Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 539.375

РАВНОВЕСИЕ ПОЛОСТЕЙ И ТРЕЩИН-РАЗРЕЗОВ С ОБЛАСТЯМИ НАЛЕГАНИЯ И РАСКРЫТИЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.

Рассматривается класс трехмерных задач теории упругости о равновесии трещин-разрезов и полостей (в дальнейшем называемых также трещинами с начальным раскрытием) в предположении, что под действием системы объемных сил их поверхности могут налегать одна на другую. Границы области налегания заранее не известны. Изучаются качественные и экстремальные свойства решений, позволяющие устанавливать соответствие между решениями задач при вариации области полости и ее начального раскрытия (или формы трещины-разреза), внешних нагрузок, сравнивать решения задач рассматриваемого класса и задач о контакте двух полупространств; устанавливается теорема единственности.

Доказательства всех утверждений получены в рамках единого подхода с использованием асимптотики решений вблизи границ зон налегания и теоремы сравнения [1] (отражающей свойство положительности решений рассматриваемых задач). В связи с этим сначала анализируется асимптотическое поведение решения в окрестности границы зоны налегания и раскрытия поверхностей полости (трещины-разреза). Выясняется класс функций, описывающих начальное раскрытие полости, для которого решение вблизи границы этих областей не сингулярно. Показано, что способ отыскания неизвестных границ областей налегания из условия отсутствия сингулярности с учетом доказанных утверждений эквивалентен способу, основанному на минимизации функционала упругой энергии с ограничениями в форме неравенства [2].

Вариационный подход применялся к исследованию пространственных задач о трещинах-разрезах с областями налегания [2] и к решению задач о полости [3]. Построение границы области налегания как границы, где решение не сингулярно, реализовано в частном случае осесимметричной задачи о трещине-разрезе в слое [4] и полости [5, 6].

1. Рассмотрим равновесие линейно-упругого изотропного пространства с полостью, сечение которой в плоскости $x_3 = 0$ занимает область Ω. При этом расстояние между поверхностями полости $u(x_1, x_2)$ — однозначная функция (x_1, x_2) и мало по сравнению с размерами Ω (уплощенная полость).

Будем сносить условия на поверхностях полости в плоскость $x_3 = 0$. Предположим, что область налегания образуется в плоскости Ω под действием системы объемных сил, симметричных относительно плоскости $x_3 = 0$. Краевые условия на плоскости $x_3 = 0$ имеют вид

$$\sigma_{33}^{\pm} = 0\ (x_1, x_2) \in \Omega \setminus F;\ \sigma_{33}^{\pm} \leqslant 0,\ (x_1, x_2) \in F \tag{1.1}$$

$$u_3^+ - u_3^- = -u(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in F \tag{1.2}$$

$$u_3^+ - u_3^- = 0,\ (x_1, x_2) \in R^2 \setminus \Omega,\ x_3 \to \pm 0$$

$$u_3(x_1, x_2) \geqslant -u(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \Omega$$

где F — область налегания поверхностей полости. Вне области Ω внешние нагрузки заданы распределением объемных сил с плотностью $\rho(x_1, x_2, x_3)$. Если $u(x_1, x_2) \equiv 0$, то полость превращается в трещину-разрез.

При решении краевой задачи (1.1), (1.2) удобно перейти от системы внешних нагрузок к краевым условиям на плоскости $x_3 = 0$. Для этого найдем распределение напряжений в сплошном теле в области Ω: $-\sigma_{33}^\circ(x_1, x_2)$, считая, что соответствующая задача теории упругости для тела без полости решена. Затем в краевые условия для напряжений в области Ω прибавим напряжения $-\sigma_{33}^\circ(x_1, x_2)$ с противоположным знаком [2]. После выполнения этой процедуры краевые условия (1.1) примут вид

$$\sigma_{33}^{\pm} = \sigma_{33}^\circ(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \Omega \setminus F \tag{1.3}$$
$$\sigma_{33}^{\pm} \leqslant \sigma_{33}^\circ(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in F$$

В дальнейшем за областью $\Omega \setminus F$ по аналогии с краевой задачей (1.1), (1.2) сохраним название «свободная поверхность» и обозначим ее D.

2. Рассмотрим краевую задачу (1.2), (1.3). Установим критерий, определяющий положение границы областей налегания и раскрытия. Для этого проанализируем поведение решения в окрестности границы в зависимости от геометрии начального раскрытия $u(x_1, x_2)$.

