

УДК 539.375

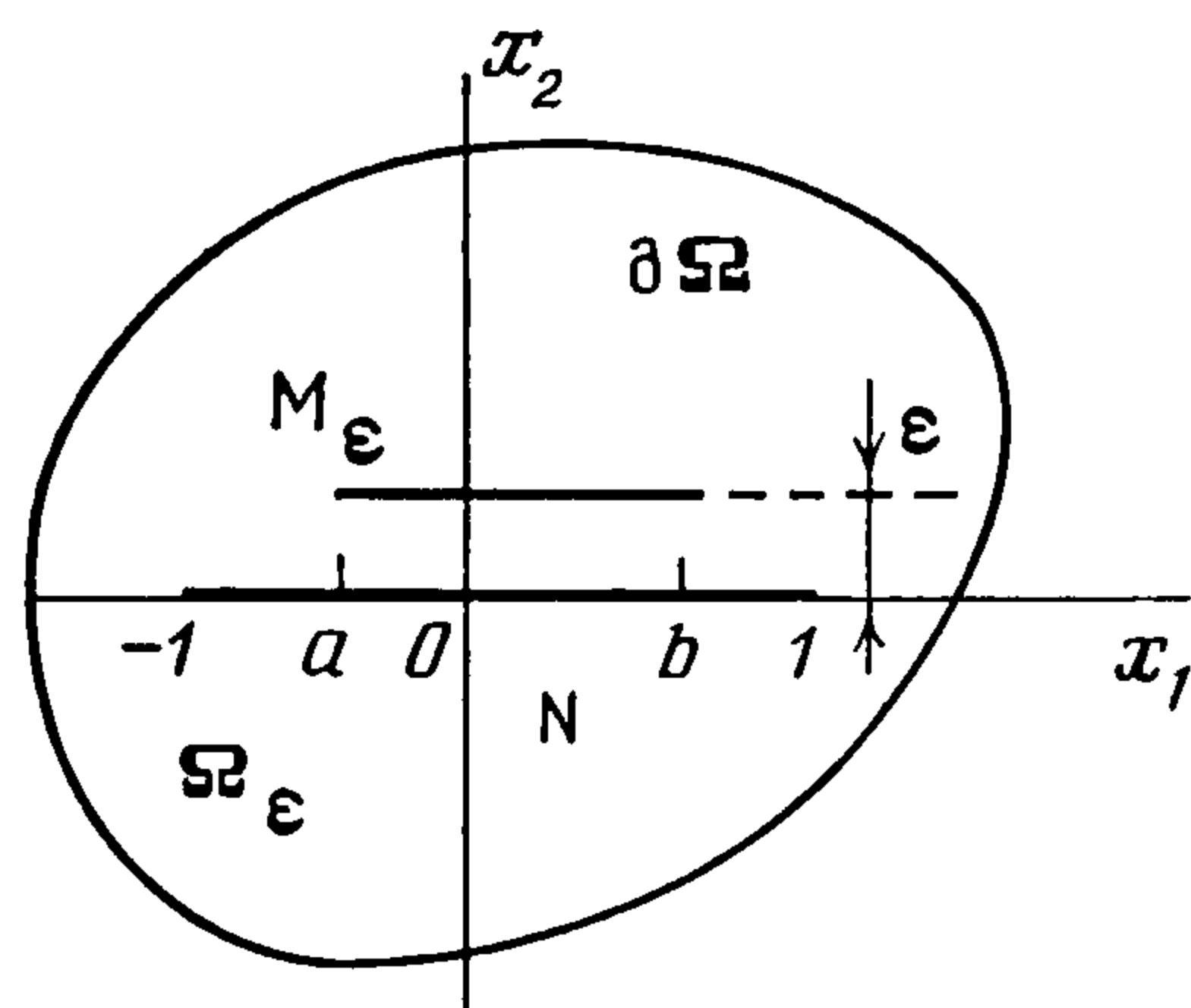
## АНТИПЛОСКИЙ СДВИГ ОБЛАСТИ С ДВУМЯ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Назаров С. А., Черняев П. К.

Изучается антиплоская деформация области с двумя параллельными трещинами разной длины, причем меньшая может находиться над большей или быть смещена относительно нее. Метод решения таких задач предложен в [1]. Расстояние между трещинами считается малым параметром задачи. Строится приближенное решение (асимптотика деформации) и, как следствие, отыскиваются асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений. Численные исследования взаимодействия трещин проводились в [2, 3].

1. **Постановка задачи.** Пусть  $\Omega$  — область на плоскости  $\mathbf{R}^2$  с гладкой (класса  $C^\infty$ ) границей  $\partial\Omega$ , содержащая отрезок  $N = \{x \in \mathbf{R}^2: x_2 = 0, -1 \leq x_1 \leq 1\}$ .

Введем еще зависящие от малого положительного параметра  $\varepsilon$  отрезок  $M_\varepsilon = \{x: x_2 = \varepsilon, a \leq x_1 \leq b\}$  и область  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (N \cup M_\varepsilon)$  (фиг. 1). Здесь  $a$  и  $b$  — числа из интервала  $(-1, 1)$ ;  $\varepsilon \ll \min\{1 - b, 1 + a, a + b\}$ . В области  $\Omega_\varepsilon$  рассмотрим задачу антиплоского сдвига



Фиг. 1

$$(1.1) \quad \mu \Delta u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon; \quad \mu \frac{\partial u}{\partial n}(\varepsilon, x) = q(x), \quad x \in \partial\Omega$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}(\varepsilon, x_1, \varepsilon \pm 0) = \mp p_M^\pm(x_1), \quad a < x_1 < b$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}(\varepsilon, x_1, \pm 0) = \mp p_N^\pm(x_1), \quad -1 < x_1 < 1$$

где  $u$  — деформация,  $\mu$  — модуль сдвига,  $n$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ ,  $q$  и  $p_M^\pm$ ,  $p_N^\pm$  — гладкие внешние нагрузки, приложенные к контуру  $\partial\Omega$  и берегам  $M_\varepsilon^\pm$ ,  $N^\pm$  разрезов  $M_\varepsilon$ ,  $N$  соответственно. Предположим, что усилия на границе  $\partial\Omega_\varepsilon$  самоуравновешены, т. е. выполнено условие

$$(1.2) \quad \int_{\partial\Omega} q(x) dl + \sum_{\pm} \left\{ \int_a^b p_M^\pm(x_1) dx_1 + \int_{-1}^1 p_N^\pm(x_1) dx_1 \right\} = 0$$

разрешимости краевой задачи (1.1) в пространстве  $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$  (или в классе ограниченных функций).

Пусть  $r_b$ ,  $\theta_b$  — полярные координаты с центром в вершине  $(b, \varepsilon)$  трещины  $M_\varepsilon$ , такие, что берега  $M_\varepsilon^\pm$  задаются равенствами  $\theta_b = \pm \pi$ . В малой окрестности точки  $(b, \varepsilon)$  для решения  $u$  задачи (1.1) справедливо представление

$$(1.3) \quad u(\varepsilon, x) = \text{const} + K_b(\varepsilon) \mu^{-1} (1/2 r_b / \pi)^{1/2} \sin^{1/2} \theta_b + O(r_b |\ln r_b|)$$

где  $K_b(\varepsilon)$  — коэффициент интенсивности напряжений [4]. Аналогичные формулы имеют место и вблизи концов  $(a, \varepsilon)$  и  $(\pm 1, 0)$  разрезов  $M_\varepsilon$  и  $N$ . Соответствующие коэффициенты интенсивности будем обозначать  $K_a(\varepsilon)$  и  $K_\pm(\varepsilon)$ .

