Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 539.375

КОНЕЧНОЧАСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧАХ О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРЕЩИНАХ

Линьков А. М., Могилевская С. Г.

Предлагается эффективный метод решения граничного интегрального уравнения (ГИУ) для задачи о трещине вдоль криволинейной поверхности в упругом пространстве, основанный на преобразовании исходного интегродифференциального уравнения к уравнению, не содержащему производных. Это достигается использованием понятия конечночастного интеграла (КЧИ). Приводятся квадратурные формулы для таких интегралов по произвольным выпуклым многоугольникам при аппроксимации разрывов смещений на границе полиномами.

Известные ГИУ для пространственных трещин содержат либо производные от неизвестных функций, либо производные от поверхностного интеграла [1—7]. В обоих случаях наличие производных значительно осложняет решение. Однако, как показано в [8], в случае плоской трещины нормального разрыва эти трудности снимаются, если использовать понятие КЧИ [9, 10]. В связи с этим целесообразно исследовать возможность приложений такого подхода к более общей задаче о трещине произвольного разрыва и развивать численную сторону его использования. В данной работе преследуются обе цели: дается распространение идеи на общий случай пространственных трещин и указываются способы вычисления возникающих интегралов с приведением квадратурных формул, удобных для численной реализации метода ГИУ на ЭВМ.

1. Рассмотрение задачи основывается на форме ГИУ для пространственных трещин, которая содержит только производные интегралов по поверхности и не содержит под знаком интеграла производных от разрывов смещений [1, 6]. Интегралы, входящие в ГИУ, имеют особенности, порождаемые членом $1/r$ и комбинацией его степеней с разностями координат контрольной точки $\mathbf{x}$ и переменной точки ξ интегрирования (r — расстояние между этими точками). Это не позволяет дифференцировать под знаком интеграла, поскольку приводит к неинтегрируемой особенности (в общем случае уже исходный интеграл сингулярный). Асимптотическое поведение подынтегральных членов, стоящих при разрывах смещений, при $\xi \to \mathbf{x}$ не зависит от кривизны поверхности трещины, если эта поверхность достаточно гладкая, и совершенно такое же, как поведение соответствующих членов в задаче о плоской трещине произвольного разрыва. Тогда, отняв и прибавив слагаемые, отвечающие некоторому куску плоской трещины, касающейся рассматриваемой поверхности в контрольной точке $\mathbf{x}$, всегда можно иметь сингулярные члены только в операторе, отвечающем плоской трещине произвольного разрыва. Поэтому достаточно сосредоточиться только на последнем случае.

2. ГИУ для плоской трещины произвольного разрыва в бесконечной среде (например, [2]) в упомянутой форме, содержащей лишь производные от интегралов, имеют вид

$$\sigma(\mathbf{x}) = kAw, \quad \tau_1(\mathbf{x}) = k\left[Au + \nu\frac{\partial}{\partial x_2}(Bu - Cv)\right] \tag{2.1}$$

$$\tau_2(\mathbf{x}) = k\left[Av - \nu\frac{\partial}{\partial x_1}(Bu - Cv)\right], \quad \mathbf{x} \in S; \quad k = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)}$$

$$Aw = \Delta\int\limits_S \frac{w(\xi)}{r}\,dS, \quad Bu = \int\limits_S \frac{x_2 - \xi_2}{r^3}\,u(\xi)\,dS$$

$$Cv = \int\limits_S \frac{x_1 - \xi_1}{r^3}\,v(\xi)\,dS$$

Здесь $\sigma(\mathrm{x})$, $\tau_1(\mathrm{x})$, $\tau_2(\mathrm{x})$ — составляющие по осям x_3, x_1, x_2 вектора напряжений в точке x поверхности трещины S (оси x_1, x_2 —в плоскости трещины, ось x_3 перпендикулярна к ней); $w(\xi)$, $u(\xi)$, $v(\xi)$ — составляющие разрывов смещений по осям x_3, x_1, x_2 в точке интегрирования ξ поверхности S, причем разрывы вычисляются как разности между смещениями верхнего и нижнего берегов трещины, если нижним считать берег, для которого ось x_3 представляет внешнюю нормаль по отношению к ограничиваемой им области; $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ — оператор Лапласа; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона среды; интегралы, отмеченные поперечной чертой, понимаются в смысле главного значения.

