

УДК 539.375

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ВЫТЯНУТЫХ ПЛОСКИХ ТРЕЩИНАХ СДВИГА

Корельштейн Л. Б.

Получено асимптотическое решение пространственных задач теории упругости о трещинах сдвига, занимающих плоскую область, вытянутую вдоль некоторой кривой. Члены разложения решения по малому параметру, характеризующему вытянутость трещины, строятся на основе системы интегродифференциальных уравнений [1] относительно компонент смещений точек поверхностей трещины. На основе полученных асимптотических формул описывается качественно зависимость смещений поверхностей, коэффициентов интенсивности напряжений и удельного приращения полной потенциальной энергии от формы трещины и нагрузки; установлены соотношения типа теорем сравнения [2]. Значения коэффициентов интенсивности напряжений и смещений поверхностей, рассчитанных для конкретных видов трещин по асимптотическим формулам, согласуются с известными точными значениями или со значениями, полученными численным методом.

Асимптотическое решение для аналогичной более простой задачи о трещинах отрыва, сводящейся к решению одного интегродифференциального уравнения, приведено в [3].

1. Трещина вытянута вдоль прямой. Рассмотрим однородную изотропную среду с трещиной, занимающей область G в плоскости $x_3 = 0$. К поверхностям трещины приложены противоположно направленные усилия

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^+(x_1, x_2, 0) &= \sigma_{i3}^-(x_1, x_2, 0) = -t_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2 \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, 0) &= 0, \quad (x_1, x_2) \in G \end{aligned}$$

(индексы плюс и минус соответствуют верхнему и нижнему берегам трещины); на бесконечности нагрузка отсутствует. Тогда нормальные компоненты смещений берегов трещины непрерывны

$$u_3^+(x_1, x_2, 0) = u_3^-(x_1, x_2, 0), \quad (x_1, x_2) \in G$$

а для касательных компонент смещений имеем

$$\begin{aligned} u_i^+(x_1, x_2, 0) &= -u_i^-(x_1, x_2, 0) = u_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2 \\ u_i(x_1, x_2) &= 0, \quad (x_1, x_2) \notin G \end{aligned}$$

Определение смещений поверхностей трещины сдвига сводится к отысканию ограниченной функции $u(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)e_1 + u_2(x_1, x_2)e_2$, равной нулю вне области G и удовлетворяющей интегродифференциальному уравнению [1]

$$(1.1) \quad P_G \{F_{x_1 x_2}^{-1} [|\xi| A * u(x_1, x_2)]\} = \beta t(x_1, x_2), \quad \beta = (1 - \nu)/\mu$$

Здесь A — матрица второго порядка с элементами a_{ij} , $a_{11} = 1 - \nu\eta_2^2$, $a_{22} = 1 - \nu\eta_1^2$, $a_{12} = a_{21} = \nu\eta_1\eta_2$, $\eta_i = \xi_i/|\xi|$, $F_{x_1 x_2}$ — двумерное преобразование Фурье

$$F_{x_1 x_2} [\varphi(x_1, x_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\xi, x)] \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

P_G — оператор сужения на область G ; функции u_i , a_{ij} , t_i понимаются как обобщенные из пространств $S'(R^2)$ и $S'(G)$ соответственно, μ и ν — мо-

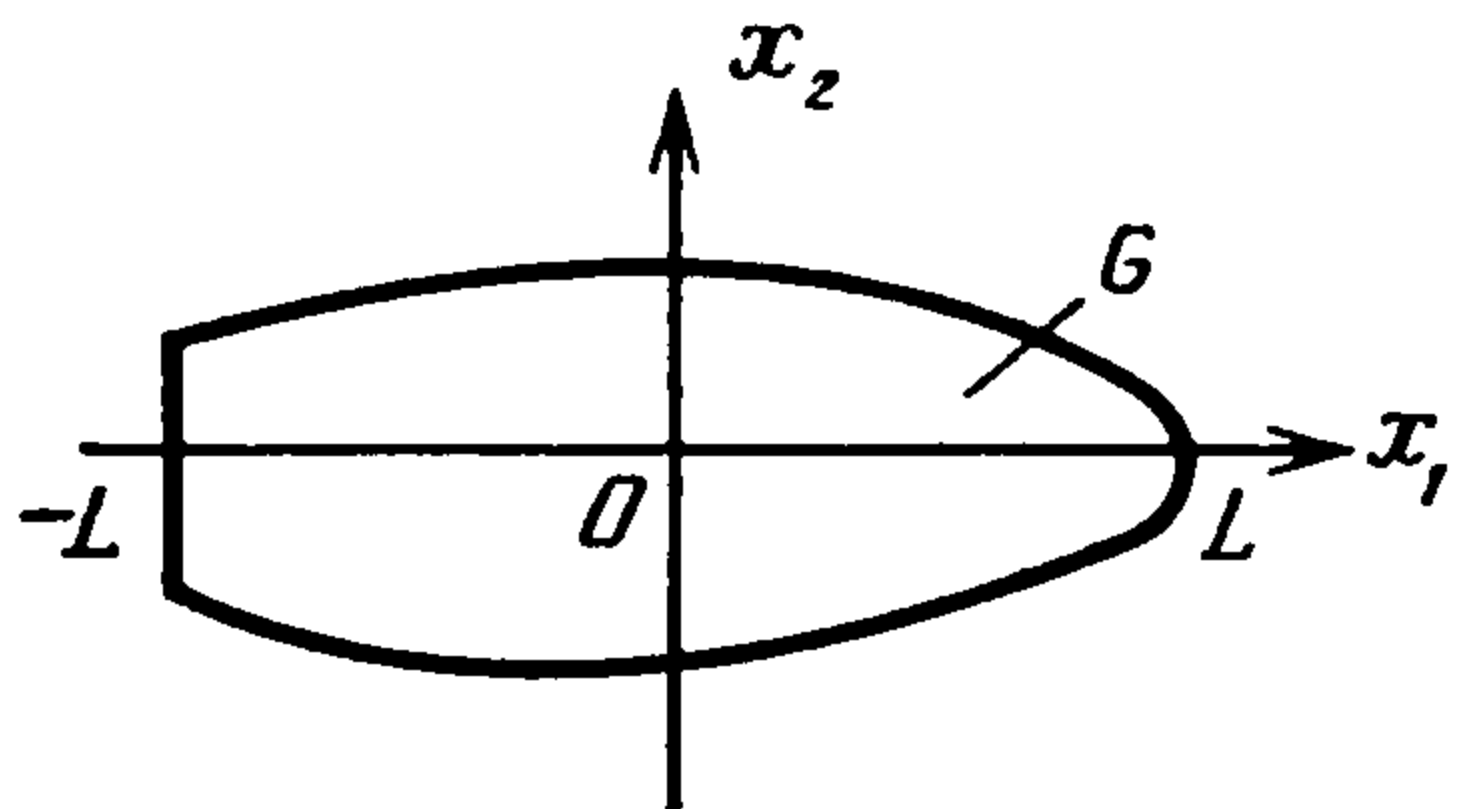
дуль сдвига и коэффициент Пуассона среды, e_1, e_2, e_3 — орты осей системы координат $Ox_1x_2x_3$.