Метод решения сформулированной задачи и более широкого класса задач о течении идеальной жидкости разработан в [1]. Он использует конформные отображения и позволяет свести задачу к вычислению квадратур. Цель данной работы — построение асимптотического разложения по параметру  $\varepsilon$ . С учетом малости  $\varepsilon$  асимптотическое решение задачи (1.1) выразим через решение более простой задачи в области  $\Omega$  с одним разрезом  $L$  (которую, в свою очередь, можно решать при помощи метода [1]). Как следствие получаются приближенные формулы для коэффициентов интенсивности, выявляющие качественную их зависимость от малого расстояния между трещинами. В случае канонических областей, когда предельная задача имеет решение в аналитической форме, полученные соотношения приобретают особенно явный вид.

**2. Асимптотика решения в узкой полоске между трещинами.** Рассмотрим уравнение (1.1) и граничные условия (1.3), (1.4) как краевую задачу в тонкой области  $\Pi_\varepsilon = \{x: 0 < x_2 < \varepsilon, a < x_1 < b\}$ . Следуя [5–7], асимптотику функции  $u$  ищем в виде суммы

$$(2.1) \quad u(\varepsilon, x) \sim \varepsilon^{-1}w_0(x_1) + w_1(x_1) + \varepsilon W_0(x_1, \varepsilon^{-1}x_2) \equiv W(\varepsilon, x)$$

Подставляя (2.1) в уравнение и последние два условия в (1.1) и приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^{-1}$  и  $\varepsilon_0$ , получаем соотношения

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2}(x_1, \eta) + \mu \frac{d^2 w_0}{dx_1^2}(x_1) &= 0, \quad \eta \in (0, 1) \\ \mu \frac{\partial W_0}{\partial \eta}(x_1, 1) &= p_M^-(x_1), \quad \mu \frac{\partial W_0}{\partial \eta}(x_1, 0) = -p_N^+(x_1); \quad \eta = \frac{x_2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Если рассматривать (2.2) как краевую задачу (с параметром  $x_1 \in (a, b)$ ) относительно функции  $W_0$ , то условием ее разрешимости служит равенство

$$(2.3) \quad \mu \frac{d^2 w_0}{dx_1^2}(x_1) = -p_M^-(x_1) - p_N^+(x_1), \quad x_1 \in (a, b)$$

которое следует считать уравнением для неизвестной функции  $w_0$ . Необходимые краевые условия для (2.3) будут определены в п. 5 при изучении пограничных слоев вблизи точек  $(a, \varepsilon)$  и  $(b, \varepsilon)$ .

Уравнение для функции  $w_1$  в (2.1) имеет тот же вид, что и (2.3), и отыскивается при помощи тех же соображений (см., например, § 5 [7]). Однако при построении главного члена асимптотики  $u$  функция  $w_1$  не понадобится. Отметим лишь, что упомянутое уравнение имеет нулевую правую часть, т. е.  $w_1$  — линейная функция.

**3. Асимптотика решения вдали от  $\Pi_\varepsilon$ .** Если положить  $\varepsilon = 0$ , то область  $\Omega_\varepsilon$  трансформируется в область  $\Omega_0$  с единственной трещиной  $L$ . При этом краевая задача (1.1) переходит в следующую:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mu \Delta v_0(x) &= 0, \quad x \in \Omega_0; \quad \mu \frac{\partial v_0}{\partial n}(x) = q(x), \quad x \in \partial\Omega \\ \mu \frac{\partial v_0}{\partial x_2}(x_1, +0) &= -p_N^+(x_1), \quad x_1 \in (1, a) \cup (b, 1) \\ \mu \frac{\partial v_0}{\partial x_2}(x_1, +0) &= -p_M^+(x_1), \quad x_1 \in (a, b); \\ \mu \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(x_1, -0) &= p_N^-(x_1), \quad x_1 \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Задача (3.1) может не иметь ограниченного решения, так как в силу (1.2)

$$(3.2) \quad \mu \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial v_0}{\partial n}(x) ds = -I, \quad I = \int_a^b (p_N^+(x_1) + p_M^-(x_1)) dx_1$$

Поэтому необходимо расширить класс функций, допустимых в качестве решений. Именно, выделим точки  $(a, +0)$  и  $(b, +0)$ , которые являются образами вершин трещины  $M_\varepsilon$ , и позволим функции  $u$  иметь в этих точках логарифмические особенности. Тогда краевая задача станет разрешимой, однако ее решение будет определяться с точностью до линейной комбинации двух функций, удовлетворяющих однородной задаче. Первая из них тождественно равна единице, а вторая совпадает с функцией Неймана  $G$ , полюсы которой расположены в точках  $(a, +0)$  и  $(b, +0)$ . Напомним, что функция  $G$  удовлетворяет соотношениям

$$(3.3) \quad \Delta G(x) = 0, \quad x \in \Omega_0; \quad \frac{\partial G}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_0$$

$$(3.4) \quad G(x) = -\pi^{-1} \ln r_b + G_b + O(r_b), \quad x_2 > 0, \quad r_b \rightarrow 0$$

$$(3.5) \quad G(x) = \pi^{-1} \ln r_a + G_a + O(r_a), \quad x_2 > 0, \quad r_a \rightarrow 0$$

где  $G_a$  и  $G_b$  — некоторые постоянные.

Итак, в качестве асимптотики функции  $u$  (в качестве решения задачи (3.1)) выберем линейную комбинацию

$$(3.6) \quad u(\varepsilon, x) \sim c_v + V_0(x) + A_0(\varepsilon)G(x) \equiv V(\varepsilon, x)$$

