Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 539.3

ДИНАМИКА УПРУГИХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ОБОЛОЧЕК В ПОСТОЯННЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Радовинский А. Л.

Асимптотическим интегрированием системы уравнений Максвелла (в квазистационарном приближении) и уравнений теории упругости с использованием в качестве малого параметра относительной полутолщины η оболочки получена система нелинейных уравнений электромеханики тонких упругих оболочек конечной проводимости. Показано, как из этих уравнений путем отбрасывания асимптотически малых членов могут быть получены две их основные предельные линейные формы, отвечающие двум известным классам задач: *1* об определении влияния постоянного магнитного поля на свободные колебания упругих оболочек [1], *2* об определении деформаций оболочек под действием пондеромоторных сил, вызываемых вихревыми токами, индуцируемыми переменными магнитными полями [2—4]. Дается система граничных, а для некоторых из задач *2* — начальных условий. Из анализа асимптотической точности делаются выводы о пределах применимости полученных уравнений (а также аналогичных линейных уравнений, полученных разными авторами [1—3]). Показано, что точность любых линейных уравнений, отвечающих задачам *1* или *2*, не может быть выше $O(\eta)$.

1. Постановка задачи. В безграничном пространстве V задана триортогональная система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, такая, что ее координатная поверхность $\alpha_3 = 0$ совпадает со срединной [5] поверхностью S некоторой оболочки. Эта оболочка занимает область $V^{(i)}$, ограниченную лицевыми поверхностями, задаваемыми равенствами $\alpha_3 = \pm h$ и замкнутой краевой поверхностью, определяемой уравнением $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. Внешняя область $V^{(e)} = V - V^{(i)}$ занята веществом, свойства которого отождествляются со свойствами вакуума, а внутренняя область $V^{(i)}$ заполнена материалом с линейными упругими свойствами, конечной постоянной электрической проводимостью σ и относительной магнитной проницаемостью, равной единице.

Рассмотрим задачу определения малых упругих колебаний оболочки в заданном переменном магнитном поле.

Пренебрегая токами смещения и считая, что сторонние токи отсутствуют, запишем уравнения Максвелла [6]

$$-\Delta \mathbf{B}_\Sigma + \mu_0\sigma\dot{\mathbf{B}}_\Sigma = \mu_0\sigma \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_\Sigma), \quad \operatorname{div}\mathbf{B}_\Sigma = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{B}_\Sigma$ — вектор полной магнитной индукции, $\mathbf{u}$ — вектор упругих перемещений среды, μ_0 — магнитная постоянная; точкой обозначена производная по времени t.

Будем считать, что

$$\mathbf{B}_\Sigma = \mathbf{B} + \mathbf{b} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$ — индукция, вообще говоря, переменного магнитного поля, заданного во всей области V путем решения задачи электродинамики для некоторого стороннего источника поля в отсутствие оболочки (т. е. в предположении, что все пространство V имеет свойства вакуума), $\mathbf{b}$ — индукция искомого поля токов в оболочке (в дальнейшем под $\mathbf{b}^{(e)}$ и $\mathbf{b}^{(i)}$ будем понимать значения $\mathbf{b}$ в областях $V^{(e)}$ и $V^{(i)}$ соответственно).

Это, в частности, означает, что $\mathbf{B}$ всюду удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \mathbf{B} = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 \tag{1.3}$$

с учетом которых уравнения (1.1) после подстановки в них (1.2) можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{b}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b}^{(e)} = 0 \ \text{ в } V^{(e)} \tag{1.4}$$

$$-\Delta \mathbf{b}^{(i)} + \mu_0 \sigma \mathbf{b}^{\cdot (i)} = \mu_0 \sigma \{-\mathbf{B}^{\cdot} + \operatorname{rot} [\mathbf{u}^{\cdot} \times (\mathbf{B} + \mathbf{b}^{(i)})]\} \tag{1.5}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{b}^{(i)} = 0 \quad \text{в } V^{(i)}$$

Уравнения динамики упругой среды, занимающей область $V^{(i)}$, запишем в форме

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{u}^{\cdot\cdot} = -\mathbf{q} \tag{1.6}$$

