

УДК 539.3

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД

Задоян М. А.

Рассматривается класс плоских и осесимметричных задач несжимаемых сред со степенным упрочнением, деформируемых во времени по специальным законам. К этим средам по существу могут относиться упрочняющиеся пластические, нелинейно-упругие, нелинейно-вязкие тела, сжимаемостью которых можно пренебречь. Исследуются такие динамические воздействия, при которых точки тела совершают колебательные или монотонные во времени движения. Приводятся внешние силы, соответствующие рассмотренному динамическому деформированию этих сред. Вопросы разгрузки для краткости не обсуждаются, поэтому для случая пластических и нелинейно-вязких тел рассматриваются только такие этапы движения, которые приводят к нагружению.

Исследованию волновых процессов в пластических и других нелинейных сжимаемых телах посвящена обширная литература ([1—8] и др.). Определенный интерес представляет, особенно с точки зрения изучения влияния инерционных сил на прочность тел, исследование вопросов динамического деформирования при допущении несжимаемости материала.

**1. Плоское деформирование.** Соотношения для рассматриваемой среды в условиях плоской деформации в полярных координатах в обычных обозначениях представим в виде:

уравнения движения

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений и соотношения между компонентами деформаций, напряжений и перемещений

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 &= k \sigma_0^n \\ \varepsilon_0 &= \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\gamma_{r\theta}^2}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} \\ \varepsilon_{ij} &= 1/2 k \sigma_0^{n-1} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma), \quad \varepsilon_r = \partial u / \partial r \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Напряжения и перемещения ищем в виде (штрих означает производную по  $\theta$ , точка — по  $t$ )

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r, \sigma_\theta &= \kappa n \lambda^{-1} f^{1/n} r^{-\lambda/n} \{([\psi'' - \lambda(\lambda - 2)\psi] \chi)' + \\ &+ v \psi' + 2(\lambda - 1)(\lambda/n - 2 \mp \lambda/n) \psi' \chi\} - \\ &- \rho M'' r \sin \theta + \rho N'' r \cos \theta + H, \quad \kappa = \pm 1 \\ \tau_{r\theta} &= \kappa f^{1/n} r^{-\lambda/n} [\psi'' - \lambda(\lambda - 2)\psi] \chi, \quad v = \pm \rho k \mu^2 \\ \chi &= \{[\psi'' - \lambda(\lambda - 2)\psi]^2 + 4(\lambda - 1)^2 \psi'^2\}^{(1-n)/(2n)} \\ u &= \kappa k f r^{1-\lambda} \psi' - M \sin \theta + N \cos \theta \\ v &= \kappa k (\lambda - 2) f r^{1-\lambda} \psi - M \cos \theta - N \sin \theta, \quad \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Здесь  $f, M, N, H$  — произвольные функции  $t, \psi$  — произвольная функция  $\theta, \mu$  и  $\lambda$  — постоянные, причем здесь и в дальнейшем при  $\mu = 0$  параметры  $\lambda$  и  $n$  независимы, а при  $\mu \neq 0$  имеем  $\lambda = 2n/(n - 1)$ .

Приведенные выражения напряжений и перемещений (1.3) будут решением системы уравнений (1.1), (1.2), если  $\psi(\theta)$  удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$(1.4) \quad ([\psi'' - \lambda(\lambda - 2)\psi]\chi)'' + \lambda n^{-1}(2 - \lambda n^{-1})[\psi'' - \lambda(\lambda - 2)\psi]\chi + \\ + 4(\lambda - 1)(\lambda n^{-1} - 1)(\psi'\chi)' + \lambda n n^{-1}(\lambda - 2)^{-1}[\psi'' + \\ + (\lambda - 2)^2\psi] = 0$$

а  $f(t)$  — уравнению второго порядка

$$(1.5) \quad f'' \pm \mu^2 f^{1/n} = 0$$

решение которого при  $\mu \neq 0$  представляется в квадратурах

$$(1.6) \quad \sqrt{\frac{2}{m}} \mu t = \pm \int_{f_0}^f \frac{dx}{\sqrt{c^m \mp x^m}}, \quad m = 1 + \frac{1}{n}$$

где  $f_0$ ,  $c$ ,  $\mu$  — параметры, характеризующие динамическое деформирование. Минус в подкоренном выражении соответствует нелинейному колебанию тела ( $n = 1$  — гармоническое колебание), а плюс — монотонному во времени деформированию.