В x -пространстве уравнение (1.1) может быть записано в виде

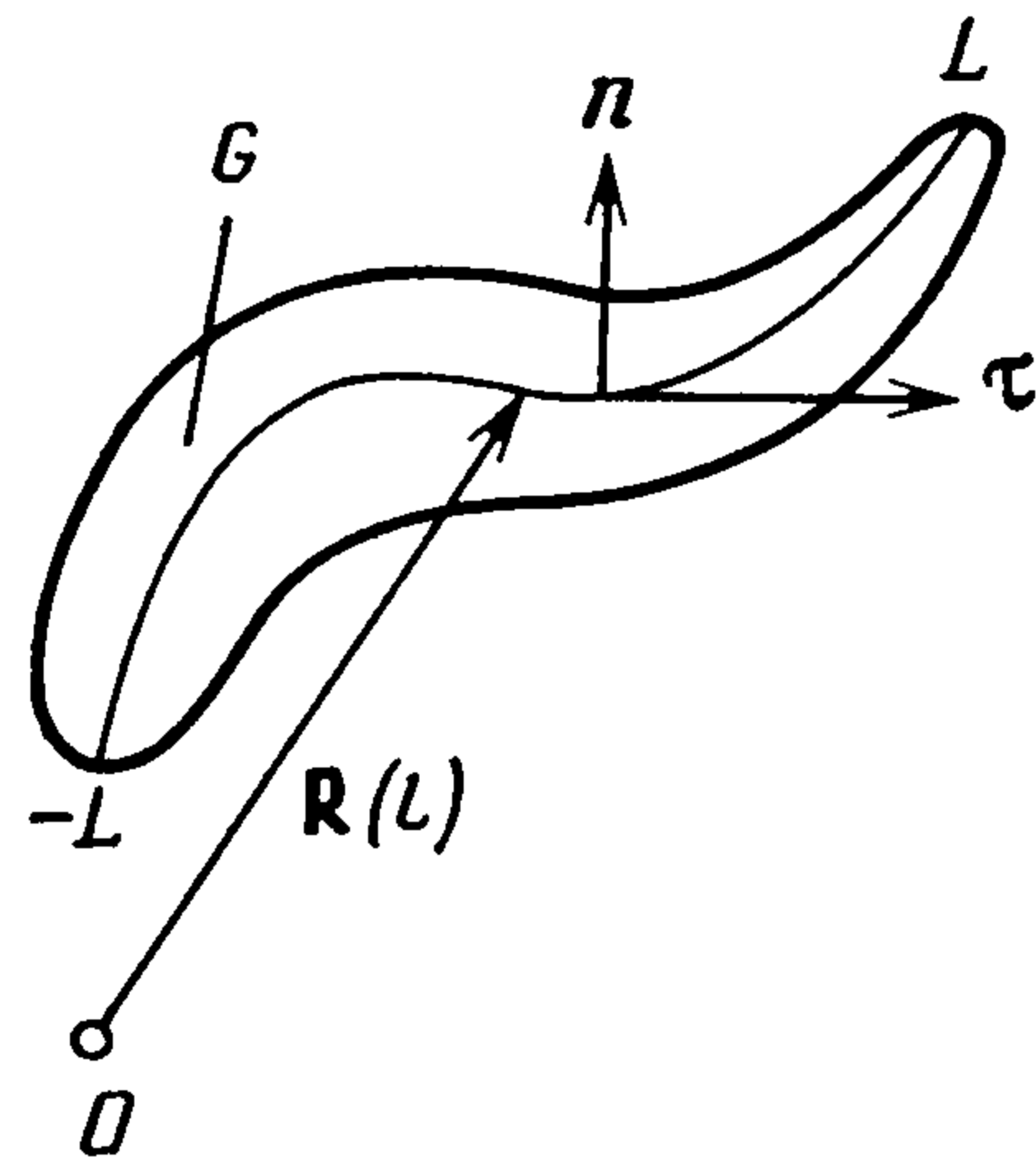
$$(1.2) \quad (1 - \nu) \Delta \Psi + \nu \nabla (\nabla \cdot \Psi) = 2\pi\beta t, \quad x \in G$$

$$\Psi(x_1, x_2) = \iint_G \frac{u(x_1', x_2')}{r} dx_1' dx_2', \quad r^2 = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2$$

Рассмотрим трещину, занимающую область $G(\varepsilon)$ следующего вида (фиг. 1): $|x_1| \leq L$, $|x_2| \leq \varepsilon \rho(x_1)$, где $L > 0$, функция $\rho(x_1)$ ограничена и $\rho(x_1) \in C^3(-L, L)$, $\rho > 0$, безразмерный параметр $\varepsilon > 0$. При малых ε получаем трещину в форме узкой полосы, вытянутой вдоль оси Ox_1 . Задача заключается в определении асимптотики смещения поверхностей трещины $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ (соответствующих трещине $G(\varepsilon)$) при $\varepsilon \rightarrow 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем внутреннюю координату $Y = x_2/\varepsilon$. Действуя аналогично [3], уравнение (1.1) в координатах x_1, Y можно записать в виде

$$(1.3) \quad P_G \{[\Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2 (\ln 2/\varepsilon) \Phi_2^* + \varepsilon^2\Phi_2 + o(\varepsilon^2)] * u(x_1, Y, \varepsilon)\} = -2\pi\beta\varepsilon t(x_1, Y, \varepsilon)$$

$$\Phi_0 = -2\delta(x_1) \frac{\partial}{\partial Y} P \frac{1}{Y} \text{diag}(1 - \nu, 1)$$

$$\Phi_2^* = \delta''(x_1) \text{diag}(1 + \nu, 1 - 2\nu)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \delta''(x_1) \text{diag}(1 - \nu, 1) -$$

$$- \left[\delta''(x_1) \ln |Y| - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} P \frac{1}{|x_1|} \right] \text{diag}(1 + \nu, 1 - 2\nu)$$

$$\Phi_1 = -2\nu\delta'(x_1) P \frac{1}{Y} C$$

где C — квадратная матрица второго порядка с элементами $c_{ij} = 1 - \delta_{ij}$

$$\left(P \frac{1}{|x_1|}, \varphi \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, Y) - \theta(1 - |x_1|) \varphi(0, Y)] \frac{dx_1 dY}{|x_1|}, \quad \varphi \in S(R^2)$$

Рассмотрим задачу о возмущении трещиной внешнего поля напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ (имеющего место в безграничной среде без трещины)

$$t(x_1, Y, \varepsilon) = t(x_1, x_2) = t(x_1, \varepsilon Y) = \sum_{i=0}^2 \frac{\varepsilon^i t^i(x_1) Y^i}{i!} + o(\varepsilon^2)$$

$$t^i(x_1) = [\partial^i t(x_1, x_2) / \partial x_2^i]_{x_2=0}, \quad t_i(x_1, x_2) = \tau_{i3}(x_1, x_2, 0)$$

Асимптотику $u(x_1, Y, \varepsilon)$ естественно искать в следующем виде, вытекающем из сравнения асимптотических разложений ядра и правой части

уравнения (1.3):

$$(1.4) \quad u(x_1, Y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon^{i+1} u^i(x_1, Y) + \varepsilon^3 \ln \frac{2}{\varepsilon} v(x_1, Y) + \\ + \varepsilon w(x_1, Y, \varepsilon) + o(\varepsilon^3)$$

При этом условия на функции u^i , v те же, что и в [3]. Действуя аналогично [3], в средней части трещины получим

$$\Phi_0 * u^i = -2\pi\beta \frac{t^i Y^i}{i!} - \sum_{k=1}^i \Phi_k * u^{i-k}, \quad \Phi_0 * v = -\Phi_2 * u^0, \quad i=0, 1, 2$$