где λ, μ — упругие постоянные Ламе, ρ — плотность материала оболочки, $\mathbf{q}$ — вектор объемных пондеромоторных сил, выражающийся через плотность тока $\mathbf{j}$. Формулы [6] для их определения можно с учетом (1.2) и (1.3) записать в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{j} \times (\mathbf{B} + \mathbf{b}^{(i)}), \quad \mathbf{j} = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{b}^{(i)} \tag{1.7}$$

Уравнения (1.4) — (1.6) надо интегрировать во всей области V с выполнением некоторых условий на лицевых и краевых поверхностях. Часть из этих условий имеет электромагнитный характер и в рассматриваемом случае может быть сведена к равенствам

$$\mathbf{b}^{(e)} = \mathbf{b}^{(i)}, \quad \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}^{(i)} = 0 \tag{1.8}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности раздела областей $V^{(i)}$ и $V^{(e)}$ (если краевая поверхность оболочки не изолирована, то электромагнитное условие на ней будет отличаться от (1.8)). Часть условий носит механический характер [5] и налагается на некоторые функции перемещений.

На индукцию $\mathbf{b}^{(e)}$ дополнительно налагается условие ограниченности на бесконечности.

Решив поставленную задачу, все остальные параметры электромагнитного и механического полей можно определить прямыми действиями по известным формулам [5, 6] соответствующих теорий.

Данная постановка задачи отличается от приведенной в [1] только тем, что индукция $\mathbf{B}$ может быть переменной и в области $V^{(i)}$ не производится линеаризация уравнений путем отбрасывания $\mathbf{b}^{(i)}$ в сравнении с $\mathbf{B}$.

2. Асимптотическое интегрирование. Рассмотрим уравнения п. 1, перейдя в них к независимым переменным ξ_k, ζ, τ_s, τ_e по формулам

$$\alpha_k = \eta^p R \xi_k, \quad \alpha_3 = \eta R \zeta \tag{2.1}$$
$$t = \eta^l \mu_0 \sigma R^2 \tau_e \ (\text{в } (1.5)), \quad t = \eta^r \sqrt{\rho/E} \ R \tau_s \ (\mathbf{b}\ (1.6))$$

где $\eta = h/R$ — относительная полутолщина, R — характерный радиус кривизны оболочки, p, l, r — числа, которые будут определены ниже. Используемые здесь и в последующем индексы k, m, i, j принимают значения $k, m = 1, 2, k \neq m, i, j = 1, 2, 3$.

Отнесем поверхность S к линиям кривизны. Тогда коэффициенты Ламе определятся формулами

$$H_k = A_k a_k, \quad a_k = 1 + \alpha_3 / R_k, \quad H_3 = 1 \tag{2.2}$$

где R_k — нормальные радиусы кривизны поверхности S. Как и в [5], входящие в уравнения различные комбинации a_1, a_2, получаемые их перемножением или делением, заменим рядами вида

$$f(a_1, a_2) = \sum (f)_n (\eta\zeta)^n, \quad (f)_n = (n!)^{-1} [\partial^n f / \partial (\eta\zeta)^n]_{\zeta=0} \tag{2.3}$$

Здесь и ниже Σ всегда означает суммирование от $n = 0$ до $n = \infty$.

При определении членов разложений (2.3) надо в (2.2) сделать замены α_3 согласно формулам (2.1). Тогда, в частности, получим

$$(f)_0 = 1, \quad (a_1 a_2)_1 = \frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2}, \quad (a_k)_1 = -\left(\frac{1}{a_k}\right)_1 = \frac{R}{R_k},$$
$$(a_1 a_2)_2 = \frac{R^2}{R_1 R_2}$$

Компоненты заданного вектора $\mathbf{B}$ представим в виде разложений

$$B_j = B \sum (\eta\zeta)^n B_{jn}, \quad B_{jn} = B^{-1} [\partial^n B_j / \partial \alpha_3{}^n]_{\alpha_3=0} \tag{2.4}$$
$$B = \max_S |\mathbf{B}|$$

а компоненты векторов $\mathbf{b}^{(i)}$ и $\mathbf{u}$ будем искать в виде

$$b_j^{(i)} = B\eta^c \sum \zeta^n \eta^{c_{jn}} b_{jn}, \quad u_j = R \sum \zeta^n \eta^{d_{jn}} u_{jn} \tag{2.5}$$
$$b_{jn} = b_{jn}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad u_{jn} = u_{jn}(\alpha_1, \alpha_2, t)$$

где c, c_{jn}, d_{jn} — числа, значения которых определены ниже.