При  $\lambda = 0$  система уравнений (1.1) — (1.2) допускает решения

$$(1.7) \quad \sigma_r, \sigma_\theta = (\rho r^2 h'' \pm \kappa h^{1/n}) \cos 2(\theta - \delta) - \rho M'' r \sin \theta + \\ + \rho N'' r \cos \theta + H, \quad \tau_{r\theta} = -\kappa h^{1/n} \sin 2(\theta - \delta) \\ u = \frac{1}{2} \kappa k h r \cos 2(\theta - \delta) - M \sin \theta + N \cos \theta \\ v = -\frac{1}{2} \kappa k h r \sin 2(\theta - \delta) - M \cos \theta - N \sin \theta$$

где  $h = h(t)$  и  $\delta$  — произвольные функция и параметр соответственно.

Случай  $n = 2$ . Формулы для напряжений и перемещений (1.3) при  $n = 2$  возьмем в виде

$$(1.8) \quad \sigma_r, \sigma_\theta = -\frac{1}{2} f^{1/2} r^{-2} \{[(\psi'' - 8\psi)\chi]' + \nu \psi' \mp 12\psi'\chi\} \\ \tau_{r\theta} = -f^{1/2} r^{-2} (\psi'' - 8\psi)\chi, \quad \chi = [(\psi'' - 8\psi)^2 + 36\psi'^2]^{-1/2} \\ u = -k f r^{-3} \psi', \quad v = -2k f r^{-3} \psi$$

где  $\psi(\theta)$  определяется из уравнения

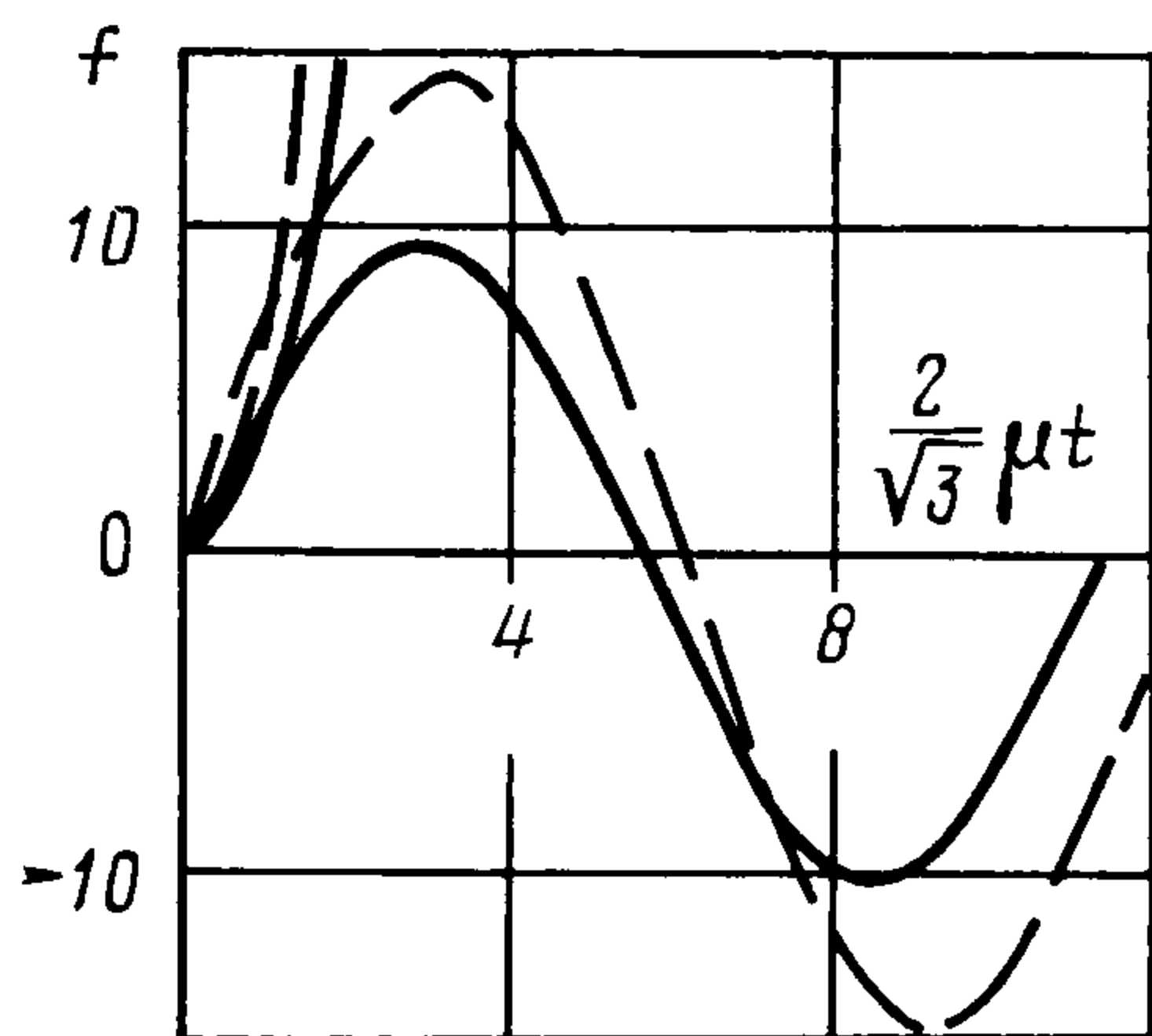
$$(1.9) \quad [(\psi'' - 8\psi)\chi]'' + 12(\psi'\chi)' + \nu(\psi'' + 4\psi) = 0$$