Для оператора A, отвечающего случаю трещины нормального разрыва, доказано [8], что формальный перенос оператора Лапласа под знак интеграла, дающий $\Delta(1/r) = 1/r^3$, становится законным, если особым образом трактовать получающийся расходящийся интеграл, не существующий даже в смысле главного значения, т. е.

$$Aw = \text{v.f.} \int_S \frac{w(\xi)}{r^3}\,dS, \qquad \mathrm{x} \in S \tag{2.2}$$

Эта формула приобретает смысл, если интеграл в правой части, отмеченный символами v. f., рассматривать как КЧИ. В изучаемом случае порядок сингулярности лишь на единицу превышает размерность области интегрирования, и поэтому КЧИ, в соответствии с его определением [9, 10], может вычисляться по следующему правилу [8]. Вокруг точки x выделяется круговая область S_0 произвольного радиуса r_0, вычитается и прибавляется член $w(\mathrm{x})/r^3$ и формально вычисляется интеграл от $1/r^3$ с подстановкой $r = r_0$. По определению

$$\Delta \int_{S_0} \frac{1}{r}\,dS = \text{v.f.} \int_{S_0} \frac{1}{r^3}\, r\,dr\,d\varphi = -\frac{2\pi}{r_0}$$

Здесь можно обратить внимание на то, что КЧИ от положительной функции представляет собой отрицательное число. Если в области S_0 функция w имеет аналитическое выражение и интеграл от w/r^3 берется в квадратурах, то КЧИ может вычисляться подстановкой пределов интегрирования, отвечающих границе S_0, в соответствующее формальное выражение.

Полезно выполнить аналогичный переход к дифференцированию под знаком интеграла и в формулах для касательных составляющих вектора усилий τ_1, τ_2. В результате, в дополнение к (2.2), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1} Bu = -3\text{v.f.} \int_S \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{r^5}\, u(\xi)\,dS \\
&\frac{\partial}{\partial x_1} Cv = \text{v.f.} \int_S \frac{1}{r^3} v(\xi)\,dS - 3\text{v.f.} \int_S \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5} v(\xi)\,dS \\
&\frac{\partial}{\partial x_2} Bu = \text{v.f.} \int_S \frac{1}{r^3} u(\xi)\,dS - 3\text{v.f.} \int_S \frac{(x_2-\xi_2)^2}{r^5} u(\xi)\,dS \\
&\frac{\partial}{\partial x_2} Cv = -3\text{v.f.} \int_S \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{r^5}\, v(\xi)\,dS
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Доказательство приводится на примере второй из этих формул. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Cv = \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{\int_S} \frac{x_1-\xi_1}{r^3} v(\xi)\,dS = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{S/K} \frac{x_1-\xi_1}{r^3} v(\xi)\,dS +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_K \frac{x_1-\xi_1}{r^3} [v(\xi) - v(\mathrm{x})]\,dS + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[v(\mathrm{x}) \bar{\int_K} \frac{x_1-\xi_1}{r^3}\,dS \right]$$

где K — некоторая окрестность точки x, принадлежащая S, S / K — дополнение K до S. Первые два слагаемых можно продифференцировать под знаком интеграла. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Cv = \int\limits_{S/K} \left[\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5}\right] v(\xi)\,dS + \int\limits_{K}\left\{\left[\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5}\right][v(\xi) - \right.$$

$$\left. - v(\mathrm{x})] - \frac{\partial v(\mathrm{x})}{\partial x_1}\frac{x_1-\xi_1}{r^3}\right\} dS + \frac{\partial v(\mathrm{x})}{\partial x_1}\int\limits_K \frac{x_1-\xi_1}{r^3}\,dS + v(\mathrm{x})\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_K \frac{x_1-\xi_1}{r^3}\,dS$$