Сделаем в (1.5) подстановки (2.1) — (2.5) и будем удовлетворять этим уравнениям, выполняя равенства, получаемые последовательным приравниванием в них коэффициентов при одинаковых степенях ζ (назовем их ζ-уравнениями). Будем при этом считать, что числа p, l, r подобраны так, чтобы дифференцирование искомых функций по ξ_k, τ_e, τ_s не вело к изменению их асимптотических порядков. (Это, в частности, означает, что p совпадает по смыслу с показателем изменяемости [5] искомого состояния.) Учтем, что согласно (2.3) и (2.4) величины $(f)_n$ и B_{jn} имеют порядок η^0. Кроме того, будем предполагать, что числа c, c_{jn}, d_{jn} подобраны так, что определяемые из ζ-уравнений величины b_{jn} и u_{jn} также имеют порядок η^0. Тогда все коэффициенты при этих функциях в ζ-уравнениях будут иметь структуру $\eta^\varkappa P$, где P — некоторые операторы или множители, не влияющие на асимптотику соответствующего члена, а $\eta^\varkappa$ — множитель, определяющий его асимптотический порядок. В каждом из ζ-уравнений можно сохранить только асимптотически главные (содержащие η в наименьшей степени) слагаемые, допустив при этом некоторую оцениваемую погрешность. Полученные таким образом уравнения должны быть непротиворечивы, т. е. не должно получаться несколько различных выражений для определения одной и той же величины, а сами величины, определенные из этих уравнений, должны иметь порядок η^0.

Уравнения, полученные изложенным методом из (1.5), могут удовлетворить последнему условию, если для первых членов разложений (2.5) принять

$$c_{30} = c_{k0} = c_{k1} = c_{k2} = 0, \quad c_{31} = 1, \quad c_{32} = 1 - p, \quad d_{j0} = 1 \tag{2.6}$$

Из ζ-уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов при ζ^0 и ζ во втором и при ζ^0 в первом из уравнений (1.5), получим после некоторых тождественных преобразований следующие соотношения:

$$b_{31} = -[(a_1 a_2)_1 b_{30} + \eta^{-p} (P_{01} b_{10} + P_{02} b_{20})] \tag{2.7}$$
$$b_{32} = -\{(P_{01} b_{11} + P_{02} b_{21}) + \eta^{1+p} [(a_1 a_2)_1 b_{31} + (a_1 a_2)_2 b_{30}] +$$
$$+ \eta (P_{11} b_{10} + P_{12} b_{20})\}/2$$

$$b_{k2} = [-\eta^{2-c+g} R^2 Q_{k0} - \eta (a_1 a_2)_1 b_{k1} - \eta^{2-2p} \Delta_\xi b_{k0} + \eta^{2-l} \partial b_{k0}/\partial \tau_e]/2$$
$$\eta^{c-1-p} (P_{01} b_{11} + P_{02} b_{21}) + \eta^{c-p} (P_{11} b_{10} + P_{12} b_{20}) +$$
$$+ \eta^c [\eta^{-l} \partial/\partial \tau_e - \eta^{-2p} \Delta_\xi - (a_1 a_2)_2] b_{30} = \eta^g R^2 Q_{30}$$

Здесь

$$\Delta_\xi b_{j0} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial b_{j0}}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial b_{j0}}{\partial \xi_2} \right) \right]$$
$$P_{0k} b_{jn} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (A_m b_{jn}), \quad P_{1k} b_{jn} =$$
$$= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\left(\frac{1}{a_k} \right)_1 \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \eta^p (a_m)_1 \right] (A_m b_{jn})$$