Выведенные уравнения представляют собой уравнения плоской трещины продольного и поперечного сдвига и могут быть последовательно решены в квадратурах. В результате получим

$$(1.5) \quad u_i(x_1, Y, \varepsilon) = \varepsilon \mu^{-1} \lambda_i \sqrt{\rho^2(x_1) - Y^2} Q_i(x_1, Y, \varepsilon) + o(\varepsilon^3) \\ Q_i(x_1, Y, \varepsilon) = t_i^0 + 0,5\varepsilon Y Q_{i1} + \varepsilon^2 (2Y^2 + 1) \times \\ \times (Q_{i2} - 0,5\alpha_i^1 \lambda_i^{-1} t^{0n}) / 12 + 0,125\varepsilon^2 Q_i^* \\ Q_{i(n+1)} = t_i^{n+1} - \nu \lambda_i^{-1} t_j^{n'} \\ Q_i^* = \alpha_i^2 \lambda_j^{-1} [\Lambda_i + T(q_{0i}^{00})]'' + \\ + 2\nu [\lambda_i^{-1} q_{1j}^{01} - \nu q_{1j}^{11} / (1 - \nu)] + 2\lambda_i \lambda_j^{-1} q_{0j}^{02} \\ f = \rho^2, \quad g(x_1) = L^2 - x_1^2, \quad \lambda = (1, 1 - \nu) \\ \alpha^1 = (1 + 2\nu, 1 - 3\nu), \quad \alpha^2 = (1 + \nu, 1 - 2\nu) \\ q_{mn}^{kl} = \left[\frac{d^k t_n^m}{dx_1^k} f \right]^{(l)}, \quad \Lambda = t^0 f \ln \frac{16g}{\varepsilon^2 f}, \quad T\varphi = \int_{-L}^L \frac{\varphi(x_1') - \varphi(x_1)}{|x_1' - x_1|} dx_1'$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, пара (i, j) принимает значения $(1, 2)$, $(2, 1)$.

Для коэффициентов интенсивности напряжений K_2 и K_3 поперечного и продольного сдвига в точках $(x_1, \pm \varepsilon \rho(x_1))$ контура трещины (при $x_1 \in (-L, L)$) из (1.5) получаем асимптотики

$$(1.6) \quad K_{i+1}(x_1, \pm \varepsilon \rho(x_1)) = \pm K_0(x_1) [Q_j(x_1, \pm \rho(x_1), \varepsilon) \pm \\ \pm (-1)^i \lambda_j \lambda_j^{-1} \rho'(x_1) Q_i(x_1, \pm \rho(x_1), \varepsilon) + o(\varepsilon^2)] \\ K_0(x_1) = \sqrt{\pi \varepsilon \rho(x_1)} [1 + \varepsilon^2 \rho'^2(x_1)]^{-1/4}$$

2. Трещина, вытянутая вдоль кривой. Рассмотрим теперь более общий случай трещины, вытянутой вдоль некоторой заданной в плоскости $x_3 = 0$ гладкой кривой без самопересечений $\mathbf{R}(l)$ длины $2L$; l — расстояние вдоль кривой от ее средней по длине точки, $l \in [-L, L]$ (замкнутые кривые с $\mathbf{R}(-L) = \mathbf{R}(L)$ также считаются допустимыми). Для касательного и нормального к кривой ортов $\boldsymbol{\tau}(l)$, $\mathbf{n}(l)$ имеем

$$(2.1) \quad d\mathbf{R}(l)/dl = \boldsymbol{\tau}(l), \quad \mathbf{n}(l) = \mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}(l) \\ d\boldsymbol{\tau}(l)/dl = -k(l) \mathbf{n}(l), \quad d\mathbf{n}(l)/dl = k(l) \boldsymbol{\tau}(l)$$

где $k(l)$ — кривизна кривой в точке $\mathbf{R}(l)$ (положительная или отрицательная). Введем на плоскости $x_3 = 0$ ортогональную систему координат

$$(2.2) \quad \mathbf{x}(l, m) = \mathbf{R}(l) + \varepsilon m \mathbf{n}(l)$$

Будем рассматривать трещины, область которых $G(\varepsilon)$ (фиг. 2) задается неравенствами $|l| \leq L, |m| \leq \rho(l)$ (условия на $\rho(l)$ те же, что и в п. 1). Задача, как и в п. 1, состоит в определении асимптотики смещения поверхностей $u(l, m, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если ввести систему координат (l, M) , $M = m/\rho(l)$, то якобиан отображения $(l, M) \mapsto (x_1, x_2)$ равен

$$(2.3) \quad D(l, M, \varepsilon) = \varepsilon \rho(l) [1 + \varepsilon M \rho'(l) k(l)]$$

и уравнение (1.2) в области $G(\varepsilon)$ записывается в виде

$$(2.4) \quad \Omega(l, m, k(l), \tau(l), \mathbf{n}(l), \varepsilon, \partial/\partial l, \partial/\partial m) \Psi = -2\pi\beta t(x), \quad x \in G(\varepsilon)$$

$$(2.5) \quad \Psi(l, M, \varepsilon) = K\mathbf{u} = \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{u}(l', M', \varepsilon)}{|\Delta \mathbf{x}|} D(l', M', \varepsilon) dl' dM'$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(l', M') - \mathbf{x}(l, M)$$

где Ω — некоторый дифференциальный оператор с переменными коэффициентами (явное выражение которого не приведено ввиду громоздкости). Ввиду (2.3) для оператора K , определенного формулой (2.5), имеем

$$(2.6) \quad K\varphi = \varepsilon H(\varphi\rho) + \varepsilon^2 H(\varphi M \rho^2 k), \quad H\varphi = \int_{-L}^L \int_{-1}^1 \frac{\varphi(l', M')}{|\Delta \mathbf{x}|} dl' dM'$$

Таким образом, определение асимптотики $\Psi(l, m, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сводится к определению асимптотики оператора H , которая приведена в [3] (в (2.11) [3] в последнем интеграле в фигурных скобках опечатка — пропущено слагаемое $m'^2 \rho'^2/2$).

Пусть $t(l, m, \varepsilon)$ имеет степенную асимптотику

$$(2.7) \quad t(l, m, \varepsilon) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \tau^i(l, m) + o(\varepsilon^2), \quad \tau^i \in C^3(\bar{G})$$