а функция  $f(t)$  — из квадратуры (1.6) при  $m = 3/2$ , график которой при  $f_0 = 0$  приведен на фиг. 1 сплошными линиями для  $c = 10$  и штриховыми для  $c = 15$ .

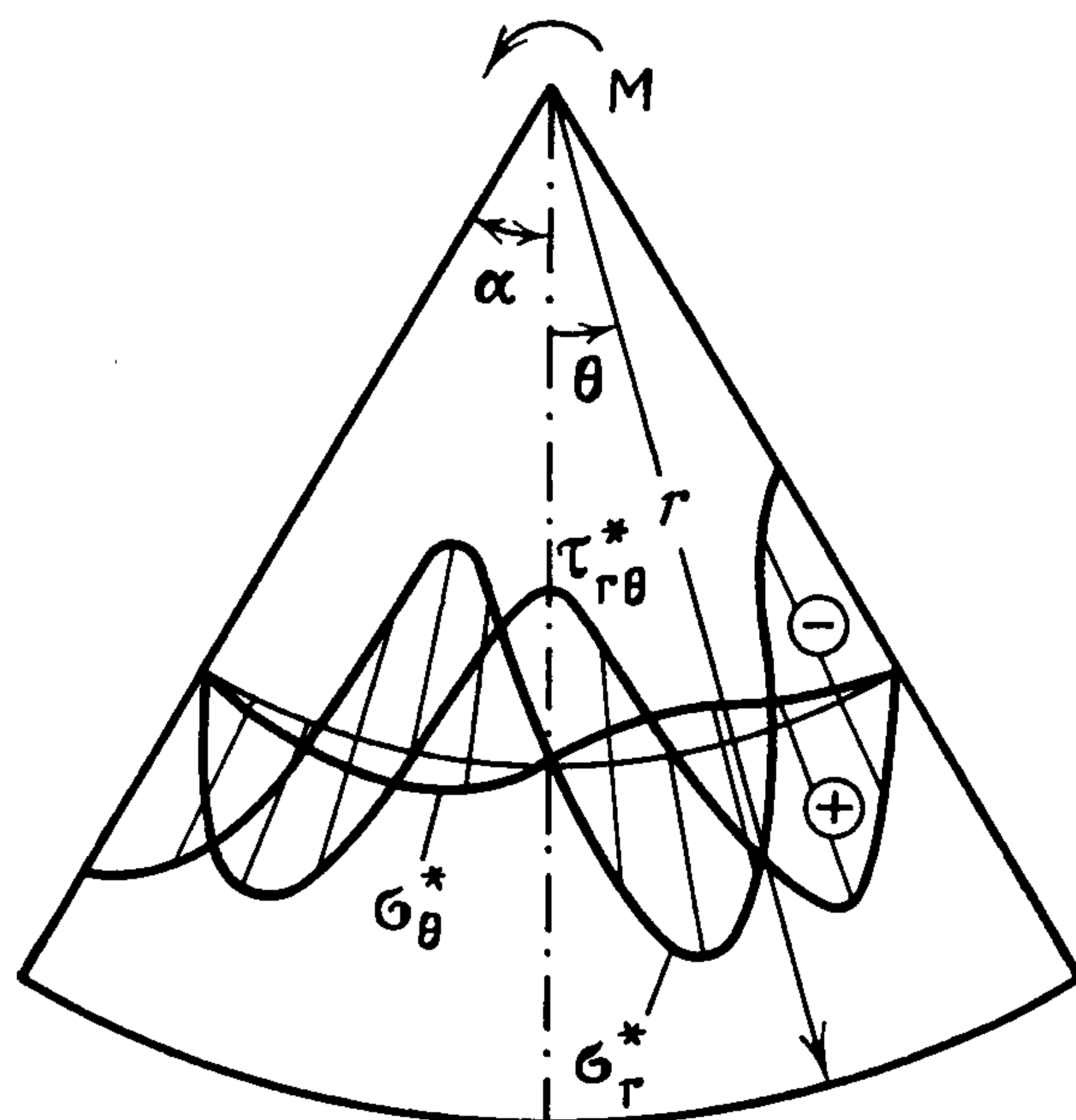
1°. Рассмотрим бесконечный клин с углом раствора  $2\alpha$ , изгибающийся моментом  $M(t)$ , приложенным к вершине. Уравнение (1.9) можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка с краевыми условиями