Q_{j0} — первые члены разложений $Q_j = B\eta^g \Sigma\, \zeta^n \eta^{g_{jn}} Q_{jn}$ правых частей первого уравнения (1.5), получаемые в результате подстановок в них соотношений (2.1) и разложений (2.3) — (2.5). В частности (с учетом (2.6)), имеем

$$\eta^g Q_{30} = \frac{1}{R^2} \left\{ -\eta^{-l} \frac{\partial B_{30}}{\partial \tau_e} + \eta^{1-l-p} \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[A_2 \left((B_{10} + \eta^c b_{10}) \times \right.\right.\right.\right.$$
$$\left. \left. \times \frac{\partial u_{30}}{\partial \tau_e} - (B_{30} + \eta^c b_{30}) \frac{\partial u_{10}}{\partial \tau_e} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[A_1 \left((B_{20} + \eta^c b_{20}) \times \right. \right.$$
$$\left.\left.\left.\left. \times \frac{\partial u_{30}}{\partial \tau_e} - (B_{30} + \eta^c b_{30}) \frac{\partial u_{20}}{\partial \tau_e} \right) \right] \right\} \right\} \tag{2.8}$$

Последнее уравнение (2.7) связывает стоящие слева от знака равенства члены разложений (2.5) индукции искомого поля токов со стоящими в правой части слагаемыми, определяющими возмущения, вызывающие эти токи. Поэтому число c, задающее асимптотику (2.5) индукции $\mathbf{b}^{(i)}$, выберем так, чтобы в число асимптотически главных членов последнего уравнения (2.7) вошло хотя бы по одному из слагаемых, стоящих по разные стороны от знака равенства. Этому условию удовлетворяет

$$c = \begin{cases} 1 + p + g, & l < 1 + p \\ l + g, & 1 + p \leqslant l \end{cases} \tag{2.9}$$

Пользуясь (2.9), можно определить соотношение асимптотических порядков любой пары слагаемых в каждом из уравнений (2.7). Ниже в уравнениях будем отбрасывать члены

$$O(\eta^{\varepsilon_e}), \quad \varepsilon_e = \min(2 - l, 1 - p) \tag{2.10}$$

в сравнении с асимптотически главными, т. е. будем строить уравнения с точностью до величин (2.10). При сравнении показателей степеней в (2.7) будем считать, что p и l ограничены неравенствами $0 \leqslant p < 1$, $l < 2$, смысл которых будет раскрыт ниже.

Рассмотрим вопрос о выполнении электромагнитных условий на лицевых поверхностях.

Удовлетворим уравнениям (1.4), приняв, что

$$\mathbf{b}^{(e)} = \operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3} \mathbf{i}_3 \tag{2.11}$$

где $\mathbf{i}_j$ — единичные орты вдоль α_j, Φ — потенциальная функция, удовлетворяющая в области $V^{(e)}$ уравнению Лапласа.

Выполняя первое условие (1.8) с точностью, соответствующей (2.10), получим с учетом (2.3), (2.5), (2.6), (2.7) и (2.11) выражения

$$B 2\eta^c b_{k1} = \frac{1}{A_k} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\Phi^+ - \Phi^-), \quad B\eta^c b_{30} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3} \right)^+ = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3} \right)^- \tag{2.12}$$
$$B 2\eta^c b_{k0} = \frac{1}{A_k} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\Phi^+ + \Phi^-) \quad (\ )^\pm = (\ )_{\alpha_3 \to \pm 0}$$

Можно проверить, что второе условие (1.8) при подстановке в него (2.5) в силу полученных выражений (2.12) для b_{k0} и b_{k1} выполнится с точностью, превышающей (2.10).

Отбрасывание малых членов при подстановке (2.11) в первые равенства (1.8) означает, что область $V^{(i)}$ сводится к математическому разрезу по S. При этом погрешность равна $O(\eta)$, т. е. соответствует (2.10).

Обратимся к уравнению (1.6). Интегрирование отвечающей ему системы скалярных уравнений в тонкой области $V^{(i)}$ (занятой материалом оболочки) при соответствующих условиях на лицевых поверхностях представляет собой обычную задачу построения уравнений динамической теории оболочек и осуществляется путем растяжения масштаба по формулам (2.1). Эта задача может быть сформулирована, например, в терминах [5], если под объемными силами понимать пондеромоторные силы вместе с инерционными. Получаемые при этом уравнения могут обладать точностью не ниже

(2.13) $$O(\eta^{\varepsilon_s}), \ \varepsilon_s = \min(2-2r,\ 1-p)$$

если инерционные члены принять в обычной форме [7] и ввести магнитное давление $\mathbf{X}$ с компонентами, определяемыми по формулам