Асимптотику $\mathbf{u}(l, m, \varepsilon)$ в средней части трещины ищем в виде (1.4) (заменяя координаты x_1, Y на l, m и опуская член с w , определяющий погранслоем на концах). Используя (2.6), (2.7), асимптотику H и действуя аналогично [3], можно получить уравнения для u^i и v , которые после упрощения приводятся к виду:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \lambda_j P(u_i^0)''_{mm} &= \pi\beta\tau_i^0 \\ 2\lambda_j P(u_i^1)''_{mm} &= 2\pi\beta\tau_i^1 - \lambda_j k P(u_i^0)_{m'} - 2\nu P(u_j^0)''_{mi} \\ 2\lambda_j P(v_i \ln 2/\varepsilon + u_i^2)''_{mm} &= 2\pi\beta\tau_i^2 - \lambda_j k P(u_i^1)_{m'} - \\ &- 2\nu P(u_i^1)''_{mi} + 0,5\alpha_i^2 P_\rho(u_i^0)_{ii}'' - (1)^i 0,5\lambda_i k' P_\rho(u_j^0) - \\ &- (-1)^i (1 - 0,5\nu) k P_\rho(u_j^0)_{i'} - 0,375\lambda_j k^2 P_\rho(u_i^0) - \alpha_i^1 (U_i^0)_{ii}'' + \\ &+ (-1)^i (2 - \nu + \lambda_i) k' U_j^0/3 + (-1)^i (1 + \lambda_j) k (U_j^0)_{i'} + \\ &+ (5 - \nu - 3\delta_{1i}) k^2 U_i^0/12 + \lambda_j k^2 m P(u_i^0)_{m'} + \\ &+ 2\nu\delta_{2i} k m P(u_j^0)''_{mi} + (1 - 2\nu) I_i(U^0) + 3\nu J_i(U^0) \\ U^0(l) &= \int_{-\rho(l)}^{\rho(l)} \mathbf{u}^0(l, m) dm, \quad P(\varphi) = \int_{-\rho(l)}^{\rho(l)} \varphi(l, m') \ln |\Delta m| dm' \\ P_\rho(\varphi) &= \int_{-\rho(l)}^{\rho(l)} \varphi(l, m') \ln \frac{4g}{\varepsilon^2 (\Delta m)^2} dm', \quad g = L^2 - l^2 \\ I(U^0) &= \int_{-L}^L \{U^0(l') |\Delta \mathbf{R}|^{-3} - |\Delta l|^{-3} Z_2[|\Delta l|^3 |\Delta \mathbf{R}|^{-3} U^0(l')]\}_{l'=l} dl' \\ J(U^0) &= \int_{-L}^L \{(\Delta \mathbf{R}, U^0(l')) |\Delta \mathbf{R}|^{-5} \Delta \mathbf{R} - |\Delta l|^{-3} \times \\ &\times Z_2[|\Delta l|^3 |\Delta \mathbf{R}|^{-5} (\Delta \mathbf{R}, U^0(l')) \Delta \mathbf{R}]\}_{l'=l} dl' \end{aligned}$$

$Z_2 [\varphi (l')]_{l'=l}$ — многочлен Тейлора второго порядка функции $\varphi (l')$ в точке $l' = l$; нижние индексы 1 и 2 у u^k, v, I, J, U^0 означают составляющие соответствующих векторов по ортам $\tau (l)$ и $n (l)$ (такое обозначение используется далее всюду, где рассматриваются трещины вдоль кривой). Уравнения (2.8) (так же, как и их частный случай (1.4)) для каждого фиксированного l являются уравнениями плоской трещины сдвига и могут быть последовательно решены в квадратурах.

Пусть $t (l, m, \varepsilon) = t (x)$ (задача о возмущении трещиной внешнего поля напряжений). Тогда $\tau^i (l, m) = t^i (l) m^i/i!$, $t^i (l) = [d^i t/dn (l)^i]_{x=R(l)}$ и из уравнения (2.8) получаем

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u_i &= \varepsilon \mu^{-1} \lambda_i \sqrt{\rho^2 (l) - m^2} Q_i (l, m, \varepsilon) \\ Q_i (l, m, \varepsilon) &= t_i^0 + 0,25 \varepsilon m Q_{i1} + \varepsilon^2 m^2 \{Q_{i2} - \alpha_i^1 \lambda_i^{-1} t_i^{0''} + 3,25 k^2 t_i^0 + \\ &+ (-1)^i \lambda_i^{-1} [(4 - \alpha_i^1 - \alpha_i^2) k t_j^{0'} + \lambda_j k' t_j^0]\} / 12 + \\ &+ \varepsilon^2 [Q_i^+ / 48 + (-1)^i Q_i^\pm / 24 + 0,25 (1 - 2\nu) I_i (f\gamma) + 0,75 \nu J_i (f\gamma)] \\ \gamma (l) &= t_1^0 \tau (l) + (1 - \nu) t_2^0 n (l), \quad Q_{i(n+1)} = 2 t_i^{n+1} - k t_i^n - 2 \nu \lambda_i^{-1} t_j^{n'} \\ Q_i^+ &= 6 \alpha_i^2 \lambda_j^{-1} \Lambda_i'' - 4,5 k^2 \Lambda_i + 4 (q_{2i}^{00} + k q_{1i}^{00}) + \\ &+ \lambda_i^{-1} \nu (12 q_{1j}^{01} + 8 q_{1j}^{10}) - 2 \alpha_i^1 \lambda_i^{-1} q_{0i}^{20} - 6 (\alpha_i^1 + \alpha_i^2 - \lambda_i) \lambda_j^{-1} q_{0i}^{02} - \\ &- 12 \nu^2 (1 - \nu)^{-1} q_{0i}^{11} + (3 + \lambda_i \lambda_j^{-1}) k^2 q_{0i}^{00} \\ Q_i^\pm &= -3 (2 - \nu) \lambda_i^{-1} k \Lambda_j' - 3 k' \Lambda_j + 4 k' q_{0j}^{00} + 6 \lambda_i^{-1} k q_{0j}^{01} + \\ &+ 2 (\lambda_j + \nu) \lambda_i^{-1} k q_{0j}^{10} \end{aligned}$$

причем производные берутся от компонент векторов.

Для коэффициентов интенсивности напряжений K_2 и K_3 в точках $(l, \pm \rho (l))$ контура трещины ($l \in (-L, L)$) из (2.9) получаем асимптотики

$$(2.10) \quad \begin{aligned} K_{i+1} (l, \pm \rho (l), \varepsilon) &= K_0^\pm [(1 \pm \varepsilon \chi) Q_j (l, \pm \rho (l), \varepsilon) \pm \\ &\pm (-1)^i \varepsilon \rho' (l) \lambda_i \lambda_j^{-1} Q_i (l, \pm \rho (l), \varepsilon) + o(\varepsilon^2)] \\ K_0^\pm &= \pm \sqrt{\pi \varepsilon \rho} (1 \pm \varepsilon \chi)^{-1/2} [(1 \pm \varepsilon \chi)^2 + \varepsilon^2 \rho'^2]^{-1/4}, \quad \chi (l) = k (l) \rho (l) \end{aligned}$$

Полученное асимптотическое решение обладает следующим свойством «локальности»: первые три члена асимптотики u (вплоть до члена порядка $\varepsilon^3 \ln \varepsilon$) и K_2, K_3 в сечении трещины $l = l_0$ зависят, как видно из формул (1.4)–(1.6) и (2.8)–(2.10), только от локальных параметров трещины $\rho (l_0), \rho' (l_0), \rho'' (l_0), k (l_0), k' (l_0)$ и от заданной нагрузки и ее производных в сечении $l = l_0$, а также от коэффициента Пуассона ν . Зависимость асимптотики решения в некотором сечении трещины от формы всей области трещины и нагрузки в других ее сечениях заключена в интегралах $I (f\gamma)$ и $J (f\gamma)$ или в выражении $d^2 T (t_i^0 f) / dx_1^2$, которое также можно выразить через интеграл I :

$$d^2 T (t_i^0 f) / dx_1^2 = 2I (t_i^0 f) - 3 (t_i^0 f)''$$

Интересно отметить, что при $\nu = 0,5$ (несжимаемая среда) в асимптотическом выражении для u_2 в случае трещины, вытянутой вдоль прямой (см. (1.5)), член с $d^2 T (t_i^0 f) / dx_1^2$ исчезает, асимптотика становится полностью «локальной» и не содержит логарифмического члена.