$$(1.10) \quad \psi' = s, \quad s' = 8\psi + (\sqrt{2}/2) \tau R \\ \sigma' = -4\nu\psi, \quad \tau' = \sigma - \nu s - 12\sqrt{2}s/R \\ R = [\tau^2 + (\tau^4 + 144s^2)^{1/2}]^{1/2} \\ \theta = 0, \quad \sigma = s = 0; \quad \theta = \alpha, \quad \sigma = \tau = 0$$

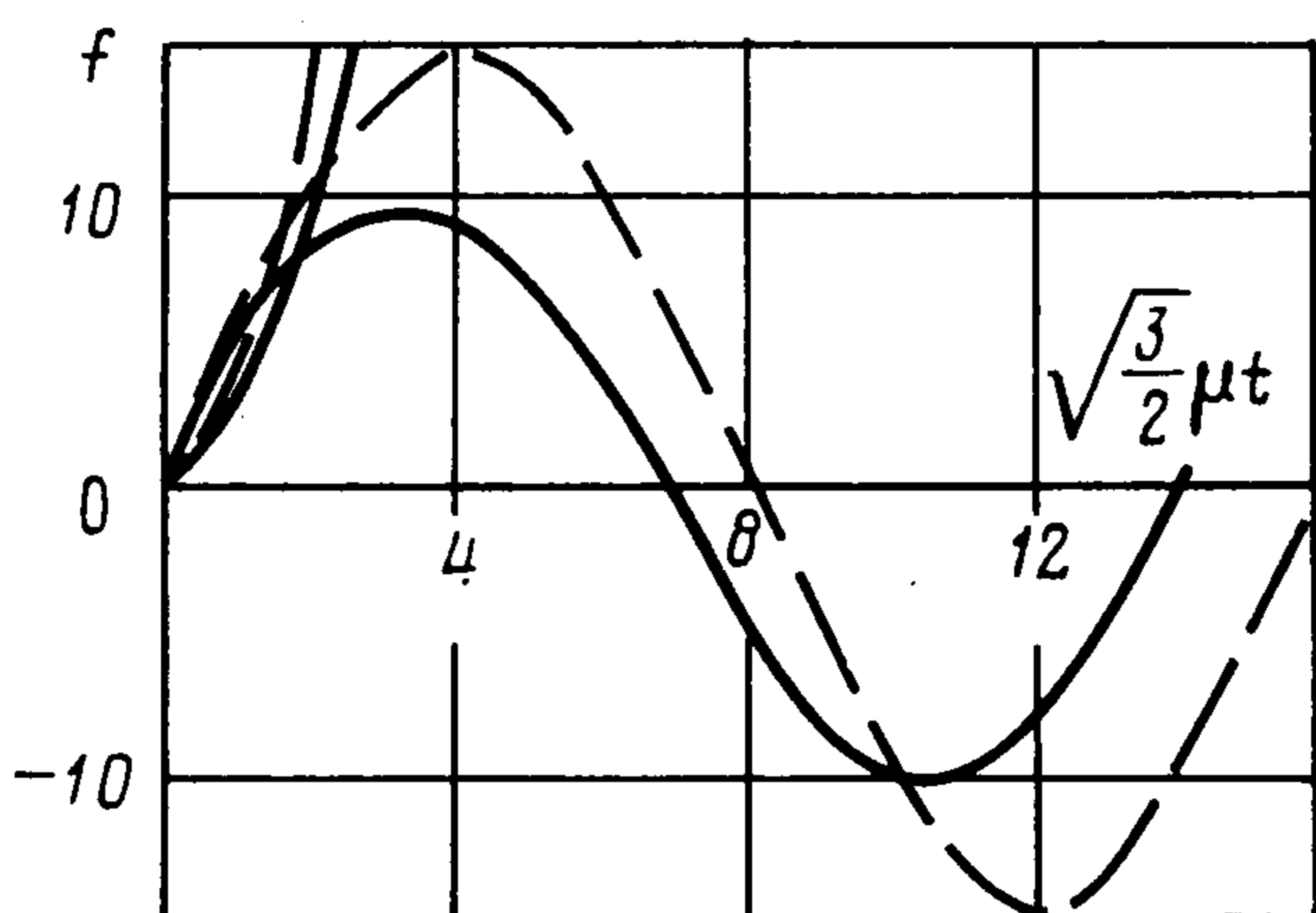
Для установления зависимости между  $M(t)$  и  $f(t)$  рассмотрим условия равновесия мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом  $r$  с центром в вершине (фиг. 2). Приравнивая нулю сумму момен-