(2.14) $$X_j = 2hq_{j0}$$

где q_{j0} — первые члены разложений $q_j = \Sigma\, \zeta^n q_{jn}$, получаемых подстановкой (2.1)—(2.6) в (1.7). Они имеют вид

(2.15) $$\begin{aligned} q_{k0} &= B^2(\mu_0 R)^{-1}\eta^{c-1}(B_{30}+\eta^c b_{30})\, b_{k1} \\ q_{30} &= -B^2(\mu_0 R)^{-1}\eta^{c-1}[(B_{10}+\eta^c b_{10})\, b_{11}+(B_{20}+\eta^c b_{20})\, b_{21}] \end{aligned}$$

Выпишем эти уравнения, присоединив к ним (2.12) и последнее уравнение (2.7). (В последнем уравнении (2.7) опустим попутно второе слагаемое, стоящее при множителе η^{c-p}; оно составляет величину порядка η в сравнении с первым, содержащим множитель η^{c-1-p}). Сделаем в уравнениях обратные замены (2.1) и подстановки $\eta^c b_{30}$, $\eta^c b_{k0}$, $\eta^c b_{k1}$ по формулам (2.12). Перейдя к размерным величинам согласно (2.4) и (2.5), получим систему уравнений

(2.16) $$\begin{aligned} &\frac{1}{2h\mu_0\sigma}\Delta_s F + f_3^{\boldsymbol{\cdot}} = -j_2 B_3^{\boldsymbol{\cdot}} + j_3\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\{A_m[(B_k+j_1f_k)\, u_3^{\boldsymbol{\cdot}} - \\ &\quad -(B_3+j_1f_3)\, u_k^{\boldsymbol{\cdot}}]\} \\ &\Delta\Phi = 0, \quad F = \Phi^+ - \Phi^-, \quad f_3 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\right)^+ = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\right)^- \end{aligned}$$

(2.17) $$\left(\frac{h^2}{3}N_{ij}+L_{ij}\right)u_j + \frac{\rho}{E}u_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} = \frac{X_i}{2Eh}$$

(2.18) $$\begin{aligned} &X_k = \frac{1}{\mu_0}(B_3+j_1f_3)\frac{1}{A_k}\frac{\partial F}{\partial\alpha_k}, \quad X_3 = -\frac{1}{\mu_0}(B_k+j_1f_k)\frac{1}{A_k}\frac{\partial F}{\partial\alpha_k} \\ &f_k = \frac{1}{2A_k}\frac{\partial}{\partial\alpha_k}(\Phi^+ + \Phi^-) \end{aligned}$$

Здесь L_{ij} и N_{ij} — безмоментные и моментные операторы теории оболочек (они могут быть приняты в форме [7]), Δ_s — двумерный оператор Лапласа на S (он может быть получен из Δ_ξ формальной заменой ξ_k на α_k); под B_j понимаются значения компонент вектора $\mathbf{B}$ на поверхности S; u_j — перемещения срединной поверхности оболочки; индексам i, j, k, m присваиваются принятые здесь значения и считается, что по повторяющимся индексам производится суммирование; j_1 — j_3 — множители, введенные для удобства изложения (пока их надо считать равными единице).

Линейный ток в оболочке J можно с точностью (2.10) выразить через величины (2.16)—(2.18) по формуле

$$(2.19)\qquad \mathbf{J}=\frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{1}{A_2}\frac{\partial F}{\partial\alpha_2}\mathbf{i}_1+\frac{1}{A_1}\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}\mathbf{i}_2\right]$$

Замечания. 1°. После решения уравнений (2.16) — (2.18), когда станет известной функция Ф, все рассмотренные в п. 2 члены разложений $b_j^{(i)}$ могут быть определены прямыми действиями: b_{30}, b_{k0} и b_{k1} из (2.12), а b_{31}, b_{32}, b_{k2} — из (2.7). Для определения следующих членов разложений (2.5) надо строить следующие после рассмотренных ζ-уравнения, соответствующие (1.5).