3. Примеры. 1°. Рассмотрим вытянутую вдоль прямой равномерно нагруженную трещину ($t (x_1, x_2) = t = \text{const}$). В этом случае Q_i в (1.5) будет иметь вид (учитываем, что $t^1 = t^2 = 0$)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} Q_i (x_1, Y, \varepsilon) &= t_i^0 \{1 + 0,125 \varepsilon^2 \lambda_j^{-1} [\alpha_i^2 (\Lambda_0 + T (f))'' + 2 \lambda_i f'']\}; \\ \Lambda_0 &= f \ln (16 g \varepsilon^{-2} f^{-1}) \end{aligned}$$

а коэффициенты интенсивности, согласно (1.6), выражаются формулами

$$(3.2) \quad K_{i+1}(x_1 \pm \varepsilon \rho(x_1)) = \pm \sqrt{\varepsilon \rho(x_1)/2} [Q_j(x_1, \pm \rho(x_1), \varepsilon) \pm \\ \pm (-1)^i \varepsilon \lambda_i \lambda_j^{-1} \rho'(x_1) t_1 - 0,25 \varepsilon^2 \rho'^2(x_1) t_j + o(\varepsilon^2)]$$

Асимптотика величин K_2, K_3 в местах их наибольших значений на $(-L, L)$ — точках максимальной ширины трещины (где максимален первый член асимптотики (3.2), т. е. максимально $\rho(x_1)$ и $\rho'(x_1) = 0$) — имеет вид

$$K_2 = \pm \sqrt{\pi \varepsilon \rho} Q_2 + o(\varepsilon^{2,5}), \quad K_3 = \pm \sqrt{\pi \varepsilon \rho} Q_1 + o(\varepsilon^{2,5})$$

Как видно из (3.1), в рассматриваемом случае равномерно нагруженной вытянутой вдоль прямой трещины в ее средней части задачи продольного и поперечного сдвига разделяются, т. е. i -я компонента смещения поверхностей зависит (с точностью до $o(\varepsilon^3)$) только от соответствующей i -й компоненты нагрузки и геометрии трещины. Кроме того, в асимптотике и исчезают члены порядка ε^2 , а множители Q_i не зависят от Y . При $\nu = 0,5$ выражение для Q_2 принимает особенно простой вид $Q_2(x_1, \varepsilon) = t_2^0 \cdot (1 + 0,125 \varepsilon^2 f'')$. Формулу (3.1) можно представить также в виде

$$(3.3) \quad Q_i(x_1, \varepsilon) = t_i \{1 + \alpha_i^2 \lambda_j^{-1} (Q - 1) + 0,25 \varepsilon^2 (\lambda_i - \alpha_i^2) \lambda_j^{-1} f''\} \\ Q = 1 + 0,125 \varepsilon^2 \{[\Lambda_0 + T(f)]'' + 2f''\} = 1 + 0,125 \varepsilon^2 [\Lambda_0'' - f'' + 2I(f)]$$

где Q — аналогичный Q_1, Q_2 безразмерный множитель в асимптотике смещения поверхностей трещины отрыва той же формы, нагруженной однородной единичной нагрузкой

(см. [3], где приведены формулы для Q для случаев трещин в форме эллипса, обобщенного эллипса, трещины, ограниченной дугами парабол). Отметим, что при $\nu = 0$ $Q_i = t_i Q$.

Формулы (1.5), (3.1)—(3.3) дают возможность представить качественно поведение смещений поверхностей и коэффициентов интенсивности напряжений в средней части трещины, когда ее вытянутость возрастает. Можно показать, что компоненты смещения u_1 и u_2 (как и коэффициенты K_2, K_3 в точках максимальной ширины трещины) стремятся к соответствующим величинам плоской задачи (первым членам асимптотики), оставаясь при малых ε по абсолютной величине меньше их в выпуклых частях трещины (где $f'' < 0$) и больше в вогнутых ($f'' > 0$). При этом u_1 и K_3 стремятся к величинам плоской задачи медленнее, чем соответствующие величины ε для трещин отрыва, причем тем медленнее, чем больше ν . Величины u_2 и K_2 ведут себя противоположно.

Проиллюстрируем отмеченные свойства

на примерах трещин некоторых конкретных форм.

Для эллиптической трещины ($\rho(x_1) = L\sqrt{1 - x_1^2/L^2}$)

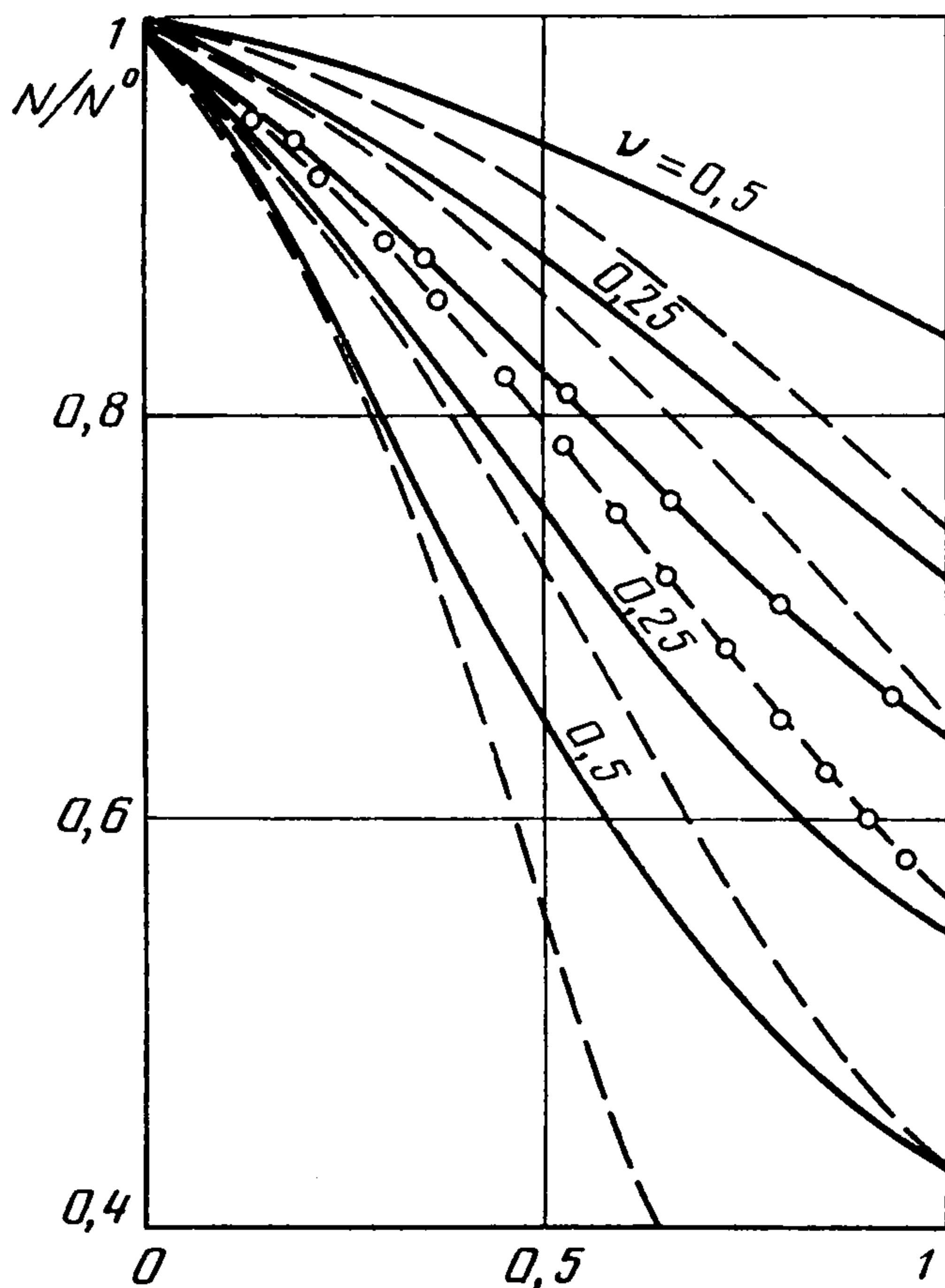
$$(3.4) \quad Q_i(x_1, \varepsilon) = t_i \{1 - 0,25 \varepsilon^2 \lambda_j^{-1} [\alpha_i^2 \ln(16\varepsilon^{-2}) - \alpha_i^1 - \alpha_i^2 + \lambda_i]\}$$