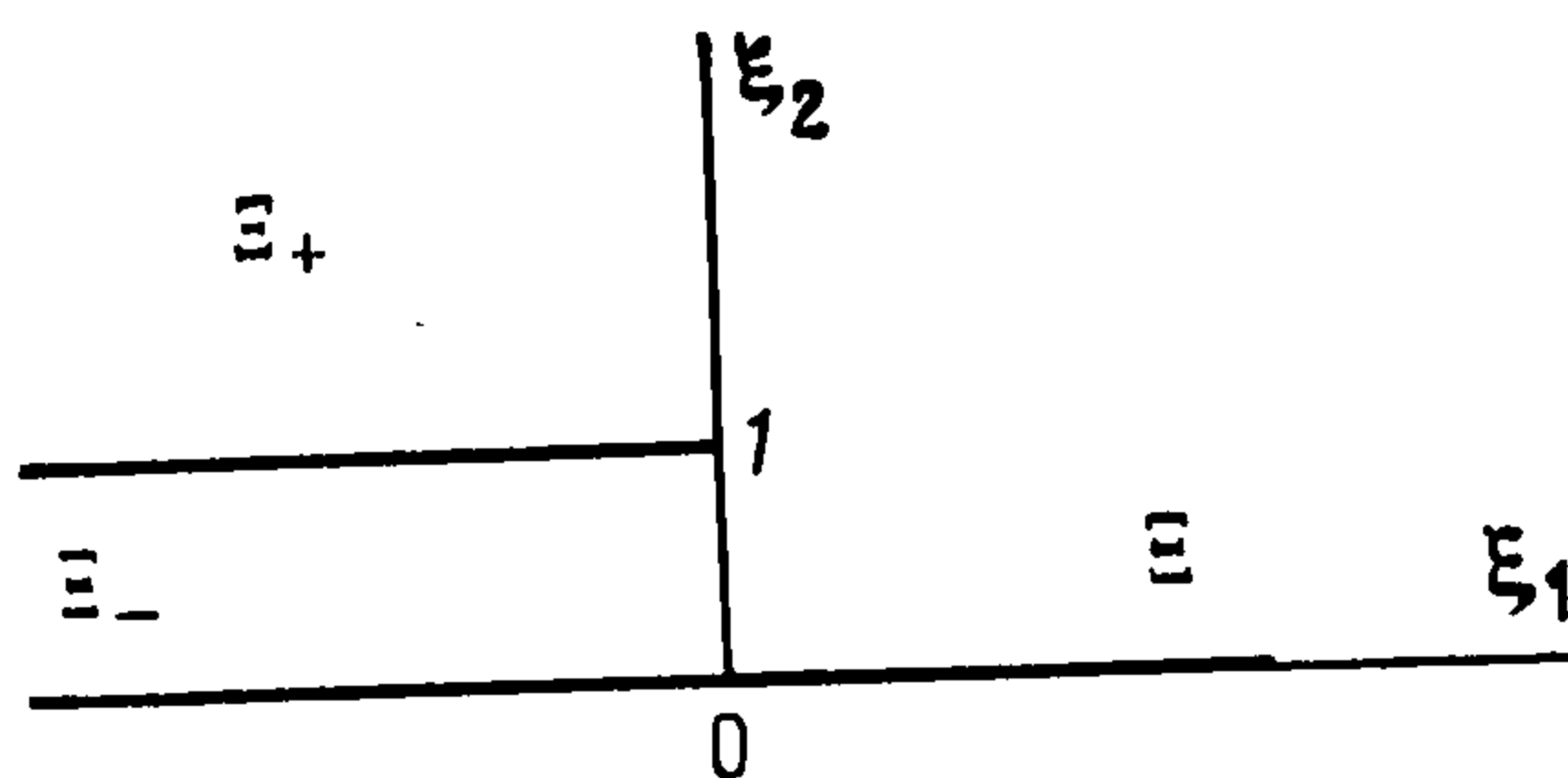
где  $c_v$  — произвольная постоянная (жесткое смещение), величина  $A_0(\varepsilon)$  подлежит определению, а  $V_0$  — ограниченная вне любой окрестности точки  $(b, 0)$  функция, удовлетворяющая уравнениям (3.1) и подчиненная соотношению

$$(3.7) \quad V_0(x) = \pi^{-1} \mu^{-1} \ln r_b + V_b^0 + O(r_b |\ln r_b|), \quad x_2 > 0, \quad r_b \rightarrow 0$$

**4. Пограничные слои вблизи вершин трещины  $M_\varepsilon$ .** В пп. 2 и 3 была найдена формальная асимптотика функции  $u$  в  $\Pi_\varepsilon$  и вне  $\Pi_\varepsilon$ . Для того чтобы срастить построенные представления, а следовательно, и устранить произвол в выборе некоторых постоянных, изучим поведение решения задачи (1.1) в окрестностях точек  $(a, \varepsilon)$  и  $(b, \varepsilon)$ . Как обычно, в этих зонах возникает пограничный слой. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть лишь одну из вершин трещины  $M_\varepsilon$ , для определенности, точку  $(b, \varepsilon)$ . Сделаем замену координат:  $x \rightarrow \xi = \varepsilon^{-1}(x_1 - b, x_2)$  — растяжение в  $\varepsilon^{-1}$  раз области  $\Omega_\varepsilon$  относительно указанной точки. Переходя к  $\varepsilon = 0$  и ограничиваясь рассмотрением уравнений при  $\xi_2 \geq 0$ , получаем краевую задачу

$$(4.1) \quad \mu \Delta z(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi; \quad \mu \frac{\partial z}{\partial \xi_2}(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi$$

где  $\Xi = \mathbb{R}_+^2 \setminus \{\xi \in \mathbb{R}^2: \xi_2 = 1, \xi_1 < 0\}$  — верхняя полуплоскость с вырезанным лучом (фиг. 2).



Фиг. 2

Область  $\Xi$  имеет два «выхода» на бесконечность: в виде угла  $\Xi_+$  и полуполосы  $\Xi_-$ . Перечислим решения задачи (4.1), имеющие не более чем полиномиальный рост в  $\Xi_-$  и допускающие оценки  $O(|\ln \|\xi\|^m)$  в  $\Xi_+$ . Одно такое решение  $\zeta_0$  очевидно:  $\zeta_0(\xi) = 1$ . Из результатов [8, 9] выте-

кает, что всякое решение  $\zeta_1$ , обладающее указанными свойствами, допускает представления

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \zeta_1(\xi) &= c_1 \xi_1 + c_2 + O(\exp(\pi \xi_1)) \text{ при } \xi_1 \rightarrow -\infty \text{ в } \Xi_- \\ \zeta_1(\xi) &= c_3 \ln |\xi| + c_4 + O(|\xi|^{-1} |\ln |\xi||) \text{ при } |\xi| \rightarrow \\ &\rightarrow \infty \text{ в } \Xi_+ \end{aligned}$$

где  $c_j$  — некоторые постоянные. Подставим функции  $\zeta_1$  и  $\zeta_0$  в формулу Грина для области  $\Xi_R = \{\xi \in \Xi: |\xi| < R \text{ при } \xi \in \Xi_+ \text{ и } \xi_1 > -R \text{ при } \xi \in \Xi_-\}$ , где  $R$  — большое положительное число. Имеем

$$(4.3) \quad \begin{aligned} 0 &= \int_{\Xi_R} (\zeta_1(\xi) \Delta \zeta_0(\xi) - \zeta_0(\xi) \Delta \zeta_1(\xi)) d\xi = \\ &= \int_{\partial \Xi_R} \left( \zeta_1(\xi) \frac{\partial \zeta_0}{\partial n}(\xi) - \zeta_0(\xi) \frac{\partial \zeta_1}{\partial n}(\xi) \right) dl \end{aligned}$$

где  $dl$  — элемент длины дуги. В последнем интеграле из (4.3) подынтегральная функция отлична от нуля лишь для интеграла  $I_+$  по дуге  $\{\pi - \arcsin(R^{-1}) > \theta > 0, |\xi| = R\}$  и для интеграла  $I_-$  — по отрезку  $\{\xi_1 = -R, 0 < \xi_2 < 1\}$ . Используя формулы (4.2), находим, что

$$(4.4) \quad \begin{aligned} I_+ &= - \int_0^{\pi - \arcsin(R^{-1})} (c_3 + O(R^{-1} \ln R)) d\theta = -\pi c_3 + O(R^{-1} \ln R) \\ I_- &= \int_0^1 (c_1 + O(\exp(-\pi R))) d\xi_2 = c_1 + O(\exp(-\pi R)) \end{aligned}$$

Таким образом, переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , с учетом (4.4) из (4.3) выводим равенство  $c_1 = \pi c_3$ .

