 9), и следующим неравенствам:

$$\lambda'(v) < 1 \tag{13}$$

$$z'(v) < \rho(v), \quad 0 < v \leqslant v_0 \tag{14}$$

Доказательство. При выполнении условий (8), (9), согласно лемме 2, любая траектория $x(t)$ системы (1) (с начальной функцией из выбранного выше класса) при $t \geqslant 0$ остается в Ω_0.

В силу монотонного убывания $\lambda'(v)$ при $v \to 0$ условие (13) гарантирует существование и непрерывность функции $z'(v)$ на $[0, v_0]$. Таким образом, неравенство (14) имеет смысл. Пусть оно выполняется. Тогда, в частности, $z'(v_0) > \rho(v_0)$ и по лемме 3, начиная с достаточно большого номера $k = k_1$, будет $z_k < z^* \leqslant z'(v_0)$. Следовательно, по крайней мере начиная с этого номера, из-за наличия конечной разности $\rho(v_0) - z_{k_1}$ траектория $x(t)$ должна остаться в области $\Omega_{v^{(1)}}$, $v^{(1)} < v_0$.

Применяя предыдущие рассуждения к этой области, можно убедиться, что с некоторого номера $k = k_2 > k_1$ траектория $x(t)$ будет оставаться в области $\Omega_{v^{(2)}}$, $v^{(2)} < v^{(1)}$.

Последовательность $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(l)}, \ldots$ сходится к нулю при $l \to \infty$, так как предположение $v^{(l)} \to v_* > 0$ опровергается существованием номера l, для которого разность $\rho(v_*) - z_{kl} > 0$. (В доказательстве предварительное неравенство $\tau < t^*$ не использовалось и его можно отбросить.)

Следствие 1. Если решение $x = 0$ (1) асимптотически устойчиво в целом при $\tau = 0$, области Ω_v выпуклы и выполняются неравенства (13), (14) при $v \in (0, \infty)$, $\tau = \tau^*$ (неравенства (8), (9) отбрасываются), то, очевидно, это решение остается асимптотически устойчивым в целом при $\tau = \tau^*$, $\varphi^* < \lim z'(v)$, $v \to \infty$.

Замечание 1. В качестве некоторой миноранты для $\rho(v)$ может служить минимальное расстояние между поверхностями $V(x) = v$ и $V(x) = v_\tau$, где v_τ определяется как значение решения (или как миноранта решения) дифференциального уравнения

$$v^{\cdot} = -w(v), \quad w(v) \leqslant \min(-V^{\cdot}(x))_{\tau=0}, \quad x \in \partial\Omega_v \tag{15}$$

при $t = \tau$ и начальном условии $v(0) = v$.

Следствие 2. Если система (1) линейная с постоянными коэффициентами и решение $x = 0$ асимптотически устойчиво, то для любого φ^* существует $\tau^* > 0$, такое, что при $\tau \leqslant \tau^*$ решение $x = 0$ остается асимптотически устойчивым в целом.

Доказательство. Согласно известной теореме Ляпунова, для функции $U = -\|x\|^2$ может быть построена положительно-определенная квадратичная форма $V(x)$, такая, что $V^{\cdot} = U$.

Имеет место оценка $\|x\|^2 \geqslant V(x)/\Lambda$, где Λ — наибольшее собственное значение матрицы формы $V(x)$. Следовательно, для $x \in \partial\Omega_v$ получаем оценку $\|x\|^2 \geqslant v/\Lambda$ и в качестве $w(v)$ можем взять правую часть последнего неравенства. Таким образом, уравнение (15) здесь имеет вид $v^{\cdot} = -v/\Lambda$. Тогда

$$v_\tau = ve^{-\tau/\Lambda} \quad \text{и} \quad \rho(v) = \frac{1}{2}\Lambda^{-3/2}\tau\sqrt{v} + o(\tau).$$

Далее заметим, что (в силу линейности (1)) существует достаточно большое число $A_1 > 0$, при котором $A \leqslant A_1\sqrt{v}$, $0 < v$, и коэффициенты $a, a_1, a_2, b, c, \lambda$ от v не зависят и $\lambda \to 0$ при $\tau \to 0$. Поэтому $z'(v) = A_2(\tau)\sqrt{v}$, $A_2(\tau) = o(\tau)$.

Значит, при достаточно малом τ будут выполняться условия следствия 1 при любом φ^*. Из этого следует справедливость утверждения.

Замечание 2. Уравнения (1) возникают, например, при решении задачи оптимальной стабилизации стационарных движений [5], если учесть запаздывания в передаче сигналов управления. Но функция Ляпунова в таком случае имеет лишь знакоотрицательную производную по времени в силу (1) (при $\tau = 0$), и поэтому сразу приведенный результат применить нельзя. Однако во многих случаях эта функция допускает перестройку в функцию с определенно-отрицательной производной [6].

Замечание 3. Если при $v = v_* < v^*$ неравенство (14) нарушится, то это, очевидно, будет означать, что траектории (1), начинающиеся в $\overline{\Omega}^*$, через конечное время попадут в область Ω_{v_*} и при $t \to \infty$ будут оставаться в этой области, т. е. Ω_{v_*} — аттрактор для (1).