Введем локальную систему координат XYZ (ось Z направлена по касательной к границе свободной поверхности $\Omega \setminus F$, ось Y нормальна плоскости $x_3 = 0$; $x \leqslant 0$ соответствует области $\Omega \setminus F$). Тогда в силу (1.2), (1.3) имеем при $z = 0$

$$u_y^+ - u_y^- = -u(x),\ x \geqslant 0;\quad \sigma_{yy}^{\pm}(x, 0) = \sigma(x),\quad x \leqslant 0, \tag{2.1}$$
$$y \to \pm 0$$

где $\sigma(x)$ определяется внешним напряжением, $u(x)$ — заданный скачок смещения. Предположим, что функции $u(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условию Гельдера [7], а в окрестности точки $x = 0$ являются аналитическими. В силу симметрии $\sigma_{zy}^{\pm} = \sigma_{zx}^{\pm} = 0$, $|x| < \infty$, $y = 0$.

В локальной системе координат напряженное состояние в случае плоской деформации описывается формулами Колосова — Мусхелишвили [8, 9] (μ — модуль сдвига)

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi(\eta) + \Phi^*(\eta)],\ \eta = x + iy \tag{2.2}$$
$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(\eta) + \Omega(\eta^*) + (\eta - \eta^*)\Phi'^*(\eta)$$
$$2\mu(u_x' + iu_y') = \varkappa\Phi(\eta) - \Omega(\eta^*) - (\eta - \eta^*)\Phi'^*(\eta)$$
$$u_\alpha' = \partial u_\alpha/\partial x,\ \alpha = x, y;\ \mu = E/2(1 + \nu),\ \varkappa = 3 - 4\nu$$

Подставляя представления (2.2) в (2.1), приходим к следующей задаче сопряжения [9]:

$$\Phi^+ - \Phi^- = ig_0'(x),\ x \geqslant 0;\ \Phi^+ + \Phi^- = \sigma(x),\ x \leqslant 0 \tag{2.3}$$
$$g_0' = 2\mu(u_y^+ - u_y^-)/(\varkappa + 1) = -2\mu u(x)/(\varkappa + 1) = dg_0/dx$$

Рассмотрим каноническое решение задачи (2.3): $x_0 = \eta^{1/2}$, для которого $x_0^+ = x_0^-$, $x \geqslant 0$, $x_0^+ = -x_0^-$, $x \leqslant 0$, $y = 0$.

Решение краевой задачи (2.3) в классе функций, ограниченных на бесконечности и неограниченных в точке $\eta = 0$, имеет вид [7]

$$\Phi(\eta) = (M(\eta) + M_1(\eta) + B)/x_0(\eta)$$
$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sigma(t)\, x_0(t)\, dt}{t - \eta},\quad M_1(\eta) = \int_{0}^{\infty} \frac{ig_0'(t)\, x_0(t)\, dt}{t - \eta}$$

(B — постоянная, определяемая из условий на бесконечности).

Для оценки $M(\eta)$, $M_1(\eta)$ рассмотрим функции $w(\eta) = \sigma(\eta)\, x_0(\eta)$, $w_1(\eta) = ig_0'(\eta)\, x_1(\eta)$, где $x_1(\eta) = \eta^{1/2}$, $\sqrt{\eta} = \pm\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, $y \to \pm 0$, в плоскости XY проведен разрез вдоль положительной полуоси. Получим $(M - w)^+ = (M - w)^-$ и $(M_1 - w_1)^+ = (M_1 - w_1)^-$ при $y \to \pm 0$. Следовательно, функции $M(\eta) - w(\eta)$ и $M_1(\eta) - w_1(\eta)$ аналитичны в окрестности точки $\eta = 0$; $M(\eta) - w(\eta) + M_1(\eta) - w_1(\eta)$ — аналитическая функция.

Таким образом, вблизи точки $\eta = 0$ имеем

$$\Phi(\eta) = \sigma(\eta) + ig_0'(\eta)\, x_1(\eta)\, x_0^{-1}(\eta) + R_n(\eta)\, x_0^{-1}(\eta) \tag{2.4}$$

$$R_n(\eta) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k \eta^{k-1}\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

Распределение напряжений и смещений вдоль оси x в окрестности точки $x = 0$ после подстановки (2.4) в (2.2) примет вид

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x, 0) = \sigma(x), \quad x \leqslant 0 \tag{2.5}$$

$$\sigma_{yy}^{\pm}(x, 0) = \sigma(x) + {}^1/_2 x^{-1/2} A_1 + \ldots + (n - {}^1/_2)\, x^{n-3/2} A_n, \; x \geqslant 0$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) \leqslant 0, \; x \geqslant 0; \; u_y(x, 0) = -u(x), \; x \geqslant 0$$

$$u_y(x, 0) = -u(x) + 2(1 - \nu)\, \mu^{-1}(r^{1/2} A_1 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} r^{n-1/2} A_n), \quad x \leqslant 0, \quad r = |x|$$

Из (2.5) следует, что распределения смещений и напряжений вдоль оси x связаны через коэффициенты A_k.