Остается лишь отметить следующее. Если предположить, что решение  $z$  задачи (4.1) имеет асимптотику (4.2) при  $c_1 = c_3 = 0$ , то из формулы Грина вида (4.3) для  $\zeta_1$  и  $z$  вытекает, что  $c_2 = c_4$ . Кроме того, исчезающее на бесконечности решение, которое отвечает нулевым постоянным  $c_j$  в (4.2), обладает конечным интегралом Дирихле и, следовательно, тривиально.

Итак, все отыскиваемые линейно независимые решения задачи (4.1), имеющие указанный рост на бесконечности, исчерпываются двумя:  $\zeta_0$  и  $\zeta_1$ . Функция  $\zeta_1$  определяется при помощи конформного отображения полуплоскости на область  $\Xi$ :

$$(4.5) \quad \eta_1 + i\eta_2 \rightarrow \xi_1 + i\xi_2 = \pi^{-1} (e^{-1} (\eta_1 + i\eta_2) + \ln (\eta_1 + i\eta_2))$$

Именно, если  $\gamma: \xi_1 + i\xi_2 \rightarrow \eta_1 + i\eta_2$  — функция, обратная к (4.5), то  $\zeta_1$  задается равенством [10]

$$(4.6) \quad \zeta_1(\xi) = \ln |\gamma(\xi_1 + i\xi_2)|$$

Непосредственные вычисления приводят к следующим значениям постоянных  $c_j$  в асимптотиках (4.2) функции (4.6):

$$(4.7) \quad c_1 = \pi, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 1 + \ln \pi$$

Далее понадобится представление типа (1.3) функции  $\zeta_1$  вблизи вершины разреза

$$(4.8) \quad \zeta_1(\xi) = 1 + (2\pi\rho)^{1/2} \sin^{1/2} \varphi + O(\rho)$$

где  $\rho, \varphi$  — полярные координаты с центром  $(0, 1)$ , такие, что берега разреза задаются равенствами  $\varphi = \pm\pi$ ; при этом  $\varphi = \theta + O(\varepsilon)$ ,  $\rho = \varepsilon^{-1} (r + O(\varepsilon))$  (см. (1.3)).

Отметим, наконец, что, допустив линейный рост функции  $z$  в угле  $\Xi_+$ , получим в дополнение к  $\zeta_0$  и  $\zeta_1$  еще одно решение  $\zeta_2(\xi) = \xi_1$  однородной краевой задачи (4.1).

**5. Сращивание асимптотик при помощи пограничных слоев.** Будем искать приближение к решению  $u$  задачи (1.1) в малых окрестностях точек  $(a, \varepsilon)$  и  $(b, \varepsilon)$  в виде

$$(5.1) \quad u(\varepsilon, x) \sim c_a(\varepsilon) + B_a(\varepsilon) \zeta_1(\varepsilon^{-1}(a - x_1), \varepsilon^{-1}x_2) \equiv Z_a(\varepsilon, x)$$

$$(5.2) \quad u(\varepsilon, x) \sim c_b(\varepsilon) + B_b(\varepsilon) \zeta_1(\varepsilon^{-1}(x_1 - b), \varepsilon^{-1}x_2) \equiv Z_b(\varepsilon, x)$$

Как указывалось ранее, роль погранслоев (5.1) и (5.2) заключается в сращивании построенных приближений к  $u$ . Воспользовавшись методом сращиваемых асимптотических разложений ([11—13] и др.), найдем величины  $c_a(\varepsilon)$ ,  $c_b(\varepsilon)$ ,  $B_a(\varepsilon)$ ,  $B_b(\varepsilon)$  и  $A_0(\varepsilon)$  в (5.1), (5.2) и (3.6) из условия совпадения асимптотических разложений (2.1) и (3.6) в общих промежуточных зонах.

Если точка  $x$  такова, что  $0 < x_2 < \varepsilon$ ,  $x_1 \sim b - \sqrt{\varepsilon}$ , то

$$W(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-1}w_0(0) + w_1(0) + \frac{x_1 - b}{\varepsilon} \frac{dw_0}{dx_1}(b) + \\ + \frac{(x_1 - b)^2}{2\varepsilon} \frac{d^2w_0}{dx_1^2}(b) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

или в координатах  $\xi$  (см. п. 4)

$$(5.3) \quad W(\varepsilon, (b, 0) + \varepsilon\xi) = \varepsilon^{-1}w_0(0) + w_1(0) + \xi_1 \frac{dw_0}{dx_1}(b) + \\ + \frac{\varepsilon\xi_1^2}{2} \frac{d^2w_0}{dx_1^2}(b) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

Используя формулы (4.2) и (4.7), находим, что

$$(5.4) \quad Z_b(\varepsilon, x) \sim c_b(\varepsilon) + B_b(\varepsilon) \pi\xi_1 + O(\exp(\pi\xi_1))$$

Сравнивая (5.3) и (5.4), выводим равенства

$$(5.5) \quad c_b(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}w_0(0) + w_1(0), \quad B_b(\varepsilon) \equiv B_b = \pi^{-1} \frac{dw_0}{dx_1}(b)$$

Если  $x_2 > \varepsilon$  и  $r_b \sim \sqrt{\varepsilon}$ , то согласно (3.4)—(3.7) имеем

$$(5.6) \quad V(\varepsilon, x) = c_v + \pi^{-1} I\mu^{-1} \ln r_b + V_b^0 + \\ + A_0(\varepsilon) (-\pi^{-1} \ln r_b + G_b) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

Кроме того, в той же зоне из (4.2), (4.7) следует формула

$$(5.7) \quad Z_b(\varepsilon, x) = c_b(\varepsilon) + B_b(\ln(r_b\varepsilon^{-1}) + \ln \pi + 1) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

Из предположения о совпадении асимптотик (5.6) и (5.7) вытекают равенства

$$(5.8) \quad \mu^{-1}I - A_0(\varepsilon) = \pi B_b, \quad c_v + V_b^0 + A_0(\varepsilon) G_b = \\ = c_b(\varepsilon) + B_b(\ln(\varepsilon^{-1}\pi) + 1)$$

Точно так же при рассмотрении пограничного слоя  $Z_a$  выводятся соотношения

$$(5.9) \quad c_a(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}w_0(a) + w_1(a), \quad B_a(\varepsilon) \equiv B_a = -\pi^{-1} \frac{dw_0}{dx_1}(a) \\ A_0(\varepsilon) = \pi B_a, \quad c_v + V_a^0 + A_0(\varepsilon) G_a = c_a(\varepsilon) + B_a(\ln(\varepsilon^{-1}\pi) + 1)$$

Решая систему алгебраических уравнений (5.5), (5.8), (5.9), находим недостающие граничные условия для функции  $w_0$ , удовлетворяющей (2.3)

$$(5.10) \quad w_0(b) - w_0(a) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx_1}(b) - \frac{dw_0}{dx_1}(a) = I\mu^{-1}$$

выражения для неизвестных постоянных

$$(5.11) \quad A_0(\varepsilon) \equiv A_0 = -\frac{1}{\pi} \frac{dw_0}{dx_1}(a), \quad B_a = -\frac{1}{\pi} \frac{dw_0}{dx_1}(a), \quad B_b = \frac{1}{\pi} \frac{dw_0}{dx_1}(b)$$

а также одно из граничных условий для функции  $w_1$

$$w_1(b) - w_1(a) = V_b^0 - V_a^0 - \frac{1}{\pi} \frac{dw_0}{dx_1}(a) (G_b - G_a) + \\ + \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{\varepsilon}\right) \left(\frac{dw_0}{dx_1}(b) + \frac{dw_0}{dx_1}(a)\right)$$

Второе граничное условие и, как отмечалось ранее, уравнение для  $w_1$  определяются при построении следующих членов асимптотики.