Пример 1. Для системы $x_1^{\cdot} = x_2$, $x_2^{\cdot} = -x_1 - x_2(t - \tau)$ при $\tau = 0$ положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво в целом и $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$, $V^{\cdot}(x) = -V(x)$. Оценим τ, φ^* для произвольной области Ω_0 — внутренности эллипса $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = v_0$.

Здесь $A = \sqrt{2v}$, $a_1 = a_2 = 1$, $K_1 = \sqrt{8}$, $K_2 = 2$, $K_3 = 1$, $a = 4, 8$

$$w(v) = v, \qquad v_\tau = ve^{-\tau}, \qquad \rho(v) = \sqrt{\frac{2}{3}}(1 - e^{-1/2\tau})\sqrt{v}$$

и при $\tau = 0{,}1$, $z'(v) = 0{,}041\sqrt{v}$, $\lambda' < 1$, $\rho(v) = 0{,}040\sqrt{v}$, т. е. при любом φ^* решение $x = 0$ остается асимптотически устойчивым в целом.

Заметим, что для исследования асимптотической устойчивости линейных систем с запаздыванием и с постоянными коэффициентами существует метод D-разбиений [7]. Испытывая различные τ, этот метод позволяет более точно определить допустимое запаздывание, однако для заданного φ^* он не дает возможности оценить область, в которой решение должно всегда оставаться.

Пример 2. Для системы

$$x^{\cdot} = \frac{-2x(t-\tau)}{(1+x^2)^2} + 2y, \quad y^{\cdot} = \frac{-2(x+y)}{(1+x^2)^2}$$

при $\tau = 0$ известны [8]

$$V = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2, \quad V^{\cdot} = -4\left[\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{y^2}{(1+x^2)^2}\right]$$

Областью притяжения нулевого решения здесь является область, ограниченная поверхностью $x^2/(1 + x^2) + y^2 = v_0$, $v_0 < 1$.

При $v \leqslant v_0 = 0{,}5$ области Ω_v выпуклы. Уравнение (15) здесь имеет вид $v^{\cdot} = -4v(1 - v)^3$, а величина v_τ определяется выражением $v_\tau = 4\tau + v + \ln(1 - v) - \ln v + \ln v_\tau - \ln(1 - v_\tau)$.

Отыскивая решение последнего уравнения в виде ряда

$$v_\tau = v + g_1(v)\tau + g_2(v)\tau^2 + \ldots$$

получим с точностью до слагаемых порядка $o(\tau)$

$$v_\tau = v\xi, \quad \rho(v) = (1 - \sqrt{\xi})\sqrt{v}, \quad \xi = 1 - 4\frac{1-v}{1-v+v^2}\tau$$

Определив затем $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $K_1 = 2\sqrt{8}$, $K_2 = 2$, $K_3 = 2$, $A = \sqrt{8v}$, можно проверить, что все условия теоремы выполняются, например, при $\tau = 0{,}05$, $\varphi^* = 0{,}1$ и при этом область Ω^* определяется параметром $v^* = 0{,}37$.

Пример 3. Положение равновесия $x = 0$ системы

(16) $$x_1^{\cdot} = -b_1x_1^2x_1(t-\tau) + b_2x_2, \quad x_2^{\cdot} = -b_3x_1 - b_4x_2^3, \quad (b_1 > 0, \ldots, b_4 > 0)$$

при $\tau = 0$ асимптотически устойчиво в целом [8] и

$$V = b_3x_1^2 + b_2x_2^2, \quad V^{\cdot} = -2b_1b_3x_1^4 - 2b_2b_4x_2^4$$

Области Ω_v выпуклы при любых $v > 0$.

Учитывая симметрию поверхностей $V(x) = v$, получим

$$w(v) = gv^2, \quad v_\tau = \frac{v}{1+g\tau v}, \quad g = \frac{2b_1b_2}{b_1b_2 + b_3b_4}$$

$$\rho(v) = \sqrt{v}\left(1 - 1/\sqrt{1+g\tau v}\right)/\sqrt{b_*}, \quad b_* = \max\{b_1, b_3\}$$

$$a_1 = \max\{3b_1, x_1^2, b_2, b_3, 3b_4x_2^2\}, \ a_2 = 1, \ K_1 = \sqrt{8}a_1 \ K_2 = 2, \ K_3 = b_1x_{10},$$

$$a = \sqrt{8}a_1 + b, \ b = 2b_1x_{10}, \ x_{10} = \max x^2{}_1, \ x \in \Omega_v.$$

Можно показать, что все условия теоремы будут выполняться, по крайней мере, при достаточно малых τ, v_0 и $\varphi^* = O(\tau\sqrt{v_0})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
2. *Разумихин Б. С.* Метод исследования устойчивости систем с последействием.— Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6, с. 1234—1237.
3. *Громова П. С.* Метод векторных функций Ляпунова для систем с отклоняющимся аргументом.— В кн.: Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск: Наука, 1981, с. 46—54.
4. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974, 331 с.
5. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 440—456.
6. *Блинов А. П.* К вопросу о построении функции Ляпунова.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 5, с. 724—729.
7. *Эльсгольц Л. Э.*, *Норкин С. В.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
8. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

Москва

Поступила в редакцию 27.VI.1985