Проанализируем распределение напряжений и смещений вблизи границы области контакта. Предположим, что уравнение поверхности полости при $x \leqslant 0$ имеет вид $u_0(x) = |x|^{\alpha} F_p(x) + B_1$, $F_p(x)$ — полином степени p, $0 < \alpha \leqslant 1$ т. е. поверхность, вообще говоря, кусочно непрерывна в точке $x = 0$.

При $x \leqslant 0$ поверхности полости не налегают, поэтому скачок смещения $u_y(x)$ по модулю должен быть меньше расстояния между ними:

$$|u_y(x, 0)| \leqslant u_0(x), \; x \leqslant 0 \tag{2.6}$$

Отсюда и из (2.5) следует, что если $p \geqslant 1$, то для выполнения (2.6), с учетом $\sigma_{yy} \leqslant 0$ в области контакта $x \geqslant 0$, необходимо $A_1 = 0$, а $A_2 \leqslant 0$. Если же $p = 0$, то при ${}^1/_2 \leqslant \alpha \leqslant 1$ для выполнения (2.6) необходимо $A_1 = 0$, а при $0 < \alpha < {}^1/_2$ необходимо $A_1 \neq 0$ и $A_1 < 0$. В этом случае напряжения в области контакта сжимающие и сингулярные.

Как следует из полученной асимптотики, в случае $p \geqslant 1$ и $p = 0$, ${}^1/_2 \leqslant \alpha \leqslant 1$ в результате сжатия поверхности полости плавно смыкаются даже при наличии нерегулярных точек на произвольном участке поверхностей. При $p = 0$, $0 < \alpha < {}^1/_2$ сжимающие напряжения вблизи точки излома в области контакта сингулярны, и при любых конечных A_1 невозможно полное закрытие полости. Следовательно, до решения задачи можно указать участки поверхностей полости, которые не вступят в контакт. Если $u(x) \equiv 0$ при $x \geqslant 0$, то построенная асимптотика представляет асимптотику решения вблизи угла, образованного поверхностями с уравнением $u(x) = |x|^{\alpha} F_p(x)$, $x \leqslant 0$ в сплошном материале (ось $x \geqslant 0$ направлена в материал).

Полученной зависимости условий возникновения контактных областей от параметров α, p соответствуют результаты численных расчетов для полостей эллиптических в плане форм [3]: при начальном раскрытии полости $(u(x_1, x_2) = b(1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2)^{\alpha/2})$ область контакта примыкает к границе полости, если $\alpha \geqslant 1$, и появляется внутри области, образованной сечением полости плоскостью $x_3 = 0$, если $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим случай, когда расстояние между поверхностями полости $u(x_1, x_2)$ — гладкая функция. Тогда для выполнения условия (2.6) (между поверхностями полости имеется раскрытие) необходимо, чтобы при $A_1 \neq 0$ было $A_1 > 0$, а при $A_1 = 0$ было $A_2 \leqslant 0$. При $A_1 \neq 0$, согласно (2.5), $\sigma_{yy}^{\pm}(x, 0) \geqslant 0$, но последнее означает, что берега полости должны притягиваться в области сплошности $x \geqslant 0$. Если $x \geqslant 0$ — область контакта, т. е. $\sigma_{yy}\pm(x, 0) \leqslant 0$, то необходимо $A_1 \equiv 0$ и распределение напряжений не сингулярно в окрестности границы области налегания, а поверхности полости плавно смыкаются. Аналогичный анализ проводится для трещин-разрезов. В этом случае также из условия $u_y(x, 0) \geqslant 0$, $x \leqslant 0$ следует, что при $A_1 \neq 0$ будет $A_1 > 0$, а при $A_1 = 0$ имеем $A_2 \leqslant 0$. Асимптотика при $A_1 \neq 0$ соответствует, согласно (2.5), условию $\sigma_{yy}(x, 0) \geqslant 0$, т. е. берега трещины должны притягиваться. Налагая условие в области контакта $x \geqslant 0$, $\sigma_{yy}(x, 0) \leqslant 0$, имеем с необходимостью $A_1 = 0$, $A_2 \leqslant 0$.