Отметим, что задача (2.3), (5.10) разрешима (согласно определению (3.2) величины  $I$  и предположению (1.2) о самоуравновешенности нагрузки).

6. Обоснование асимптотического разложения. Предположим, что решения  $u$ ,  $V$  и  $G$  задач (1.1), (3.1), (3.7) и (3.3) — (3.5) нормированы условиями

$$(6.1) \quad \int_{\partial\Omega} u(\varepsilon, x) dx = \int_{\partial\Omega} V(\varepsilon, x) dx = \int_{\partial\Omega} G(x) dx = 0$$

Пусть  $\chi$  — срезающая функция из  $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ , такая, что  $\chi(t) = 0$  при  $|t| \geq 1$  и  $\chi(t) = 1$  при  $|t| < 1/2$ , а  $\chi(\varepsilon, x) = (1 - \chi(r_a \varepsilon^{-1/2})) (1 - \chi(r_b \varepsilon^{-1/2}))$ . Введем функцию

$$(6.2) \quad U(\varepsilon, x) = V(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad x_2 < 0 \\ U(\varepsilon, x) = \chi(\varepsilon, x) V(\varepsilon, x) + \chi(r_a \varepsilon^{-1/2}) Z_a(\varepsilon, x) + \\ + \chi(r_b \varepsilon^{-1/2}) Z_b(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus \bar{\Pi}_\varepsilon, \quad x_2 > 0 \\ U(\varepsilon, x) = (1 - \chi((x_1 - a) \varepsilon^{-1/2})) (1 - \chi((x_1 - b) \varepsilon^{-1/2})) W(\varepsilon, x) + \\ + \chi((x_1 - a) \varepsilon^{-1/2}) Z_a(\varepsilon, x) + \chi((x_1 - b) \varepsilon^{-1/2}) Z_b(\varepsilon, x), \quad x \in \Pi_\varepsilon$$

(см. (2.1), (3.6), (5.1), (5.2)). Ясно, что  $U$  удовлетворяет граничным условиям из (1.1) на  $N$ ,  $M_\varepsilon^-$  и  $\partial\Omega$ , но оставляет невязку  $\Phi(\varepsilon, x_1)$  на  $M_\varepsilon^+$ , которая допускает оценку

$$(6.3) \quad |\Phi(\varepsilon, x_1)| \leq c_1 \varepsilon [(x_1 - a + \varepsilon)(b - x_1 + \varepsilon)]^{1/2}$$

Так как функции  $V_0$ ,  $Z_a$  и  $Z_b$  гармонические, то невязка  $\Psi(\varepsilon, x)$  приближения  $U$  в уравнении (1.1) сосредоточена в объединении  $\Pi_\varepsilon^-$  и  $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестностей точек  $(b, +0)$  и  $(a, +0)$ . В силу совпадения асимптотик  $V$  и  $Z$ ,  $W$  и  $Z$  вблизи этих точек справедливы соотношения

$$(6.4) \quad |\Psi(\varepsilon, x)| \leq c_2 (r_a + \varepsilon)^{-1}, \quad r_a < \sqrt{\varepsilon}, \quad x \in \Pi_\varepsilon \\ |\Psi(\varepsilon, x)| \leq c_3 (r_b + \varepsilon)^{-1}, \quad r_b < \sqrt{\varepsilon}, \quad x \in \Pi_\varepsilon \\ |\Psi(\varepsilon, x)| \leq c_4 \varepsilon (\varepsilon + (x_1 - a)(b - x_1))^{-1}, \quad x \in \Pi_\varepsilon$$

Из одномерного неравенства Харди и неравенства Пуанкаре — Фридрихса (согласно (6.1)) вытекает оценка

$$(6.5) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} \{|\nabla u - \nabla U|^2 + d^2 |u - U|^2\} dx \leq c_5 \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} d^{-2} \Psi^2 dx + \int_{M_\varepsilon^+} \Phi^2 dx_1 \right\} \\ d(x) = r_a^{-1} (|\ln r_a| + 1)^{-1} + r_b^{-1} (|\ln r_b| + 1)^{-1}$$

В силу (6.3), (6.4) интеграл по  $\Omega_\varepsilon$  из правой части (6.5) не превосходит  $c_6 \varepsilon |\ln \varepsilon|^2$ , а интеграл по  $M_\varepsilon^+$  не превосходит  $c_7 \varepsilon$ . Поэтому

$$(6.6) \quad \|u - U; W_2^1(\Omega_\varepsilon)\| \leq c_8 \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|$$

Для упрощения изложения здесь ограничились выводом лишь грубой оценки близости построенного приближения (6.2) к решению задачи (1.1). Неравенство (6.6) можно уточнить используя методику [14]. В частности, верны соотношения

$$(6.7) \quad u(\varepsilon, x) = V(\varepsilon, x) + O(\varepsilon |\ln \varepsilon|) \text{ в } \Omega_\varepsilon \setminus \Pi_\varepsilon \setminus D_\delta \\ u(\varepsilon, x) = Z(\varepsilon, x) + O(\varepsilon |\ln \varepsilon|) \text{ в } D_\varepsilon; D_\delta = \{x \in \Omega_\varepsilon : \min\{r_a, r_b\} < \delta\}$$

где  $\delta$  — фиксированное положительное число. Отметим, что к левой и правой частям формул (6.7) можно применить оператор  $\min\{\varepsilon, r_a, r_b\} \partial/\partial x_j$  без ухудшения оценки остатка.

7. Асимптотика коэффициентов интенсивности. Следствием представлений (6.7) решения задачи (1.1) являются асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин  $M_\varepsilon$  и  $N$  (см. (1.3)). Введем коэффициенты  $k_V^\pm$  и  $k_G^\pm$  в разложениях

$$(7.1) \quad V_0(x) = \text{const}_\pm + \mu^{-1} k_V^\pm \left( \frac{1}{2} \frac{r_\pm}{\pi} \right)^{1/2} \sin^{1/2} \theta_\pm + O(r_\pm |\ln r_\pm|)$$

$$(7.2) \quad G(x) = \text{const}^\pm + \mu^{-1} k_G^\pm \left( \frac{1}{2} \frac{r_\pm}{\pi} \right)^{1/2} \sin^{1/2} \theta_\pm + O(r_\pm) \quad \text{при } r_\pm \rightarrow 0$$

гармонических функций  $V_0$  и  $G$  (см. (3.7) и (3.3)–(3.5)). Здесь  $r_\pm, \theta_\pm$  — полярные координаты с центрами  $(\pm 1, 0)$ , такие, что берега  $N^\pm$  разреза  $N$  задаются равенствами  $\theta_\pm = \pi$  и  $\theta_\pm = -\pi$ .