что дает асимптотику и, совпадающую во всех своих членах с асимптотикой точного решения [4]

$$(3.5) \quad u_i(x_1, Y) = \varepsilon \varepsilon_1^2 \lambda_i \sqrt{\rho^2(x_1) - Y^2} [(1 - \lambda_i \lambda_j^{-1} \varepsilon^2) E(\varepsilon_1) - \\ - (-1)^i \nu \lambda_j^{-1} \varepsilon^2 K(\varepsilon_1)]^{-1} t_i, \quad \varepsilon_1^2 = 1 - \varepsilon^2$$

где K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

На фиг. 3 изображены графики безразмерных коэффициентов интенсивности напряжений поперечного сдвига K_2/K_2^0 (верхние четыре кривых) и продольного сдвига K_3/K_3^0 (нижние четыре кривых) на оси симметрии эллиптической трещины ($x_1 = 0$) при различных значениях ν . Сплошные кривые соответствуют точным формулам, лежащие ниже штриховые — асимптотическим. Для сравнения показано также изменение



Фиг. 3

соответствующего коэффициента для отрыва K_1/K_1° (две средние кривые, помеченные кружками). При этом величины $K_1^\circ = \sqrt{\pi \varepsilon \rho} p$, $K_2^\circ = \sqrt{\pi \varepsilon \rho} t_2$, $K_3^\circ = \sqrt{\pi \varepsilon \rho} t_1$ — коэффициенты интенсивности предельных плоских задач. Как видно из фиг. 3, точность асимптотических формул при $\varepsilon = 0,25$ составляет около 1% и быстро возрастает с уменьшением ε .

В таблице приведены полученные с использованием численного решения¹ (указаны в скобках) и асимптотические значения коэффициентов K_2/K_2° и K_3/K_3° в сечении $x_1 = 0$ для трещин в форме обобщенного эллипса [3]. Как видно из таблицы, асимптотические значения приведенных величин возрастают при убывании параметра ζ . Это связано с тем, что области трещин с большими ζ вписаны в области трещин с меньшими ζ (см. п. 4°).

ζ	ε	K_2/K_2°	K_3/K_3°
0,5	1/3	0,9559 (0,9786)	0,8853 (0,8719)
	1/4	0,9729 (0,9092)	0,9280 (0,8959)
1,5	1/3	0,9092 (0,9407)	0,7947 (0,8811)
	1/4	0,9422 (0,9168)	0,8621 (0,8676)
2	1/3	0,8897 (0,9298)	0,7621 (0,7814)
	1/4	0,9290 (0,8946)	0,8362 (0,8641)

2°. Рассмотрим произвольную равномерно нагруженную трещину, вытянутую вдоль кривой. В этом случае

$$(3.6) \quad Q_i(l, M, \varepsilon) = t_i(l) (1 - 0,25\alpha_j \lambda_j^{-1} \varepsilon \chi M) + \varepsilon^2 [Q_{ik}^{**} t_k(l)] [16(1 + 6\delta_{1i})(1 - \nu)]^{-1}$$

Выражение для Q_{ik}^{**} (ввиду его громоздкости) приведем только для кольцевой трещины радиуса $R = \rho(l) = (R_1 + R_2)/2$ (где R_1 и R_2 — внешний и внутренний радиусы кольца):

$$(3.7) \quad \begin{aligned} Q_{11}^{**} &= 6(1 - 13\nu + 4\nu^2) \ln 16/\varepsilon + 2(1 - \nu)(9 + 20\nu)M^2 - 9 + \\ &+ 113\nu + 160\nu^2 \\ Q_{22}^{**} &= (1 + 11\nu - 8\nu^2) \ln 16/\varepsilon + (3 - 15\nu)M^2 - 1,5 - 22,5\nu + 28\nu^2 \\ Q_{12}^{**} &= Q_{21}^{**} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, для кольцевой трещины задачи продольного и поперечного сдвига разделяются. Интересно также отметить, что согласно (3.6) и (2.10) K_2 в сечениях максимальной ширины равномерно нагруженной искривленной трещины может быть больше (по абсолютной величине) как на внутреннем ($M = -1$), так и на внешнем ($M = 1$) контуре (в зависимости от знака коэффициента $1 - 3\nu$), в то же время K_2 и K_1 для трещин отрыва — [3]) на внутреннем контуре всегда больше.

3°. Рассмотрим кольцевую трещину, нагрузка на берега которой имеет вид $t = A(R + \varepsilon m) \tau(l)$, что соответствует кручению вокруг оси, параллельной Ox_3 и проходящей через центр трещины. В этом случае формулы (2.8), (2.10) дают

$$\begin{aligned} u_1(l, m, \varepsilon) &= AR\mu^{-1}\varepsilon \sqrt{\rho^2(l) - m^2} Q_1(M, \varepsilon) + o(\varepsilon^3) \\ K_3(l, \pm R, \varepsilon) &= \pm \sqrt{\pi \varepsilon \rho} AR [Q_1(\pm 1, \varepsilon) + o(\varepsilon^2)] \\ Q_1(M, \varepsilon) &= 1 + 0,25\varepsilon M - 3\varepsilon^2 (M^2 - \ln 16/\varepsilon)/16 + (21 - 19\nu)\varepsilon^2/[96(1 - \nu)] \end{aligned}$$

$u_2 = 0$, $K_2 = 0$ ввиду симметрии задачи. С ростом ν величины u_1 и K_3 по абсолютной величине незначительно возрастают.

4°. Установим некоторые свойства полученного асимптотического решения, аналогичные теоремам сравнения для трещин отрыва [2]. Ограничимся далее случаем одинаковой для всех трещин равномерной нагрузки.

Пусть трещины $G_1(\varepsilon)$, $G_2(\varepsilon)$ вытянуты вдоль одной и той же кривой $R(l)$ и $G_2(\varepsilon) \supset G_1(\varepsilon)$ (фиг. 4). Можно, очевидно, считать, что функция $\rho_1(l)$ задана на всем

¹ Используемые для сравнения численные решения задач о трещинах построены в работе: Брутян А. Р., Гольдштейн Р. В., Федоренко Р. П. Статика и кинематика пространственных трещин сдвига.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1985, № 88. 28 с.

$[-L, L]$, доопределив ее нулем на $[-L, a) \cup (b, L]$ (см. фиг. 4). Тогда $\rho_1(l) \leq \rho_2(l)$, $\forall l \in [-L, L]$. Если при этом $G_1(\varepsilon) \neq G_2(\varepsilon)$ (т. е. $\rho_1 \not\equiv \rho_2$ на $[-L, L]$), будем говорить, что $G_1(\varepsilon)$ вписана в $G_2(\varepsilon)$. Если к тому же $\rho_1(l_0) = \rho_2(l_0)$, $l_0 \in (a, b)$, то контуры $G_1(\varepsilon)$ и $G_2(\varepsilon)$ касаются в сечении $l = l_0$ ($\rho_1'(l_0) = \rho_2'(l_0)$).