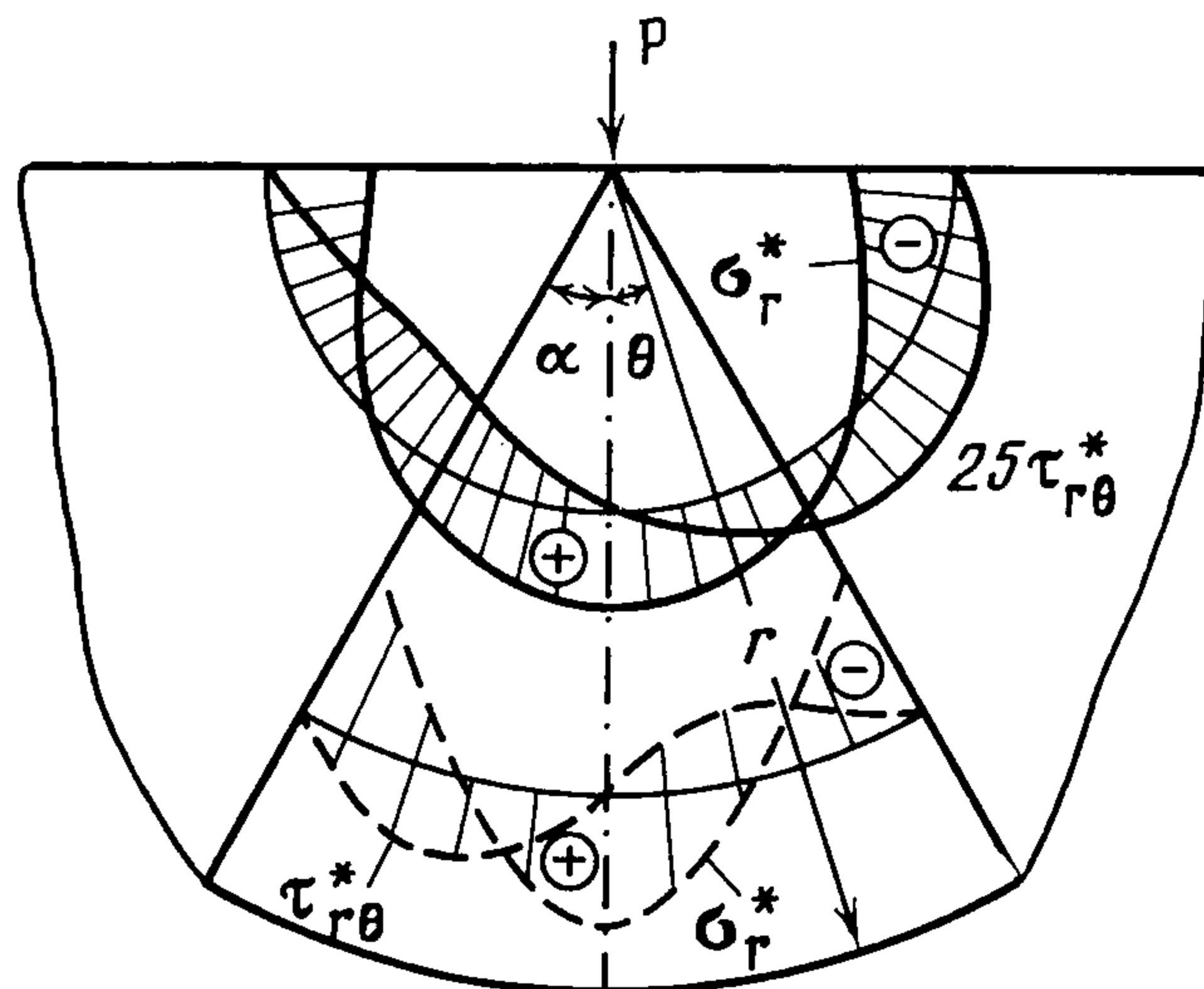
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