Второй интеграл в правой части этого равенства представляется в виде

$$\text{v.f.}\int\limits_K \frac{1}{r^3} v(\xi)\,dS - v(\mathrm{x})\,\text{v.f.}\int\limits_K \frac{1}{r^3}\,dS - 3\text{v.f.}\int\limits_K \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5} v(\xi)\,dS +$$

$$+ 3v(\mathrm{x})\,\text{v.f.}\int\limits_K \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5}\,dS - \frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\int\limits_K \frac{x_1-\xi_1}{r^3}\,dS$$

откуда получаем равенство, отличающееся от второго равенства (2.3) наличием в правой части слагаемого $v(\mathrm{x})\,J$, где

$$J = \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_K \frac{x_1-\xi_1}{r^3}\,dS - \text{v.f.}\int\limits_K \frac{1}{r^3}\,dS + 3\,\text{v.f.}\int\limits_K \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5}\,dS$$

Остается доказать, что $J = 0$. При доказательстве этого равенства в [8] в качестве области K использовалась круговая область S_0. Здесь же с целью проиллюстрировать независимость результата от выбора области K берется прямоугольник $a \leqslant \xi_1 \leqslant b$; $c \leqslant \xi_2 \leqslant d$. Точка x лежит внутри этого прямоугольника. Интегрирование в квадратурах дает

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_K \frac{x_1-\xi_1}{r^3}\,dS = \frac{1}{b_1}\left(\frac{b_2}{b_3} - \frac{a_2}{b_4}\right) + \ldots \tag{2.4}$$

$$a_1 = x_1 - a,\quad a_2 = x_2 - c,\quad b_1 = x_1 - b,\quad b_2 = x_2 - d$$

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2,\ a_4^2 = a_1^2 + b_2^2,\ b_3^2 = b_1^2 + b_2^2,\ b_4^2 = a_2^2 + b_1^2$$

(многоточие означает слагаемое, получающееся из предыдущего перестановкой a и b). Второй и третий интегралы в выражении для J, не существующие ни в обычном смысле, ни в смысле главного значения, вычисляются в соответствии с определением формально — с подстановкой в получаемые аналитические формулы пределов интегрирования, отвечающих границе области K. В результате для прямоугольной области K получается

$$\text{v.f.}\int\limits_K \frac{1}{r^3}\,dS = \frac{1}{a_2}\left(\frac{b_4}{b_1} - \frac{a_3}{a_1}\right) + \ldots \tag{2.5}$$

$$\text{v.f.}\int\limits_K \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5}\,dS = \frac{1}{3a_1}\left(\frac{a_4}{b_2} - \frac{a_3}{a_2} + \frac{b_2}{a_4} - \frac{a_2}{a_3}\right) + \ldots$$

причем можно проверить, что первая из формул (2.5) совпадает с результатом вычисления

$$\Delta\int\limits_K \frac{1}{r}\,dS$$

Из формул (2.4), (2.5) следует, что $J = 0$, т. е. справедливость второго равенства (2.3).

При помощи соотношений (2.2), (2.3) система ГИУ (2.1) записывается в окончательном виде

$$\sigma(\mathrm{x}) = k\,\text{v.f.}\int\limits_S \frac{w(\xi)}{r^3}\,dS \tag{2.6}$$

$$\tau_1(\mathrm{x}) = k\left[(1+\nu)\,\text{v.f.}\int\limits_S \frac{1}{r^3} u(\xi)\,dS - 3\nu\,\text{v.f.}\int\limits_S \frac{(x_2-\xi_2)^2}{r^5} u(\xi)\,dS + \right.$$

$$\left. + 3\nu\,\text{v.f.}\int\limits_S \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{r^5} v(\xi)\,dS\right],$$

$$\tau_2(x) = k\Big[(1+\nu)\,\mathrm{v.f.}\int\limits_S \frac{1}{r^3}\,v(\xi)\,dS - 3\nu\,\mathrm{v.f.}\int\limits_S \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5}\,v(\xi)\,dS + $$
$$+ 3\nu\,\mathrm{v.f.}\int\limits_S \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{r^5}\,u(\xi)\,dS\Big]$$

удобном для приложений тем, что формулы не содержат производных.