В краевой задаче (1.1), (1.2) для области Ω в случае $u(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$ краевые условия в области свободной поверхности $\Omega \setminus F$ совпадают с краевыми условиями задачи о трещине-разрезе, занимающей область $\Omega \setminus F$ в сплошном материале, если в последней задаче на границе области $\Omega \setminus F$ коэффициент интенсивности напряжений равен нулю. Это позволяет использовать класс решений задач о равновесии трещин-разрезов в сплошном материале при построении решений задач о равновесии трещин-разрезов с областями налегания. Граница Γ областей контакта и свободной поверхности в задаче для трещин-разрезов, занимающих область Ω, определяется из условия отыскания контура трещины-разреза области $\Omega \setminus F$, на котором $A_1(x_1^\circ, x_2^\circ) = 0$. Аналогично для полости граница Γ контакта и свободной поверхности определяется условием плавного смыкания ее поверхностей

$$\lim \partial u_3(x_1, x_2)/\partial x = -\partial u(x_1^\circ, x_2^\circ)/\partial x, \quad (x_1, x_2) \to (x_1^\circ, x_2^\circ) \in \Gamma$$

Предлагаемый подход к решению задач о трещинах и полостях с областями налегания аналогичен подходу [10, 11] к рассмотрению равновесных трещин. Здесь роль сил сцепления играют сжимающие силы в области контакта [11, 12].

3. Рассмотрим вопрос о единственности решения краевой задачи (1.1), (1.2). Предположим, что решение смешанной задачи теории упругости для полупространства с линией раздела граничных условий Γ единственно [13]. В этом случае решение задачи о полости с областями налегания и раскрытия под действием системы объемных сил единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют две области раскрытия D_1 и D_2 со скачками смещений $u_3^{(1)}$, $u_3^{(2)}$ и напряженным состоянием $\sigma_{ik}^{(1)}$, $\sigma_{ik}^{(2)}$ под действием заданной системы объемных сил. Области D_1, D_2 не могут совпадать в силу предположенной единственности решения смешанной задачи теории упругости с границей раздела Γ. Поэтому их пересечение $D_0: D_1 \cap D_2$ непусто. В силу условий в области налегания (1.1) имеем

$$\sigma_{33}^{(1)} \leqslant 0, \ (x_1, x_2) \in D_2 \setminus D_0; \ \sigma_{33}^{(2)} \leqslant 0, \ (x_1, x_2) \in D_1 \setminus D_0 \tag{3.1}$$

Вычтем величины, соответствующие второму и первому состояниям, и рассмотрим верхнее полупространство. В плоскости $x_3 = 0$ с учетом (1.2), (1.3), (3.1) получим

$$\begin{aligned} &v_3^+ = u_3^{(1)} - u(x_1, x_2) \geqslant 0, \quad \Sigma_{33} = -\sigma_{33}^{(2)} \geqslant 0, \quad (x_1, x_2) \in D_1 \\ &v_3^+ = u_3^{(1)} - u_3^{(2)}, \quad \Sigma_{33} = 0, \quad (x_1, x_2) \in D_0 \\ &v_3^+ = -u_3^{(2)} - u(x_1, x_2) \leqslant 0, \quad \Sigma_{33} = \sigma_{33}^{(1)} \leqslant 0, \quad (x_1, x_2) \in D_2 \\ &v_3 = 0, \quad (x_1, x_2) \in R^2 \setminus D_1 \cup D_2 \\ &\Sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)}, \quad v_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Упругая энергия для напряженного состояния Σ_{ik} при заданных напряжениях и смещениях на границе

$$W = -\frac{1}{2} \int_{R^2} \Sigma_{33} v_3 n_3 \, dx_1 \, dx_2 \leqslant 0$$

что невозможно [13]. Следовательно, $u_3^{(1)} = u_3^{(2)}$ и единственность решения доказана.

Аналогичное утверждение имеет место для трещины-разреза ($u(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$) с областями налегания и сцепления.

Следствие 1. Рассмотрим полость (трещину-разрез), сечение которой плоскостью $x_3 = 0$ занимает область Ω, вдоль которой под действием системы объемных сил образуется область налегания F. Рассмотрим теперь ту же самую полость (трещину-разрез), под действием той же системы объемных сил, но с областью налегания $F_1 \subset F$, полученной за счет приложения к поверхностям полости (трещины-разреза) в F_1 дополнительных сил. В этом случае в области F_1 должны быть подобласти $F_1' \subset F_1$, где $\sigma_{33}(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in F_1'$. Если области F_1' и D_1 имеют общие участки границы, то, согласно асимптотике (2.5), вдоль этих участков решение сингулярно.

4. Используя вид асимптотики решения вблизи свободной поверхности, следствие 1 и свойство положительности решения [1], можно доказать утверждения, позволяющие строить оценки решений задач для трещин-разрезов и полостей с областями налегания.