тов сил, действующих на это клиновидное тело, относительно вершины, будем иметь ( $M = M(t)$ )

$$(1.11) \quad M + \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta} r^2 d\theta = 0$$

Подставляя выражения  $\tau_{r\theta}$  в (1.11), находим

$$M = J f^{1/2}(t), \quad J = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau(\theta) d\theta$$

Формулы для напряжений и перемещений (1.8) окончательно переписутся в форме

$$(1.12) \quad \sigma_r = -\frac{M}{2Jr^2} \left[ \sigma - \frac{24\sqrt{2}s}{R} \right], \quad \sigma_\theta = -\frac{M}{2Jr^2} \sigma(\theta) \\ \tau_{r\theta} = -\frac{M}{Jr^2} \tau(\theta), \quad u = -k \frac{M^2}{J^2} \frac{s(\theta)}{r^3}, \quad v = -2k \frac{M^2}{J^2} \frac{\psi(\theta)}{r^3}$$

На основании численного решения краевой задачи (1.10) на ЭВМ ЕС-1022 методом пристрелки построены графики (1 мм соответствует 0,4 ед.) относительных напряжений  $\sigma_{ij}^* = -2Jr^2/M \sigma_{ij}$  при  $\nu = 30$ ,  $\alpha = \pi/6$  (фиг. 2).

2°. При  $M(t) = \text{const}$  и  $2\alpha = \pi/2$ , используя частное решение уравнения (1.9)  $\psi = \cos 2\theta$ , из (1.8) и (1.11) находим решение

$$(1.13) \quad \sigma_r = 2Mr^{-2} \sin 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = -Mr^{-2} \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0 \\ u = -1/6 kM^2 r^{-3} \sin 2\theta, \quad v = 1/6 kM^2 r^{-3} \cos 2\theta$$

Существует численный способ решения этой задачи для произвольных  $\alpha$  и  $n$  [9].

Случай  $n = 3$ . В соотношениях (1.3) — (1.6) положим  $n = 3$ . Уравнение (1.4) сводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1.14) \quad (\psi'' - 3\psi) \chi + v\psi = A \sin(\theta + \gamma) \\ \chi = [(\psi'' - 3\psi)^2 + 16\psi'^2]^{-1/3}$$

где  $A$  и  $\gamma$  — произвольные постоянные, а в (1.6)  $m = 4/3$ . График  $f(t)$  при  $f_0 = 0$  показан на фиг. 3 (обозначения те же, что на фиг. 1).

Формулы для напряжений и перемещений можно записать следующим образом:

$$(1.15) \quad \sigma_r, \sigma_\theta = f^{1/3} r^{-1} [A \cos(\theta + \gamma) - (4(1 \pm 1) \psi' \chi)] \\ \tau_{r\theta} = f^{1/3} r^{-1} \tau, \quad \tau = A \sin(\theta + \gamma) - v\psi \\ u = -kfr^{-2}\psi', \quad v = -kfr^{-2}\psi$$

Дифференциальное уравнение (1.14) можно свести к кубическому уравнению относительно  $(\psi'' - 3\psi)^{-1}$ . Определяя действительный корень этого уравнения, приходим к дифференциальному уравнению, которое при  $A = 0$  сводится к дифференциальному уравнению первого порядка. Однако для численного решения удобнее свести его к системе из двух уравнений первого порядка

$$(1.16) \quad \psi' = (6\sqrt{3})^{-1} s, \quad s' = 18\sqrt{3}\psi - 4\sqrt{3}v\psi s/T \\ T = T_+ - T_-, \quad T_\pm = [(s^2 + v^6\psi^6)^{1/2} \pm s]^{1/3}$$

1°. Рассмотрим бесконечный клин с углом раствора  $2\alpha$ , к вершине которого приложена сосредоточенная осевая сила  $P(t)$ . Исходя из условий задачи для системы уравнений (1.16) будем иметь краевые условия

$$(1.17) \quad \theta = 0, \psi = 0; \quad \theta = \alpha, \psi = 0$$

Рассматривая равновесие мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом  $r$  (фиг. 4), получим ( $P = P(t)$ )

$$(1.18) \quad P + 2 \int_0^\alpha (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = 0$$

После подстановки компонентов напряжений в (1.18) находим

$$(1.19) \quad P = Jf^{1/3}(t), \quad J = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha T \cos \theta d\theta - 2v \int_0^\alpha \psi \sin \theta d\theta$$