Очевидно, что поскольку круговую область S_0 можно заключить в достаточно произвольную область иной конфигурации K и интеграл по K/S_0 не имеет особенностей, в качестве подобласти, по которой формально вычисляется интеграл, можно взять любую другую область, вмещающую круг, в частности треугольник или прямоугольник. Для такой области можно также формально брать интеграл от функции с неинтегрируемой особенностью и подставлять надлежащие пределы интегрирования, отвечающие границе области. Использованное выше интегрирование по прямоугольнику помимо основной цели, состоящей в переходе от (2.1) к (2.6), иллюстрировало этот факт, который при всей своей очевидности важен, поскольку позволяет существенно упростить вычисления, используя в качестве областей K, по которым вычисляются КЧИ, те же элементарные ячейки (треугольники, квадраты, прямоугольники), на которые разбивается поверхность S при дискретизации задачи. Это преимущество использовалось (и существенно повышало эффективность счета по сравнению с выбором в качестве K круговой области S_0) в работе [11] [1], где интегрирование проводилось по квадратам.

3. Полезно сделать еще один шаг в развитии способов вычисления получающихся расходящихся интегралов: не только использовать произвольные области интегрирования K, окружающие контрольную точку $\mathbf{x}$, но и отказаться от условия, чтобы интеграл по этой области непременно существовал как формальное аналитическое выражение. Этого можно достигнуть рассматривая КЧИ как пределы соответствующих обычных интегралов. Получаемые формулы — естественное следствие того, что сами ГИУ — результат аналогичного предельного перехода из рассматриваемого тела на поверхность S.

Для плотности $f(\xi)$, имеющей в окрестности точки $\xi = \mathbf{x}$ непрерывные производные до второго порядка включительно, можно из (2.2) получить следующее равенство:

$$I_1 = \mathrm{v.f.}\int\limits_K \frac{1}{r^3} f(\xi)\,dS = \Delta\int\limits_K \frac{1}{r} f(\xi)\,dS = \lim_{x_3\to 0}\Big[\int\limits_K \frac{1}{R^3} f(\xi)\,dS -$$
$$- \frac{2\pi}{x_3} f(\mathbf{x})\Big],\quad R = [(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2]^{1/2}$$

Здесь использованы свойства потенциала двойного слоя.

Вычисления для правой части можно выполнить в цилиндрической системе координат с началом в точке $\mathbf{x}$ и координатами ρ, φ, z, связанными с исходными декартовыми координатами формулами $\xi_1 - x_1 = \rho\cos\varphi$, $\xi_2 - x_2 = \rho\sin\varphi$, $x_3 = z$. При вычислении интеграла в правой части сразу выделяется член, уничтожающий слагаемое $2\pi f(\mathbf{x})/x_3$. Кроме того, поскольку $f(\xi)$ обладает непрерывными производными до второго порядка включительно, имеет место представление

$$f(\xi) - f(\mathbf{x}) = \rho g_1(\mathbf{x},\rho,\varphi) + \rho^2 g_2(\mathbf{x},\rho,\varphi)$$

где $g_1 = \cos\varphi\,\partial f/\partial x_1 + \sin\varphi\,\partial f/\partial x_2$, $g_2(\mathbf{x},\rho,\varphi)$ — непрерывная функция, причем $\lim g_2(\mathbf{x},\rho,\varphi)\,\rho^2 = 0$ при $\rho\to 0$.

---

[1] См. также: *Зубков И. А.* Разработка метода расчета зон повышенного горного давления на основе решения пространственной задачи о распределении напряжений около очистных выработок: Дис. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Л.: Всес. н.-и. маркшейдерский ин-т, 1983. 179 с.