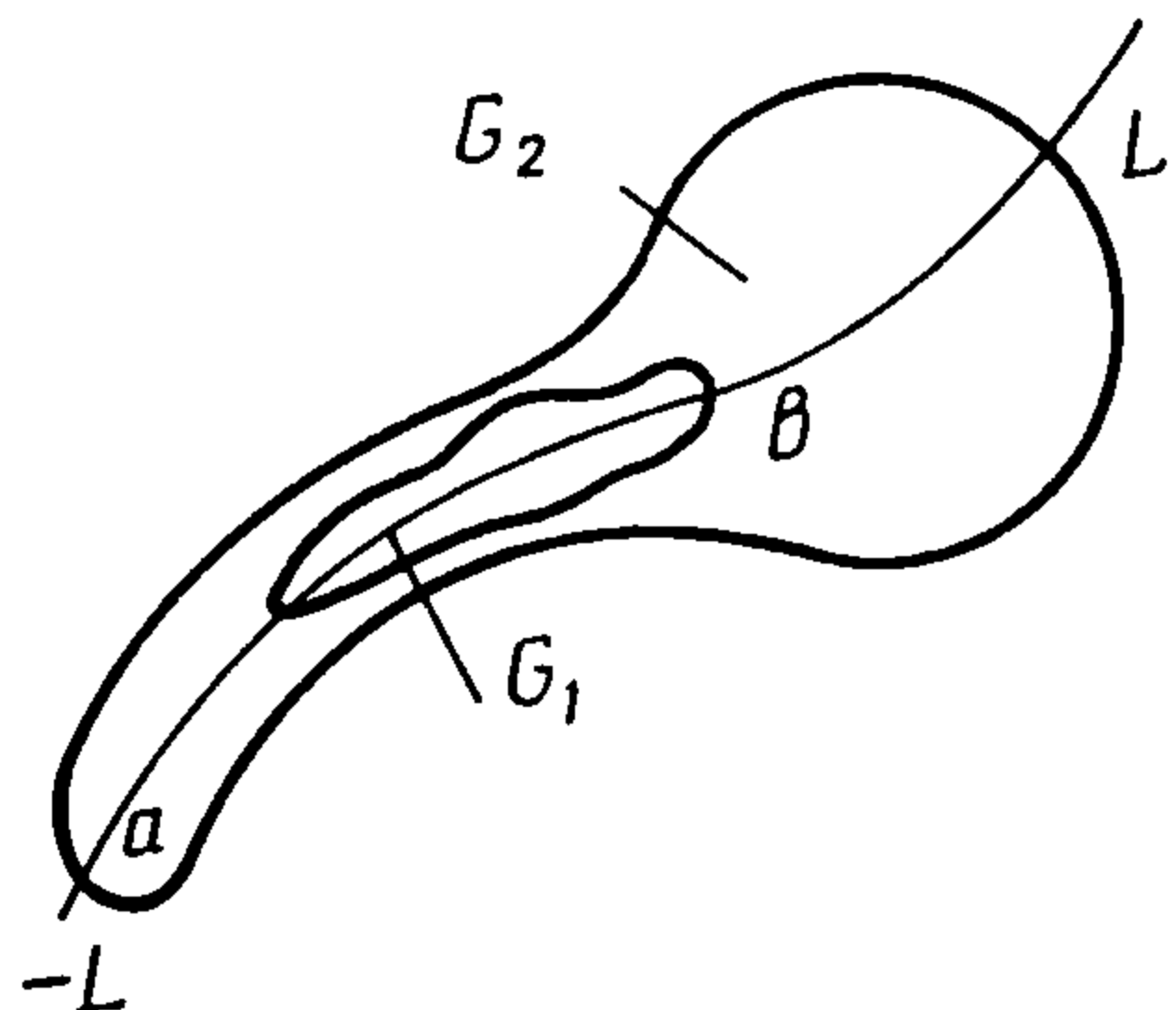
Рассмотрим трещины $G_1(\varepsilon)$ и $G_2(\varepsilon)$, вытянутые вдоль прямой, причем $G_1(\varepsilon)$ вписана в $G_2(\varepsilon)$. Если $\rho_1(x_1^0) = \rho_2(x_1^0)$, $x_1^0 \in (a, b)$, то, сравнивая члены асимптотики (3.3) для двух трещин, можно показать, что при малых ε имеет место неравенство

$$(3.8) \quad 0 < c < Q_i^1(x_i^0, \varepsilon)/t_i < Q_i^2(x_i^0, \varepsilon)/t_i \quad (\nu \neq 0,5)$$

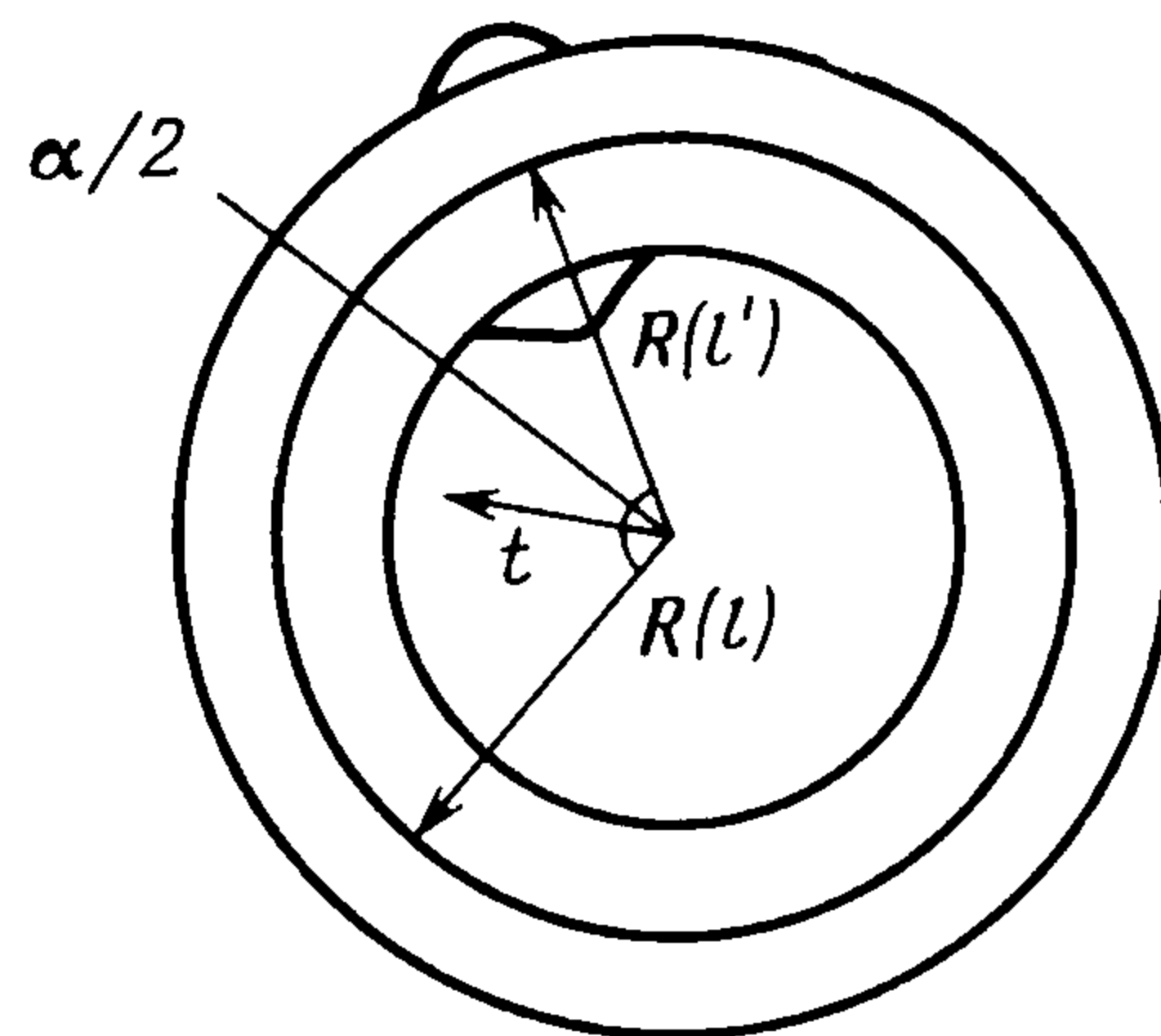
где произвольная постоянная $c \in (0, 1)$. Отсюда, учитывая равенства (1.5) и (3.2), для достаточно малых ε и $x_1 \in (a, b)$, $|Y| < \min(\rho_1(x_1), \rho_2(x_1))$ имеем