Сравнивая формулы (1.3), (3.6), (7.1), (7.2) и (5.11), находим, что

$$(7.3) \quad K_\pm(\varepsilon) = k_V^\pm - \pi^{-1} \frac{dw_0}{dx_1}(a) k_G^\pm + O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$$

Аналогично, из (5.1), (5.2) и (4.8) выводим соотношения

$$(7.4) \quad K_a(\varepsilon) = 2\mu\varepsilon^{-1/2} \frac{dw_0}{dx_1}(a) + O(\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|)$$

$$K_b(\varepsilon) = -2\mu\varepsilon^{-1/2} \frac{dw_0}{dx_1}(b) + O(\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|)$$

В асимптотических формулах (7.3), (7.4) содержится решение  $w_0$  обыкновенного дифференциального уравнения (2.3), (5.10). Если  $w_0 = \text{const}$ , то представления (7.4) становятся малосодержательными. Последнее имеет место, например, если берега трещин свободны от напряжений, т. е. в (1.1)  $p_M^\pm = p_N^\pm = 0$ . Рассмотрим указанную ситуацию, построив второй член асимптотики (ее оправдание проводится так же, как и в п. 6, и здесь опускается).

Вдали от  $\Pi_\varepsilon$  асимптотику  $u$  ищем в виде

$$(7.5) \quad u(\varepsilon, x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon A_1 G(x)$$

где  $A_1$  — некоторая постоянная; функция  $v_0$  удовлетворяет соотношениям (3.1) и граничному условию

$$(7.6) \quad \mu \frac{\partial v_0}{\partial x_2}(x) = 0, \quad x \in N^\pm$$

$v_1$  — решение краевой задачи

$$(7.7) \quad \Delta v_1(x) = 0, \quad x \in \Omega_0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$(7.8) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, +0) = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, +0), \quad x_1 \in (a, b)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) = 0, \quad x \in N^- \cup (N^+ \setminus M_0^+)$$

Поясним причины такого выбора правых частей граничных условий (7.8). Раскладывая функцию справа в (7.5) в ряд Маклорена, находим, что при  $x \in M_\varepsilon^+$  (или  $x_1 \in (a, b), x_2 = \varepsilon + 0$ )

$$(7.9) \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(\varepsilon, x_1, \varepsilon + 0) \sim \frac{\partial v_0}{\partial x_2}(x_1, +0) + \varepsilon \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, +0) + \right. \\ \left. + A_1 \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, +0) + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, +0) \right) + O(\varepsilon^2)$$

Поскольку  $v_0$  и  $G$  удовлетворяют однородным условиям Неймана на  $N^+$ , то коэффициент при  $\varepsilon$  из (7.9) обращается в нуль, если

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, +0) \equiv -\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, +0) = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, +0) - \Delta v_0(x_1, +0) = \\ = \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, +0)$$

Согласно п. 3, существует ограниченное вне любой окрестности точки  $(b, +0)$  решение задачи (7.7), (7.8), допускающее представление (ср. с формулой (3.8))

$$(7.10) \quad v_1(x) = \pi^{-1} I_1 \ln r_b + V_b^1 + O(r_b |\ln r_b|) \text{ при } r_b \rightarrow 0, x_2 > 0$$

$$(7.11) \quad I_1 = - \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) ds = - \int_a^b \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, +0) dx_1 = \\ = \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(a, +0) - \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(b, +0)$$

Внутри  $\Pi_\varepsilon$  решение  $u(\varepsilon, x)$  приближается величиной  $w_1(x_1)$ , которая является линейной функцией  $\alpha x_1 + \beta$  (см. п. 2). Пограничные слои (5.1) и (5.2) имеют вид

$$(7.12) \quad Z_a(\varepsilon, x) = c_a^0 + \varepsilon \left( c_a^1 + B_a \zeta_1 \left( \frac{a-x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + D_a \zeta_2 \left( \frac{a-x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right)$$

$$(7.13) \quad Z_b(\varepsilon, x) = c_b^0 + \varepsilon \left( c_b^1 + B_b \zeta_1 \left( \frac{x_1-b}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + D_b \zeta_2 \left( \frac{x_1-b}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right)$$

Осуществляя сращивание, получим, как и в п. 5, алгебраические уравнения

$$(7.14) \quad \alpha b + \beta = v_0(b, +0), \quad \alpha a + \beta = v_0(a, +0), \quad \pi B_b = I_1 - A_1 \\ \pi B_a = A_1, \quad \alpha = \pi B_b + D_b = -\pi B_a - D_a, \quad D_b = \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(b, +0), \\ D_a = -\frac{\partial v_0}{\partial x_1}(a, +0)$$

Решая переопределенную, но разрешимую в силу (7.11) систему (7.14), находим, что

$$(7.15) \quad A_1 = \pi B_a = I_1 - \pi B_b, \quad \alpha = (v_0(b, +0) - v_0(a, +0)) (b-a)^{-1} \\ B_b = \frac{1}{\pi} \left( \alpha - \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(b, +0) \right), \quad B_a = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(a, +0) - \alpha \right)$$

Таким образом, из (7.5), (7.12), (7.13) и (7.15) вытекают следующие асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности в решении задачи (1.1) при  $p_M^\pm = p_N^\pm = 0$ :

$$(7.16) \quad K_\pm(\varepsilon) = k_V^\pm + \varepsilon \left\{ k_{1,v}^\pm + k_G^\pm \left( \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(a, +0) - \frac{v_0(b, +0) - v_0(a, +0)}{b-a} \right) \right\} + O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$$

$$(7.17) \quad K_b(\varepsilon) = 2\mu \sqrt{\varepsilon} \left\{ \frac{v_0(b, +0) - v_0(a, +0)}{b-a} - \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(b, +0) \right\} + O(\varepsilon^{3/2} |\ln \varepsilon|)$$

где  $k_{1,v}^\pm$  — коэффициенты в представлении типа (7.1), (7.2) решения  $v_1$  задачи (7.7), (7.8). (Отметим, что асимптотика  $K_a(\varepsilon)$  имеет вид (7.17), где следует взять противоположный знак и поменять  $a$  и  $b$  местами.)