Утверждение 1. Предположим, что под действием сжимающих нагрузок поверхности полости (трещины-разреза) налегают на части F_1 ($\partial F_1 = \Gamma_1$) области Ω, являющейся сечением полости плоскостью $x_3 = 0$. Рассмотрим ту же самую полость (трещину-разрез) с областью налегания F_2, $F_2 \supset F_1$, полученной за счет приложения дополнительных сил в F_2. Если граница Γ_2 имеет точку касания M с Γ_1, то распределение скачка нормальных смещений поверхностей полости во втором случае в области $\Omega \setminus F_2$ вблизи точки касания M в локальной системе координат XYZ имеет вид $w_y(x) = -(u(x) - B_2 |x|^{3/2})$, $x \leqslant 0$, $B_2 \geqslant 0$, а распределение напряжений $\sigma_{yy}(x) = -B_2 x^{1/2}$, $x \geqslant 0$ не сингулярно ($u(x)$ — начальное расстояние между поверхностями полости, $u_y(x)$, $w_y(x)$ — компоненты скачка смещения поверхностей полости соответственно для областей налегания F_1 и F_2, $u(x_1, x_2) \equiv 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$ — трещина-разрез).

Действительно, при приложении дополнительных нагрузок к поверхностям полости распределение скачка смещений $w_y(x)$ в локальной системе координат, согласно (2.5), в предположении, что $B_1 \neq 0$, имеет вид $w_y(x) = -(u(x) - B_1 |x|^{1/2})$, $x \leqslant 0$, $B_1 \geqslant 0$. Поскольку распределение скачка смещений $u_y(x)$ в первом случае имеет вид $u_y(x) = -(u(x) + A_2 |x|^{3/2})$, $x \leqslant 0$, $A_2 \leqslant 0$, то

$$|u_y(x)| > |w_y(x)| \tag{4.1}$$

Покажем, что при сделанных предположениях можем прийти к противоположному неравенству. В области налегания F_2, согласно следствию 1, должны существовать подобласти $F'_2 \subset F_2$, на которых $\sigma_{yy}(x, z) \geqslant 0$. Рассмотрим приращение смещения при снятии напряжения на этих подобластях F'_2. Для этого представим задачу в виде суперпозиции исходной задачи для области $\Omega \setminus F_2$ и для области $D_2 \cup F'_2$. На области D_2 напряжения отсутствуют, а на F'_2 добавлены напряжения с противоположным знаком (растягивающие). Согласно свойству положительности скачка смещения [1], получим, что $\delta u_3 > 0$, u_3 возрастает, $(x_1, x_2) \in D_2 \cup F'_2$. Устремим $F_2 \to F_1$, $\Gamma_2 \to \Gamma_1$, увеличивая D_2 за счет раскрытия областей F'_2. По теореме единственности, $F_2 \to F_1$, $D_2 \to D_1$. Так как скачок смещения возрастает [1] за счет приложения растягивающих напряжений, получим $|u_y(x)| > |w_y(x)|$ в окрестности точки касания M, что противоречит исходному предположению (4.1).

Утверждение 1 позволяет строить оценки решений задач о равновесии полостей и трещин-разрезов с областями налегания и положений неизвестных границ этих областей, используя решения соответствующих задач для более простых геометрических полостей (разрезов).

Рассмотрим равновесие в безграничной среде трещины-разреза, занимающей область Ω плоскости $x_3 = 0$ под действием объемных сил. Поверхности разреза могут налегать на некоторой заранее неизвестной области $F \subset \Omega$ и раскрываться на области $D \subset \Omega$.

Утверждение 2. Если на трещине-разрезе Ω_1, лежащей в Ω, $\Omega_1 \subset \subset \Omega$, под действием той же системы объемных сил образуется область раскрытия D_1, то она лежит внутри области D, $D_1 \subset D$.

Предположим, что область D_1 не содержится в D. Согласно следствию 1, в области F_1 должна быть часть F'_1, на которой $\sigma_{33}(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in F'_1$. Будем расширять область D_1 путем добавления областей F'_1, прикладывая в F'_1 растягивающие напряжения. Согласно принципу сравнения [1], скачок смещений u_3 на области D_1 возрастает. Таким образом, расширяя область раскрытия D_1, отличную от D, получим новую область раскрытия, что противоречит теореме единственности. Следовательно, необходимо, чтобы $D_1 \subset D$. Утверждение доказано.

Утверждение 2, сформулированное для областей налегания, доказано в [2] на основе вариационных неравенств.

Докажем теперь для трещины-разреза с областью налегания два вариационных утверждения, которые также являются следствием полученной асимптотики и теоремы сравнения [1].