Тогда в результате интегрирования и перехода к пределу получается

$$I_1 = \int_0^{2\pi} g_1 \ln \rho(\varphi)\, d\varphi - f(\mathrm{x}) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho(\varphi)} + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} g_2\, d\rho$$

где под $\rho(\varphi)$ понимается значение ρ в точке контура области K, имеющей угловую координату φ.

По сути, этот вывод — воспроизведение выкладок при доказательстве непрерывности потенциала двойного слоя, а правая часть представляет известное выражение [12, с. 239].

Аналогичным образом при помощи теории потенциала получаются выражения и для трех других видов интегралов, фигурирующих в (2.6)

$$I_2 = \text{v.f.} \int_K \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r^5} f(\xi)\, dS = \int_0^{2\pi} g_1 \cos^2\varphi \ln\rho(\varphi)\, d\varphi - \\ - f(\mathrm{x}) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{\rho(\varphi)}\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} g_2\, d\rho \tag{3.1}$$

$$I_3 = \text{v.f.} \int_K \frac{(x_2-\xi_2)^2}{r^5} f(\xi)\, dS = \int_0^{2\pi} g_1 \sin^2\varphi \ln\rho(\varphi)\, d\varphi - \\ - f(\mathrm{x}) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{\rho(\varphi)}\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} g_2\, d\rho, \quad I_4 =$$

$$= \text{v.f.} \int_K \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{r^5} f(\xi)\, dS = \int_0^{2\pi} g_1 \sin\varphi\cos\varphi \ln\rho(\varphi)\, d\varphi - \\ - f(\mathrm{x}) \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho(\varphi)}\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} g_2\, d\rho$$

При постоянной в области K функции $f(\xi)$ имеем $g_1 = g_2 = 0$.

Для треугольного элемента (фигура, *а*) при $f(\xi) = 1$ отсюда следует

$$I_1 = -\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{d_i} (\sin\psi_i + \sin\chi_i)$$

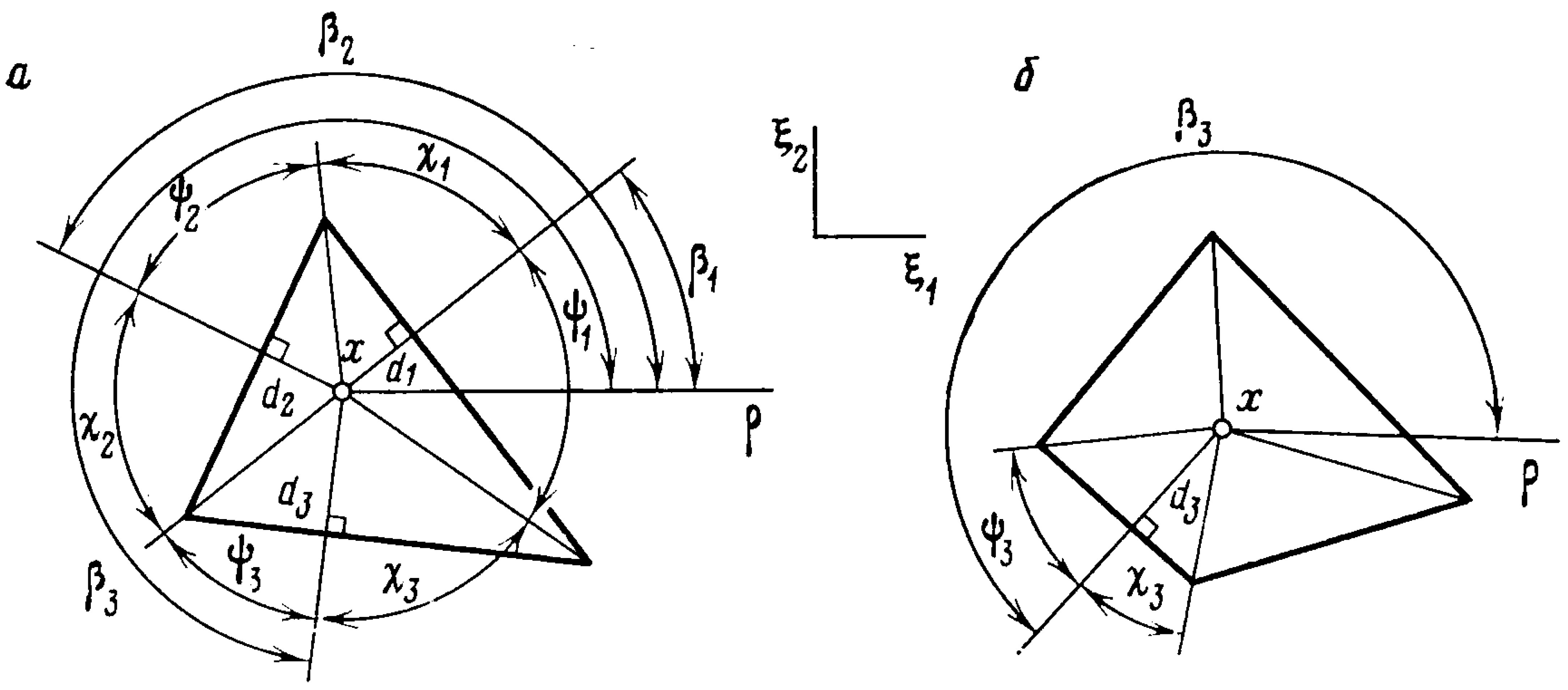
$$I_2 = -\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{d_i} \Big\{ \cos\beta_i \Big[\sin(\beta_i+\chi_i) - \sin(\beta_i-\psi_i) - \\ - \frac{\sin^3(\beta_i+\chi_i) - \sin^3(\beta_i-\psi_i)}{3} \Big] - \sin\beta_i \frac{\cos^3(\beta_i+\chi_i) - \cos^3(\beta_i-\psi_i)}{3} \Big\}$$