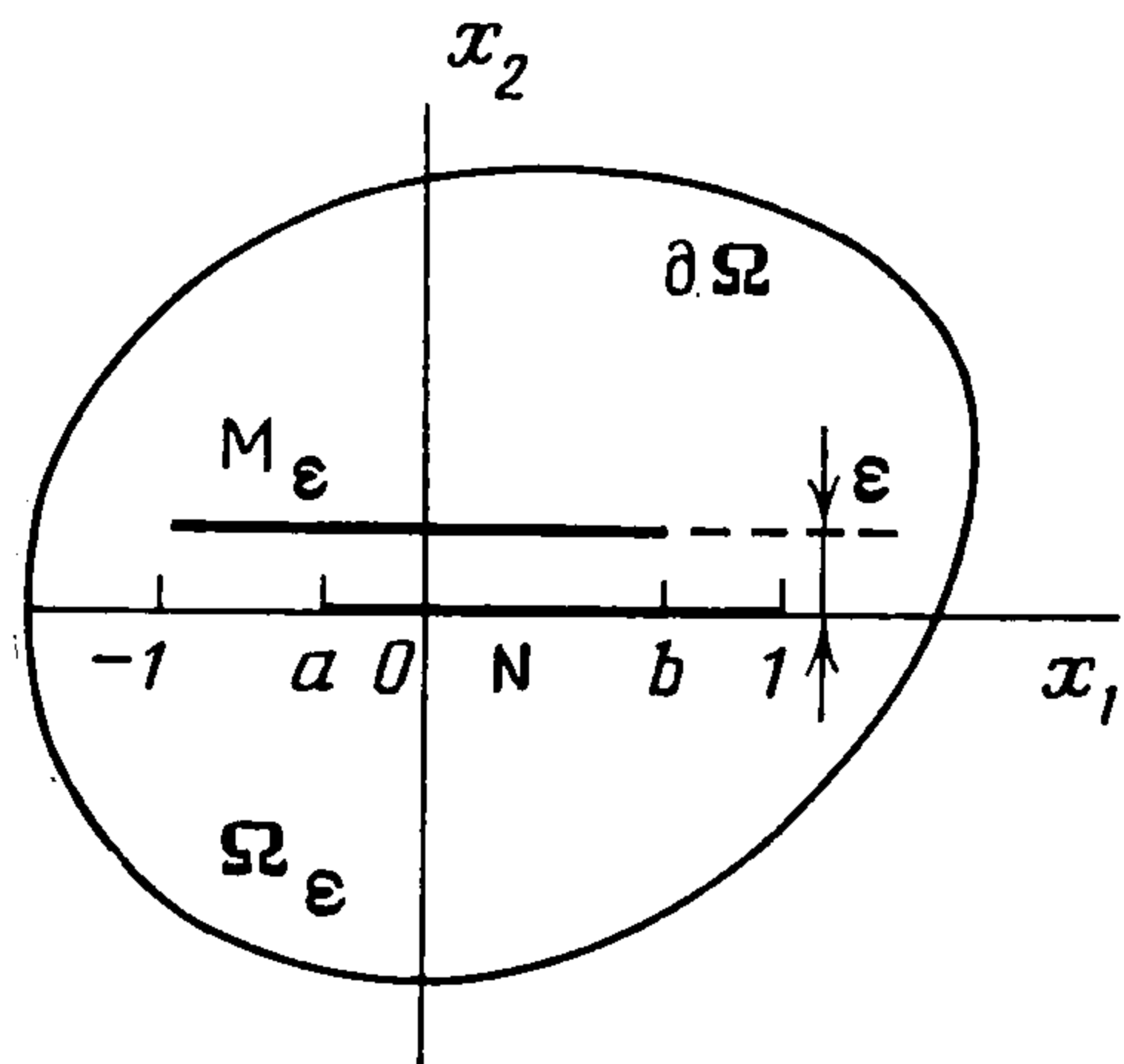
В случае  $\Omega = \mathbf{R}^2$  формулы (7.16) и (7.17) принимают более конкретный вид. В частности, для гармонической в  $\Omega_\varepsilon = \mathbf{R}^2 \setminus (N \cup M_\varepsilon)$  функции  $u$ , подчиненной соотношениям

$$(7.18) \quad \mu \frac{\partial u}{\partial n}(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in N \cup M_\varepsilon; \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x_2}(\varepsilon, x) = q_0 + o(1) \text{ при } |x| \rightarrow +\infty$$

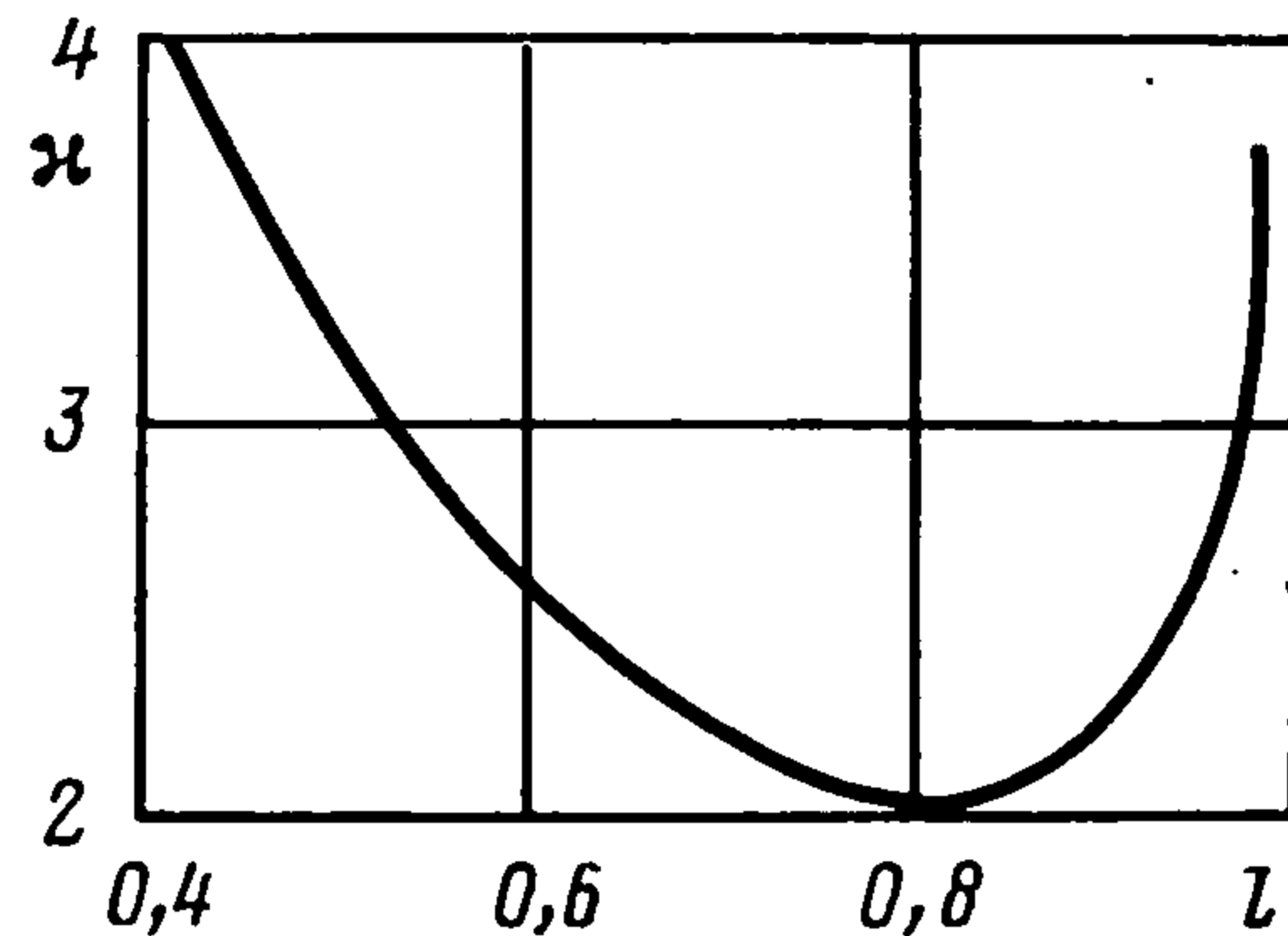
коэффициенты интенсивности вычисляются по формулам

$$(7.19) \quad K_+(\varepsilon) = 2q_0 \sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \ln \frac{(1+b)(1-a)}{(1+a)(1-b)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{b-a}{(1-a)(1-b)} + \sqrt{\frac{1+b}{1-b}} \left( \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \sqrt{\frac{1+b}{1-b}} - \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \right) \left( \frac{a+b}{\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}} - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] \right\} + O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|) \\ K_b(\varepsilon) = 2q_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \frac{b-a}{1-ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}} + O(\varepsilon^{3/2} |\ln \varepsilon|)$$