Утверждение 3. Скачок смещения $u_3 = u_3^+ - u_3^-$, полученный для трещин-разрезов $\Omega_1 \subset \Omega$ с областями раскрытия D_1 $(u_3(x_1, x_2) \geqslant 0, (x_1, x_2) \in \in D_1)$, в данном поле внешних нагрузок достигает максимума в каждой точке области раскрытия $D \subset \Omega$, такой, вне которой выполняется неравенство $\sigma_{33}(x_1, x_2) \leqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega \setminus D$, т. е. на решении краевой задачи (1.1), (1.2) при условии $u(x_1, x_2) \equiv 0$, $u_3(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Покажем сначала, что на области D скачок смещения достигает экстремума при условии $u_3(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$. Проварьируем область D свободной поверхности вблизи границы D.

Рассмотрим случай, когда область D расширяется $\delta D \not\subset D$. Для определения приращения скачка смещения $u_3(x_1, x_2)$ при расширении области D представим краевую задачу (1.1), (1.2) в виде суперпозиции двух задач: исходной для области D с заданной системой объемных сил и для области $D \cup \delta D$, в которой нагрузка на D отсутствует, а на участке δD добавлены напряжения $\delta\sigma_{33}^{\pm}$, которые были в сплошном материале на участке δD, но с противоположным знаком (суперпозиция решений).

Асимптотика напряжений вблизи границы области D, вне которой $\sigma_{33}^{\pm}(x_1, x_2) \leqslant \leqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega \setminus D$, определяется выражением (2.5), при $A_1 = 0$, $\sigma(x) = 0$, $x \leqslant \leqslant 0$, $u(x) = 0$, $x \geqslant 0$ и $A_2 \leqslant 0$. Следовательно, при расширении области D напряжения $\delta\sigma_{33}^{\pm}(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \delta D$ и, согласно [1], скачок смещения $\delta u_3 \leqslant 0$ для любой точки $(x_1, x_2) \in D \cup \delta D$.

Полученное неравенство $u_3 = \delta u_3 \leqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \delta D$ соответствует проникновению одной поверхности трещины-разреза в другую в окрестности границы области D, что невозможно. Следовательно, расширение области D в область налегания недопустимо в силу ограничения $u_3(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Рассмотрим случай сужения области D, $\delta D \subset D$. При этом на участке δD нужно приложить силы, притягивающие одну поверхность трещины к другой, т. е. $\delta\sigma_{33}^{\pm} \geqslant 0$, и согласно [1], $\delta u_3 \leqslant 0$ в любой точке области D. Таким образом, при вариации свободной границы скачок смещения не возрастает. Покажем, что он достигает максимального значения в каждой точке области D, вне которой $\sigma_{33}^{\pm}(x_1, x_2) \leqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega \setminus \setminus D$.

Рассмотрим различные области раскрытия $D_1 \subset \Omega_1$, образующиеся на трещинах-разрезах $\Omega_1 \subset \Omega$. Согласно утверждению 2, все эти области содержатся в D. Вдоль границы этих областей, согласно следствию 1, существуют участки сингулярности напряжения, отличающиеся от границы области Ω. Расширяя область D_1 до области D вдоль этих участков, получим, согласно теореме сравнения [1], что скачок смещения u_3 возрастает в каждой точке области D_1 и, следовательно, при совпадении с D достигает максимума.

Таким образом, в данном поле нагрузок скачок смещения $u_3(x_1, x_2)$, определенный на множестве областей раскрытия D_1 ($u_3(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in D_1$), достигает максимума на области $D \subset \Omega$, вне которой $\sigma_{33}(x_1, x_2) \leqslant 0$, $(x_1, x_2) \in D$. Утверждение 3 доказано.

Непосредственным следствием утверждения 3 является максимальность объема раскрытия трещины-разреза для области $D \subset \Omega$, вне которой выполняется неравенство $\sigma_{33}^{\pm}(x_1, x_2) \leqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega \setminus D$ при условии $u_3(x_1, x_2) \geqslant 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, т. е. на решении краевой задачи (1.1) [14].

Рассмотрим изменение упругой энергии при вариации нагрузок и области свободной поверхности D на трещине-разрезе Ω. Анализ проведем для тела конечного объема V°, содержащего трещину Ω, к поверхности которого Σ приложены заданные нагрузки.