Формулы для напряжений и перемещений окончательно будут иметь вид

$$(1.20) \quad \sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{P}{Jr} T(\psi, s), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{vP}{Jr} \psi, \quad \sigma_\theta = 0 \\ u = -\frac{k}{6\sqrt{3}} \frac{P^3}{J^3} \frac{s}{r^2}, \quad v = -k \frac{P^3}{J^3} \frac{\psi}{r^2}$$

На основании численного решения краевой задачи (1.16)—(1.17) при  $v = 60$  построены графики  $\sigma_{ij}^* = -Jr/P \sigma_{ij}$  (фиг. 4). Сплошные линии соответствуют случаю  $\alpha = \pi/2$  (1 мм соответствует 4 ед.), а штриховые —  $\alpha = \pi/6$  (1 мм соответствует 0,1 ед.).

2°. Пусть бесконечный клин изгибается сосредоточенной силой  $P(t)$ , приложенной к вершине перпендикулярно оси. В этом антисимметричном случае краевые условия для системы уравнения (1.16)

$$(1.21) \quad \theta = 0, s = 0; \quad \theta = \alpha, \psi = 0$$

Рассматривая равновесие мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом  $r$ , будем иметь

$$(1.22) \quad P + 2 \int_0^\alpha (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0$$

Подставляя компоненты напряжений в (1.22), получаем зависимость между  $P(t)$  и  $f(t)$  по (1.19), а формулы напряжений сохраняют вид (1.20), причем

$$J = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\alpha} T \sin \theta d\theta + 2v \int_0^{\alpha} \psi \cos \theta d\theta$$

а функции  $\psi(\theta)$  и  $s(\theta)$  определяются из краевой задачи (1.16), (1.21).

Статическая задача сжатия клина для общего случая степенного упрочнения решена в [9, 10]. Динамические задачи для несжимаемых пластических сред в условиях плоской деформации рассмотрены в [11, 12].

**2. Осесимметричное деформирование.** Соотношения осесимметричного динамического деформирования рассматриваемой среды в сферических координатах представим в форме:

уравнения движения

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\varphi}) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений и соотношения между компонентами деформаций, перемещений и напряжений

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 &= k\sigma_0^n \\ \varepsilon_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} [(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2 + \\ &+ 6(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2 + \gamma_{r\varphi}^2)]^{1/2} \\ \sigma_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + \\ &+ 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2 + \tau_{r\varphi}^2)]^{1/2} \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \operatorname{ctg} \theta \\ 2\gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} k\sigma_0^{n-1} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma) \end{aligned}$$

Компоненты напряжений и перемещений представим следующим образом:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta - 2\kappa f^{1/n} r^{-\lambda/n} [(2\lambda - 3)\psi' + \lambda\psi \operatorname{ctg} \theta] \chi \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta - 2\kappa (\lambda - 3) f^{1/n} r^{-\lambda/n} (\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta) \chi \\ \sigma_\theta &= H + \rho k (2 - \lambda)^{-1} f^{1/n} r^{2-\lambda} (\psi'' + \psi \operatorname{ctg} \theta) + \\ &+ \kappa n \lambda^{-1} f^{1/n} r^{-\lambda/n} \{([\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)'] + \lambda(3 - \lambda)\psi] \chi\}' + \\ &+ [\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)'] + \lambda(3 - \lambda)\psi \chi \operatorname{ctg} \theta + \\ &+ 6(1 - \lambda)(\psi' + \psi \operatorname{ctg} \theta) \chi + 2\lambda n^{-1} [(2\lambda - 3)\psi' + \lambda\psi \operatorname{ctg} \theta] \chi \\ \tau_{r\theta} &= \kappa f^{1/n} r^{-\lambda/n} [\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)'] + \lambda(3 - \lambda)\psi \chi \\ \tau_{r\varphi} &= -\kappa \lambda f^{1/n} r^{-\lambda/n} \varphi \chi \sin \theta, \quad \tau_{\theta\varphi} = \kappa f^{1/n} r^{-\lambda/n} \varphi' \chi \sin \theta \\ \chi &= \{[\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)'] + \lambda(3 - \lambda)\psi\}^2 + 4(\lambda^2 - 3\lambda + 3)(\psi'^2 + \\ &+ \psi^2 \operatorname{ctg}^2 \theta) + 4(\lambda^2 - 3)\psi' \psi \operatorname{ctg} \theta + (\varphi'^2 + \lambda^2 \varphi^2) \sin^2 \theta\}^{(1-n)/2n} \\ u &= \kappa k f r^{1-\lambda} (\psi' + \psi \operatorname{ctg} \theta), \quad v = \kappa k (\lambda - 3) f r^{1-\lambda} \psi \\ w &= \kappa k f r^{1-\lambda} \varphi \sin \theta, \quad \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi = \varphi(\theta)$  — произвольная функция, а остальные обозначения сохраняются. Выражения (2.3) будут решением системы уравнений (2.1) —