8. Смещенные одна относительно другой трещины. Исследуем отличное от изученного в пп. 1—7 расположение трещин. Сохраним за  $a$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$  и  $\Omega$  те же обозначения, что и в п. 1. Положим  $M_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2: x_2 = \varepsilon, -1 \leq x_1 \leq b\}$ ,  $N_1 = \{x \in \mathbb{R}^2: x_2 = 0, a \leq x_1 \leq 1\}$ ,  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus N_1 \setminus M_\varepsilon$  (фиг. 3). Рассмотрим уравнения (1.1) с нулевыми данными Неймана на  $N_1 \cup M_\varepsilon$ . Асимптотика решения строится по той же схеме, что и ранее. Единственное отличие заключается в определении функции  $v_1$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

В рассматриваемом случае невязка  $\partial^2 v_0 / \partial x_1^2$  возникает на множестве  $M_\varepsilon^+ \cup \{x \in M_\varepsilon^-: -1 \leq x_1 \leq a\}$ , поэтому правые части краевых условий типа (7.8) имеют недопустимый рост  $O(r_-^{-3/2})$  при  $r_- \rightarrow 0$ . Причина такого роста заключается в том, что образ  $(-1, 0)$  левой вершины трещины  $M_\varepsilon$  в предельной задаче смещен относительно первоначального положения и функция  $v_0$  не удовлетворяет граничным условиям вблизи  $(-1, 0)$ . Поэтому необходимо изменить вид основного приближения к  $u$ , выбрав в качестве него функцию

$$(8.1) \quad v^*(\varepsilon, x) = X_\delta(x) v_0(x_1, x_2 + \varepsilon) + (1 - X_\delta(x)) v_0(x) \\ X_\delta(x) = \chi(\delta^{-1}(x_1 + 1)) \chi(\delta^{-1}x_2)$$

где  $\chi$  — срезка из п. 6,  $\delta$  — столь малое число, что носитель  $X_\delta$  не пересекается ни с  $\partial\Omega$ , ни с  $N_1$ . Отметим, что вне окрестности точки  $(-1, \varepsilon)$  функция (8.1) раскладывается в ряд по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$ ; это разложение получается после применения формулы Тейлора к первому слагаемому справа в (8.1).

Главный член невязки  $v^*$  в граничном условии (1.1) имеет вид  $\varepsilon \mu \varphi_1^\pm$ , где

$$\varphi_1^+(x_1) = \chi(\delta^{-1}(x_1 + 1)) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, +0), \quad x_1 \in (-1, b) \\ \varphi_1^+(x_1) = 0, \quad x_1 \in (b, 1); \quad \varphi_1^-(x_1) = 0, \quad x_1 \in (a, 1) \\ \varphi_1^-(x_1) = \chi(\delta^{-1}(x_1 + 1)) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x_1, -0), \quad x_1 \in (-1, a)$$

Кроме того, появляется невязка в уравнении (1.1), главный член которой совпадает с величиной  $\varepsilon \mu \psi_1(x)$ , где

$$\psi_1(x) = -\frac{\partial v_0}{\partial x_2}(x) \Delta X_\delta(x) - 2\nabla \frac{\partial v_0}{\partial x_2}(x) \cdot \nabla X_\delta(x)$$

Так как  $v_0$  — гармоническая функция, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \psi_1(x) dx &= \int_{\Omega_0} \left( \frac{\partial X_\delta}{\partial x_2}(x) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}(x) - \frac{\partial X_\delta}{\partial x_1}(x) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \right) dx = \\ &= \sum_{\pm} \mp \int_{-1}^a \frac{\partial \chi}{\partial x_1}(\delta^{-1}(x_1 + 1)) \frac{\partial v_0}{\partial x_1}(x_1, \pm 0) dx_1 \end{aligned}$$

и поэтому существует решение  $v_1$  краевой задачи

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \Delta v_1(x) &= \psi_1(x), \quad x \in \Omega_0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) &= \pm \varphi_1^\pm(x_1), \quad x \in N^\pm; \quad \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

которое допускает представление (7.10), (7.11), где  $(a, +0)$  следует заметить на  $(a, -0)$ .

Остальные рассуждения при построении асимптотики в точности такие же, как и в п. 7. В результате для коэффициентов интенсивности получаем асимптотические формулы (7.16), (7.17), в которых  $(a, +0)$  необходимо заменить на  $(a, -0)$ ; под  $k_{1,v}^\pm$  следует понимать коэффициенты в асимптотиках решения задачи (8.2), а под  $k_G^\pm$  — коэффициенты в разложениях (7.2) функции Неймана с полюсами  $(a, -0)$  и  $(b, +0)$  (ср. с (3.4), (3.5)). В случае задачи (1.1), (7.18) на плоскости формулы (7.19) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} K_+(\varepsilon) &= 2q_0 \sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \ln \frac{(1+b)(1-a)}{(1+a)(1-b)} + \frac{a+3b-4ab}{2(1-a)(1-b)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \sqrt{\frac{1+b}{1-b}} + \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \right) \frac{\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}}{b-a} \right] \right\} + O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|) \\ K_b(\varepsilon) &= 2q_0 \sqrt{\varepsilon} \left\{ \frac{1-ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{(b-a)\sqrt{1-b^2}} \right\} + O(\varepsilon^{3/2} |\ln \varepsilon|) \end{aligned}$$

Сформулируем, наконец, еще один результат. Рассмотрим расположение трещин, изображенное на фиг. 3, в случае, когда трещины имеют одинаковую единичную длину, а размеры прямоугольника  $P_\varepsilon$ , заключенного между трещинами, равны  $l \times \varepsilon$ ;  $l \in (0, 1)$ . Для коэффициента интенсивности  $K(\varepsilon, l)$  в правой вершине верхней трещины  $M_\varepsilon$  для задачи (1.1), (7.18) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} K(\varepsilon, l) &= 2q_0 \sqrt{\varepsilon} \kappa(l) + O(\varepsilon^{3/2} |\ln \varepsilon|) \\ \kappa(l) &= \frac{2\sqrt{1-l}}{l} + \frac{l}{2\sqrt{1-l}} = \frac{4-4l+l^2}{2l\sqrt{1-l}} \end{aligned}$$

При  $l \rightarrow 0$  и  $l \rightarrow 1$  величина  $\kappa(l)$  стремится к  $\infty$ ; при значениях  $l$  и  $1-l$ , близких к  $\varepsilon$ , формула для  $K(\varepsilon, l)$  теряет точность из-за нарушения предположения о малости  $\varepsilon$  (см. п. 1). Минимума функция  $\kappa$  (фиг. 4), а следовательно, и коэффициент интенсивности напряжений достигают в точке  $l_* = 2(\sqrt{2}-1)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Течения идеальной жидкости со свободными поверхностями в двухсвязных и трехсвязных областях. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, с. 731—734.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.

3. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668—686.
6. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
7. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
8. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.
9. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, В. 76, S. 29—60.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М. Л.: Гостехиздат, 1950. 696 с.
11. *Ван Дайк М. Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области со щелью. I. Двумерный случай.— Мат. сб., 1976, т. 99, № 4, с. 514—538; II. Область с малым отверстием.— Мат. сб., 1977, т. 103, № 2, с. 265—284.
13. *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, т. 45, № 1, с. 167—186.
14. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
24.I.1986