Пусть в состоянии один напряжения и деформации $\sigma_{ik}^{(1)}$, $\varepsilon_{ik}^{(1)}$, а в состоянии два — $\sigma_{ik}^{(2)}$, $\varepsilon_{ik}^{(2)}$. Изменение упругой энергии имеет вид [13]

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int\limits_{V} (\sigma_{ik}^{(2)}\varepsilon_{ik}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(1)}\varepsilon_{ik}^{(1)})\, dV^{\circ} = W_2 - W_1 \tag{4.2}$$

где W_i — энергия в i-м состоянии, $i = 1, 2$. Воспользуемся теоремой Бетти [13]

$$\int\limits_{V} (\sigma_{ik}^{(2)}\varepsilon_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(1)}\varepsilon_{ik}^{(2)})\, dV^{\circ} = 0$$

Прибавив это соотношение к правой части (4.2), получим после перехода к поверхностному интегралу

$$\Delta W = I_{\Sigma}[T_i(u_i^{(2)} - u_i^{(1)})] + I_{D\cup\delta D}[(\sigma_i^{(2)} + \sigma_i^{(1)})(u_i^{(2)} - u_i^{(1)})]$$

$$I_s[fg] = \frac{1}{2}\int\limits_{s} fg\, ds$$

где Σ — поверхность, заключающая объем V°, T_i — вектор силы, приложенной к поверхности Σ. С другой стороны, по теореме Клапейрона

$$\Delta W = I_{\Sigma}[T_i(u_i^{(2)} - u_i^{(1)})] - I_{D\cup\delta D}[u_i^{(2)}\sigma_{i3}^{(2)}n_3] + I_D[u_i^{(1)}\sigma_{i3}^{(1)}n_3]$$

Исключая из двух последних соотношений интеграл по Σ, получим

$$\Delta W = -I_D[(u_i^{(2)} + u_i^{(1)})(\sigma_{3i}^{(2)} - \sigma_{3i}^{(1)})n_3] - \\ - I_{\delta D}[u_i^{(2)}(\sigma_{3i}^{(2)} - \sigma_{3i}^{(1)})n_3] - I_{\delta D}[u_i^{(1)}(\sigma_{3i}^{(2)} + \sigma_{3i}^{(1)})n_3] \tag{4.3}$$

В окончательный результат (4.3) не входит объем V° и поверхность Σ, что позволяет использовать его и для подсчета изменения энергии бесконечного пространства. Соотношение (4.3) позволяет анализировать изменение упругой энергии в зависимости от изменения напряжения и размеров плоской области D.

Применим полученный результат к задаче о равновесии трещины-разреза Ω с областью налегания F и свободной поверхности D. Рассмотрим изменение упругой энергии при вариации границ зоны налегания в краевой задаче (1.2), (1.3). В этом случае, согласно (3.3), получим

$$\Delta W = -I_{\delta D}[u_i^{(2)}(\sigma_{3i}^{(2)} - \sigma_{3i}^{(1)})n_3] - I_{\delta D}[u_i^{(1)}(\sigma_{3i}^{(2)} + \sigma_{3i}^{(1)})n_3] \tag{4.4}$$

Два слагаемых в выражении приращения упругой энергии (4.4) соответствуют расширению и сужению области D. Действительно, если область D расширяется, то $u_i^{(1)}(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in \delta D$ и второе слагаемое в (4.4) надо исключить. Если же область D сужается, то $u_i^{(2)}(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in \delta D$ и исключается первое слагаемое. Обозначая смещение контура области D в направлении нормали $\delta L\ (x_1,\ x_2)$ и предполагая, что контур гладкий, запишем соотношение (3.4) в локальной системе координат XYZ (ось x расположена в области D и направлена по нормали к контуру, $x \leqslant 0$ соответствует области D, dl — элемент дуги контура)

$$(4.5)\qquad \Delta W = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\Big(\int\limits_{0}^{\delta L} u_i^{(2)}\,(\sigma_{3i}^{(2)} - \sigma_{3i}^{(1)})\, n_3\, dx\Big)dl, \qquad \delta L > 0$$

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\Big(\int\limits_{\delta L}^{0} u_i^{(1)}\,(\sigma_{3i}^{(2)} + \sigma_{3i}^{(1)})\, n_3\, dx\Big)dl, \qquad \delta L < 0$$

Вычислим изменение энергии при вариации области D. Для этого в выражение (4.5) подставим асимптотическое представление напряжений и скачка смещений (2.5) в локальной системе координат в окрестности границы области D

$$(4.6)\qquad \Delta W = \frac{(1-\nu)\pi}{\mu}\int\limits_{\Gamma}\Big[A_1^{(2)}A_1^{(1)}\delta L + (A_2^{(1)}A_1^{(2)} - A_1^{(1)}A_2^{(2)})\,\frac{3}{16}\,\delta L^2 + \ldots\Big]\, dl$$