$$(3.9) \quad \begin{aligned} |u_i^1(x_1, Y, \varepsilon)| &< |u_i^2(x_1, Y, \varepsilon)| \\ |K_{i+1}^1(x_1, \pm \varepsilon \rho_1(x_1))| &< |K_{i+1}^2(x_1, \pm \varepsilon \rho_2(x_1))| \\ (t_i \neq 0, \nu \neq 0,5) \end{aligned}$$

Неравенства (3.9) являются аналогами теорем сравнения для трещин отрыва.



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим теперь, как изменяется при вариации области трещины величина

$$(3.10) \quad \delta W/\delta S = \beta w [(1 - \nu) K_2^2 + K_3^2] \quad (\beta w = 0,5\mu^{-1})$$

представляющая собой удельное приращение полной потенциальной энергии тела при продвижении сдвиговой трещины (ее значение, как известно, определяет возможность прорастания трещины в заданной точке контура). Учитывая (3.9) и (3.10), для вытянутых вдоль прямой трещин $G_1(\varepsilon)$, $G_2(\varepsilon)$, таких, что $G_1(\varepsilon)$ вписана в $G_2(\varepsilon)$, для $\forall x_1 \in (a, b)$ и достаточно малых ε имеем

$$(3.11) \quad \begin{aligned} (\delta W_1/\delta S)(x_1, \pm \varepsilon \rho_1(x_1)) &< (\delta W_2/\delta S)(x_1, \pm \varepsilon \rho_2(x_1)) \\ (\nu \neq 0,5, t \neq 0) \end{aligned}$$

Для общего случая трещин $G_1(\varepsilon)$, $G_2(\varepsilon)$, вытянутых вдоль кривой ($G_1(\varepsilon)$ вписана в $G_2(\varepsilon)$), аналогичное неравенство

$$(3.12) \quad (\delta W_1/\delta S)(l, \pm \rho_1(l), \varepsilon) < (\delta W_2/\delta S)(l, \pm \rho_2(l), \varepsilon) \quad (t \neq 0)$$

как будет видно из дальнейшего, вообще говоря, неверно. Покажем, однако, что (3.12) справедливо (для достаточно малых ε) при $\nu < \nu_0 = 1/2(5 - \sqrt{17}) \approx 0,43845$. В случаях $\rho_1(l) < \rho_2(l)$ и $\rho_1(l) = \rho_2(l)$, $f_1''(l) < f_2''(l)$ справедливость неравенства (3.12) для достаточно малых ε (при $\nu \neq 0,5$) устанавливается с использованием (2.9), (2.10), (3.10) путем сравнения членов асимптотики $\delta W_1/\delta S$ и $\delta W_2/\delta S$ соответственно порядка ε и $\varepsilon^3 \ln \varepsilon$. В случае $\rho_1(l) = \rho_2(l)$, $f_1''(l) = f_2''(l)$ из (2.9), (2.10), (3.10) следует равенство

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (\delta W_2/\delta S)(l, \pm \rho_2(l), \varepsilon) - (\delta W_1/\delta S)(l, \pm \rho_1(l), \varepsilon) &= 0,25\beta w \varepsilon^3 I^* (f_2 - \\ &- f_1) + o(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

$$I^*(f_2 - f_1) = \int_{-L}^L B(l', l) |\Delta R|^{-3} [f_2(l') - f_1(l')] dl'$$

$$B(l', l) = (1 - 2\nu)(\gamma(l'), \gamma(l)) + 3\nu(\gamma(l'), e_{\Delta R})(\gamma(l), e_{\Delta R}), e_{\Delta R} = \Delta R/|\Delta R|$$

Покажем, что $B(l', l) > 0$ при $\nu < \nu_0$. Тогда получим $I^*(f_2 - f_1) > 0$ и неравенство (3.12) при малых ε будет доказано.

Пусть φ — угол между $\gamma(l')$ и $\gamma(l)$. Тогда

$$(3.14) \quad \varphi/2 \leq \arccos [2\sqrt{1-\nu}/(2-\nu)] < \pi/2$$

Действительно, пусть ψ — угол между t и $\gamma(l)$, при этом $\operatorname{tg} \psi = \nu \operatorname{tg} \alpha / (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \nu)$, где α — угол между t и $n(l)$. Рассмотрев экстремумы $\operatorname{tg} \psi$ как функции $\operatorname{tg} \alpha$, получим неравенство $\psi \leq \arccos [2\sqrt{1-\nu}/(2-\nu)]$. Аналогичная оценка имеет место для угла между t и $\gamma(l')$. В итоге получим (3.14).

Пусть φ_1, φ_2 — углы, образуемые $e_{\Delta R}$ с $\gamma(l), \gamma(l')$ соответственно, $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$. Тогда

$$B(l, l') = |\gamma(l')| |\gamma(l)| [(1-2\nu) \cos \varphi + 3\nu \cos \varphi_1 \cos \varphi_2] = \\ = 0,5 |\gamma(l')| |\gamma(l)| [(2-\nu) \cos \varphi + 3\nu \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Согласно (3.14)

$$\cos \varphi = 2 \cos^2(\varphi/2) - 1 \geq 8(1-\nu)(2-\nu)^{-2} - 1 \\ (2-\nu) \cos \varphi + 3\nu \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \geq 8(1-\nu)/(2-\nu) - 2 + \nu - 3\nu = \\ = 2(\nu^2 - 5\nu + 2)/(2-\nu) > 0 \text{ при } \nu < \nu_0$$

Доказательство неравенства (3.12) закончено.

Для $\forall \nu > \nu_0$, исходя из изложенного, можно построить пример, в котором неравенство (3.12) не имеет места. Так, в качестве $G_1(\varepsilon)$ можно взять кольцевую трещину, а в качестве $G_2(\varepsilon)$ — кольцевую трещину с маленьким «расширением» (фиг. 5). Выбор расположения точки $R(l)$ (в которой не выполнено (3.12)) и «расширения», а также направления нагрузки t показан на (фиг. 5), при этом должно быть выполнено соотношение $\alpha/2 = \arctg \sqrt{1-\nu}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 111—126.
2. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 59—64.
3. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В., Корельштейн Л. Б. Асимптотическое решение пространственных задач теории упругости о вытянутых плоских трещинах отрыва.— ПММ, 1984, т. 43, вып. 5, с. 854—863.
4. Kassir M. K., Sih J. J. Three dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loading.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, v. 33, No. 3, p. 601—611.

Москва

Поступила в редакцию
16.IV.1985