2°. Условие формальной асимптотической сходимости изложенного процесса состоит в требовании, чтобы показатели ε_e и ε_s степеней η в (2.10) и (2.13), определяющие асимптотику отброшенных членов, были положительны. Это, согласно (2.1), задает следующие символические неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\ll\eta^{-1},\ \frac{\partial}{\partial t}\ll\min(\omega_e,\omega_s),\qquad \omega_e=(4h^2\mu_0\sigma)^{-1},\quad \omega_s=(2h)^{-1}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ограничивающие свойства исследуемых процессов пределами, в которых справедлива двумерная динамическая теория оболочек и отсутствует скин-эффект.

3°. Граничные условия к уравнениям (2.16) — (2.18) условно можно подразделить на следующие группы.

Механические условия, под которыми надо понимать обычные краевые условия теории оболочек, выраженные через перемещения срединной поверхности. Эти условия могут быть выполнены за счет произволов уравнений (2.17).

Электродинамические условия, одно из которых состоит в естественном требовании ограниченности Ф на бесконечности, а другое налагается на значения некоторых величин (2.16)—(2.18) на краю оболочки. В частности, на изолированном краю, где должен отсутствовать ток по нормали к краю, это условие согласно (2.19) выполнится при равенстве краевого значения функции F нулю.

3. Предельные формы уравнений магнитоупругости. Уравнения (2.16)—(2.18) представляют собой замкнутую систему уравнений динамики упругих тонкостенных оболочек в магнитных полях и нелинейны за счет слагаемых, содержащих произведения f_j и некоторых производных F и u_j. Покажем, что для решения задач *1* и *2*, определенных в начале статьи, можно (за счет отбрасывания некоторых слагаемых) линеаризовать уравнения (2.16)—(2.18), перейдя тем самым к некоторым их предельным формам.

При выводе уравнений (2.16)—(2.18) число g, определяющее асимптотику сумм Q_{j0}, и, в частности, Q_{30}, оставалось неопределенным. Приравнивая в (2.8) показатель g степени η в левой части уравнения наименьшему из показателей степеней множителей η, стоящих в правой части, и учитывая, что в задачах *1* первое слагаемое в правой части тождественно равно нулю (величина B_{30} постоянна во времени), получим формулы: $g=1-$ $-p-l$ (в задачах *1*), $g=-l$ (в задачах *2*). Из (2.9) следует, что минимальные значения c, определяющие согласно (2.5) максимальную асимптотику $b_j^{(i)}$, таковы:

$$(3.1)\qquad c=1-p\ \text{(в задачах 1)},\quad c=0\ \text{(в задачах 2)}$$

Это значит, что для задач *1* в выражениях (2.8) и (2.15) можно с точностью $O(\eta^{1-p})$ отбросить слагаемые $\eta^c b_{j0}$ в сравнении с B_{j0}. Учтем также то, что в задачах *1* $\partial B_{30}/\partial\tau_e=0$. Отбросив соответствующие члены в (2.16)—(2.18), получим предельную форму уравнений, отвечающую задачам *1*. Она следует из (2.16)—(2.18), если положить $j_1=j_2=0, j_3=1$. (При этом функции f_k в уравнения не войдут.)

В задачах 2 отбрасывание слагаемых $\eta^c b_{j0}$ в сравнении с B_{j0} неправомерно, так как они могут иметь одинаковый асимптотический порядок. Однако допустимо (с точностью $O(\eta^{1-p})$) опустить вторую группу слагаемых в правой части (2.8). Это означает, что предельная форма уравнений, отвечающая задачам 2, следует из (2.16)—(2.18), если положить $j_3 = 0$, $j_1 = j_2 = 1$.

Отметим, что согласно (3.1), (2.5), (1.7) и (2.15) при одинаковом уровне напряженности магнитного поля плотность вихревых токов и магнитное давление в задачах 2 в η^{1-p} раз больше, чем в задачах 1.

4. Обсуждение задач магнитоупругости. Предельная система уравнений задач 1 — связная. Она может быть получена из уравнений [1], если в них исключить тангенциальные компоненты электрического поля в оболочке и отбросить асимптотически малые члены [8]. В зависимости от частоты колебаний и напряженности магнитного поля эти уравнения могут быть дополнительно упрощены аналогично тому, как это сделано в [9, 10] с уравнениями магнитоупругости трехмерного тела.