$$I_3 = I_1 - I_2, \quad I_4 = -\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{d_i} \Big[\cos\beta_i \frac{\cos^3(\beta_i-\psi_i) - \cos^3(\beta_i+\chi_i)}{3} - \\ - \sin\beta_i \frac{\sin^3(\beta_i-\psi_i) - \sin^3(\beta_i+\chi_i)}{3} \Big]$$

Смысл обозначений d_i, ψ_i, χ_i, β_i ясен из фиг. 1, *а*.

В случае правильного треугольника со стороной a и с точкой x в центре, при расположении одной из вершин на оси x_1 или x_2, имеем $I_1 = -18/a$; $I_2 = I_3 = -9/a$; $I_4 = 0$.

Для четырехугольной области (фигура, *б*) в формулах, написанных для треугольного элемента, суммирование распространяется до четырех, а смысл обозначений прежний. Аналогично получаются формулы и для произвольного выпуклого многоугольника.



В случае прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, для I_1 и I_2 имеем выражения, уже полученные в п. 2 другим способом, а для I_3 и I_4 получаем

$$I_3 = I_1 - I_2, \quad I_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} - \frac{1}{a_4} - \frac{1}{b_4}\right)$$

Если точка x находится на пересечении диагоналей прямоугольника со сторонами a, b, то

$$I_1 = -8\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \quad I_2 = -\frac{16}{3}\frac{a^4+b^4+3a^2b^2}{ab\,(a^2+b^2)^{3/2}}, \quad I_3 = I_1 - I_2, \quad I_4 = 0$$