Исследуем выражение (4.6) при переходе из различных состояний. Если $A_1^{(1)} \neq 0$, $A_1^{(2)} \neq 0$ и, следовательно, для трещины-разреза $A_1^{(1)} > 0$, $A_1^{(2)} > 0$, то изменение упругой энергии определится первым приближением по δL

$$\Delta W = \frac{(1-\nu)\pi}{\mu}\int\limits_{\Gamma} A_1^{(2)}A_1^{(1)}\delta L\, dl$$

т. е. упругая энергия при расширении трещины возрастает: $\delta W > 0$. В пределе при $\delta L \to 0$, $A_1^{(2)} \to A_1^{(1)} = A_1$ выражение для изменения упругой энергии совпадает с формулой Ирвина, если положить $A_1 = K_1/\sqrt{2\pi}$, K_1 — коэффициент интенсивности напряжений [8, 9].

Таким образом, при вариации области, вне которой не выполняется ограничение $\sigma_{33}^{\pm}\ (x_1,\ x_2) \leqslant 0$, упругая энергия монотонно возрастает.

По доказанному утверждению области D_1, для которых $u_3 \geqslant 0$, $(x_1,\ x_2) \in D_1$, лежат в D, $D_1 \subset D$ и имеют участки границы, вдоль которых напряжения сингулярны, и не совпадают с границей Ω. Расширяя область D вдоль этих границ, получим, что упругая энергия, согласно предыдущему, возрастает, а на границе области D, на которой $A_1 = 0$, достигает максимума. При $\delta L < 0$, согласно асимптотике (2.5) и утверждению 3, $A_1^{(2)} < 0$, $A_2^{(1)} < 0$, $A_1^{(1)} = 0$. Подставляя соотношение (2.5) для коэффициентов разложения в (4.6), получим, что $\delta W < 0$ при $\delta L < 0$, т. е. W убывает. Вариация $\delta L > 0$ для области D недопустима в силу ограничения $u_3\ (x_1,\ x_2) \geqslant 0$, $(x_1,\ x_2) \in \Omega$.

Таким образом, можно сформулировать следующее

Утверждение 4. Функционал упругой энергии

$$W = -\frac{1}{2}\int\limits_{D_1} u_3\sigma_{33}n_3\, ds$$

вычисленный на множестве областей $D_1 \subset \Omega$, на которых $u_3 \geqslant 0$, $(x_1,\ x_2) \in D_1$ в заданном поле внешних нагрузок, достигает своего максимума на области $D \subset \Omega$, вне которой выполняется неравенство $\sigma_{33}^{\pm}\ (x_1,\ x_2) \leqslant 0$, $(x_1,\ x_2) \in \Omega \setminus D$ при условии $u_3\ (x_1,\ x_2) \geqslant 0$, $(x_1,\ x_2) \in \Omega$.

Утверждение 4 было сформулировано [2] и доказано другим путем. Доказательство утверждения 4 на основании теоремы сравнения и установленного выше вида асимптотики решения задачи о равновесии трещин вблизи границы зоны налегания ее поверхностей одновременно устанавливает эквивалентность подходов к решению задач о трещине-разрезе с областью налегания вариационным способом [2] и путем построения несингулярного решения. Из требования достижения максимума функционала упругой энергии следует несингулярность решения на границе областей свободной поверхности и контакта и из требования несингулярности решения — максимум упругой энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 59—64.
2. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 82—94.
3. *Балуева А. В., Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф.* Метод расчета смещений поверхностей тонких пространственных полостей.— Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых, 1984, № 6, с. 3—9.
4. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О локальном осесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой и круговой щелью.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1, с. 139—144.
5. *Моссаковский В. И., Загубиженко П. А.* О сжатии упругой изотропной плоскости, ослабленной прямолинейной щелью.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1954, № 5, с. 385—390.
6. *Бойко Л. Т., Беркович П. Е.* Контактная задача для плоскости, содержащей щель переменной ширины.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1084—1089.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
10. *Баренблатт Г. И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 434—444.
11. *Ишлинский А. Ю.* Сопоставление двух моделей развития трещин в твердом теле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1968, № 6, с. 168—177.
12. *Islinskij A. Yu.* Consederation of the theory of cracks from the point of view of contact problems of the theory of elasticity.— In: The mechanics of the contact between deformable bodies. Delft: Univ. Press, 1975, p. 77—83.
13. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
14. *Керчман В. И.* Экстремальные свойства упругой энергии и новые вариационные принципы в односторонних задачах для штампов и трещин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 68—77.

Москва

Поступила в редакцию
9.I.1986