Предельная система уравнений задач 2 распадается, и ее всегда можно решать в три последовательных этапа. Первый этап состоит в определении функций Φ, F, f_3 на основании уравнений (2.16) ($j_3 = 0$). Второй — в определении прямыми действиями компонент вектора магнитного давления X_j по формулам (2.18). И третий — в интегрировании уравнений (2.17) при заданных правых частях и нахождении перемещений u_j оболочки. Вихревые токи могут быть при необходимости найдены прямыми действиями по формуле (2.19) после первого этапа.

Данная схема является общей для следующих задач 2.

1°. Определение установившихся колебаний в гармонически изменяющихся магнитных полях при частотах $\omega \ll \omega_{\max} = \min(\omega_e, \omega_s)$. Сюда относятся задачи о колебаниях в поле переменных токов, колебаниях, вызываемых относительным вращением поля и оболочки, а также их комбинации. Получаемые в этих задачах выражения для перемещений показывают наличие резонансов на удвоенной частоте электромагнитного возбуждения и, как правило, содержат постоянную (не зависящую от времени) составляющую.

2°. Определение воздействия на оболочку гладким электромагнитным импульсом [4], удовлетворяющим условию $\partial/\partial t \ll \omega_{\max}$, или, что то же самое, длительностью $\tau \gg \omega_{\max}^{-1}$. (Для стальной оболочки толщиной $2h = 1$ мм $\tau \gg 2{,}2$ мкс). В этом случае уравнения задачи надо дополнить однородными начальными условиями на Φ, u_j и $u_j^{\boldsymbol{\cdot}}$.

3°. О влиянии на оболочку включения или выключения постоянного магнитного поля. (Изменение поля можно считать ступенчатым, если во фронте $\partial/\partial t > \omega_e$.) Для этих задач в уравнениях надо положить $\mathbf{B} = \mathrm{const}$. При этом в первом уравнении (2.16) исчезнет правая часть ($B_3^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$ или формально $j_2 = 0$). Их надо дополнить начальными условиями, которые при ступенчатом включении и выключении магнитного поля $\mathbf{B}$ имеют соответственно вид $f_3 = -B_3$ и $f_3 = B_3$ (при $t = 0$). Решение этой задачи представляет собой сумму экспоненциально затухающих во времени собственных решений уравнений (2.16) ($j_2 = j_3 = 0$) и определяет посредством (2.18) экспоненциально затухающие правые части уравнений (2.17). Начальные условия для u_j и $u_j^{\boldsymbol{\cdot}}$ могут быть выполнены за счет произволов уравнений (2.17).

Основные математические трудности, связанные с решением задач *2*, заключаются в интегрировании трехмерных уравнений (2.16), представляющих собой одну из форм уравнений вихревых токов. Другие формы полученных на основании гипотез уравнений вихревых токов содержатся в [2—4]. Так, уравнения [2, 3] в сущности представляют собой интегральную форму записи уравнений (2.16), отвечающих задаче *2*. В [2] содержится обзор литературы по этому вопросу, а также изложена методика численного решения задач определения вихревых токов в оболочках. В [3] приведены аналитические решения для пластин и оболочек простых форм, находящихся в гармонических и вращающихся полях. В некоторых случаях даны формулы для определения магнитного давления.

Результаты, получаемые на каждом из этапов решения задач *2*, могут иметь самостоятельное практическое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Астахов В. И.* Задача расчета квазистационарного электромагнитного поля в проводящих оболочках.— Изв. вузов. Электромеханика, 1985, № 1, с. 15—30.
3. *Астахов В. И.* Интегральные параметры электромагнитного процесса в проводящих оболочках.— Изв. вузов. Электромеханика, 1985, № 5, с. 5—17.
4. *Дресвянников В. И.* О построении нелинейных уравнений динамики электропроводящих упругопластических оболочек при воздействии импульсных магнитных полей.— В кн.: XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин:Изд-е Таллин. политехн. ин-та, 1983, т. 2, с. 78—83.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 710 с.
7. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 156 с.
8. *Радовинский А.Л.* Об уравнениях колебаний пластин и оболочек в магнитном поле.— В кн.: Теория и численные методы расчета пластин и оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1984, т. 2, с. 242—247.
9. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводящих тел. Киев: Наук. думка, 1982. 293 с.
10. *Селезов И. Т.* Некоторые приближенные формы уравнений движения магнитоупругих сред.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5, с. 86—91.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1985