Если плотность имеет вид $f(\mathrm{x}) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1x_2$, тогда $g_1(\mathrm{x}) = (c_1 + c_3x_2)\cos\varphi + (c_2 + c_3x_1)\sin\varphi$, $g_2(\mathrm{x}) = c_3\sin\varphi\cos\varphi$ и формулы (3.1) для КЧИ дают

$$I_1 = (c_1 + c_3x_2)\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ln\rho(\varphi)\,d\varphi + (c_2 + c_3x_1)\int_0^{2\pi}\sin\varphi\ln\rho(\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ c_3\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi - (c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1x_2)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\rho(\varphi)}$$

$$I_2 = (c_1 + c_3x_2)\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\ln\rho(\varphi)\,d\varphi + (c_2 + c_3x_1)\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\ln\rho(\varphi)\,d\varphi + c_3\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi -$$
$$-(c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1x_2)\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi}{\rho(\varphi)}\,d\varphi,$$

$$I_3 = I_1 - I_2, \quad I_4 = (c_1 + c_3x_2)\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\ln\rho(\varphi)\,d\varphi + (c_2 +$$
$$+ c_3x_1)\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos\varphi\ln\rho(\varphi)\,d\varphi + c_3\int_0^{2\pi}\rho(\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi -$$
$$-(c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1x_2)\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho(\varphi)}\,d\varphi$$

При численном решении задач коэффициенты c_0, c_1, c_2, c_3 определяются из условия, что аппроксимирующая функция принимает конкретные значения в четырех узловых точках ячейки. Аналогично получаются и формулы при задании $f(\mathrm{x})$ полиномами более высоких порядков. Можно использовать и другие аппроксимации. При этом в случаях, когда интегралы, входящие в (3.1), не выражаются аналитическими формулами, используется численное интегрирование.

Приведенные результаты дают удобное средство решения ГИУ для трещин произвольного разрыва, поскольку переход к форме (2.6) устраняет дифференцирование, а использование полученных формул делает подсчет интегралов (3.1) не более сложным, чем вычисление обычных интегралов. Разбивая поверхность трещины на элементарные ячейки и задавая в них аппроксимации искомых (или известных — в смешанных задачах) функций, можно для каждой контрольной точки выполнить интегрирование по содержащей ее ячейке при помощи приведенных формул. Для прочих же ячеек интегралы особенностей не имеют и берутся обычными способами. Остальные вычисления также вполне традиционны.

В заключение заметим, что понятие КЧИ, введенное Адамаром [13] и способствующее созданию теории обобщенных функций, ныне получило интерпретацию в рамках этой теории. В ней решаются как формальные вопросы регуляризации интегралов рассматриваемого типа, так и вопросы, связанные с их вычислением [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов М. Я.* Некоторые задачи и приложения теории потенциала.— ПММ, 1940 т. 4, вып. 5—6, с. 73—86.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1975, № 12, с. 1105—1109.
3. *Bui H. D.* An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape.— J. Mech. and Phys. Solids, 1977, v. 25, No. 1, p. 29—39.
4. *Weaver J.* Three-dimensional crack analysis.— Intern. J. Solids and Structures, 1977, v. 13, No. 4, p. 321—330.
5. *Шляпоберский Я. В.* Асимптотическое решение пространственной задачи о равновесии упругого тела с разрезом.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 532—539.
6. *Кит Г. С., Хай М. В.* Определение трехмерных температурных полей и напряжений в бесконечном теле с разрезами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 60—67.
7. *Гольдштейн Р. В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 111—126.
8. *Ioakimidis N. I.* Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity.— Acta Mech., 1982, v. 45, No. 1—2, p. 31—47.
9. *Ossicini A.* Alcune formule di quadratura per il calcolo della parte finita e del valore principale di integrali divergenti.— Rend. Matem. Ser. VI, 1969, v. 2, No. 304, p. 385—403.
10. *Kutt H. R.* The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration.— Numer. Math., 1975, B. 24, H. 3, S. 205—210.
11. *Петухов И. М., Зубков В. В., Зубкова И. А., Линьков А. М., Сидоров В. С.* Напряженное состояние массива горных пород около очистных выработок произвольной формы в плане.— Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых, 1982, № 5, с. 3—8.
12. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
13. *Адамар Ж.* Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
14. *Ninham B. W.* Generalized functions and divergent integrals.— Numer. Math., 1966, No. 8, p. 444—457.

Кемерово

Поступила в редакцию
11.V.1985