(2.2), если  $\psi(\theta)$  и  $\varphi(\theta)$  удовлетворяют системе уравнений

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &([\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda(3 - \lambda)\psi] \chi)'' + ([\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + \\ &+ \lambda(3 - \lambda)\psi] \chi \operatorname{ctg} \theta)' + \lambda n^{-1}(3 - \lambda n^{-1})[\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + \\ &+ \lambda(3 - \lambda)\psi] \chi + 2\lambda n^{-1}[(2\lambda - 3)\psi' + \lambda\psi \operatorname{ctg} \theta] \chi' + \\ &+ 2\lambda n^{-1}(\lambda - 3)(\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta) \chi \operatorname{ctg} \theta + 6(1 - \lambda)[(\psi' + \\ &+ \psi \operatorname{ctg} \theta)\chi]' + \\ &+ \lambda n^{-1}(\lambda - 2)^{-1}[\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + (\lambda - 2)(\lambda - 3)\psi] = 0 \\ &(\varphi' \chi \sin^3 \theta)' + \lambda(\lambda n^{-1} - 3)\varphi \chi \sin^3 \theta + \nu \varphi \sin^3 \theta = 0 \end{aligned}$$

При исследовании кручения тела вращения следует принять в (2.3), (2.4)  $\psi(\theta) = H(t) = 0$ .

В случае  $\lambda = 0$  система уравнений (2.1), (2.2) допускает решение ( $g = g(t)$  — произвольная функция)

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta + \kappa \sqrt{3} g^{1/n} \cos 2\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - \kappa \sqrt{3} g^{1/n} \sin^2 \theta \\ \sigma_\theta &= H - \kappa (\sqrt{3}/2) g^{1/n} \cos 2\theta - \kappa (\sqrt{3}/48) \rho k g^{**} r^2 (1 - \\ &- 3 \cos^2 \theta) \\ \tau_{r\theta} &= -\kappa (\sqrt{3}/2) g^{1/n} \sin 2\theta, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = \omega = 0 \\ u &= -\kappa (\sqrt{3}/24) g (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad v = -\kappa (\sqrt{3}/16) g r \sin 2\theta \end{aligned}$$

Случай  $n = 2$ . В соотношениях (2.3), (2.4), принимая  $n = 2$ , а также  $\varphi(\theta) = H(t) = 0$ , для компонентов напряжений и перемещений, отличных от нуля, получаем

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta - 2\kappa f^{1/2} r^{-2} (5\psi' + 4\psi \operatorname{ctg} \theta) \chi \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta - 2\kappa f^{1/2} r^{-2} (\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta) \chi \\ \sigma_\theta &= 1/2 \kappa f^{1/2} r^{-2} \{([\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' - 4\psi] \chi)' + \\ &+ [\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' - 4\psi] \chi \operatorname{ctg} \theta + 2(\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta) \chi + \\ &+ \nu(\psi' + \psi \operatorname{ctg} \theta)\} \\ \tau_{r\theta} &= \kappa f^{1/2} r^{-2} [\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' - 4\psi] \chi \\ \chi &= \{[\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' - 4\psi]^2 + 28(\psi'^2 + \psi^2 \operatorname{ctg}^2 \theta) + \\ &+ 52\psi' \psi \operatorname{ctg} \theta\}^{-1/4} \\ u &= \kappa k f r^{-3} (\psi' + \psi \operatorname{ctg} \theta), \quad v = \kappa k f r^{-3} \psi \end{aligned}$$

Функция  $f = f(t)$  определяется согласно квадратуре (1.6) при  $m = 3/2$ , а  $\psi(\theta)$  удовлетворяет уравнению

$$(2.7) \quad \begin{aligned} &([\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' - 4\psi] \chi)'' + ([\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' - \\ &- 4\psi] \chi \operatorname{ctg} \theta)' + \\ &+ 2[\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' - 4\psi] \chi + 2[(\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta) \chi]' + \\ &+ 4(\psi' - \psi \operatorname{ctg} \theta) \chi \operatorname{ctg} \theta + 1/2 \nu [\psi'' + (\psi \operatorname{ctg} \theta)' + 2\psi] = 0 \end{aligned}$$

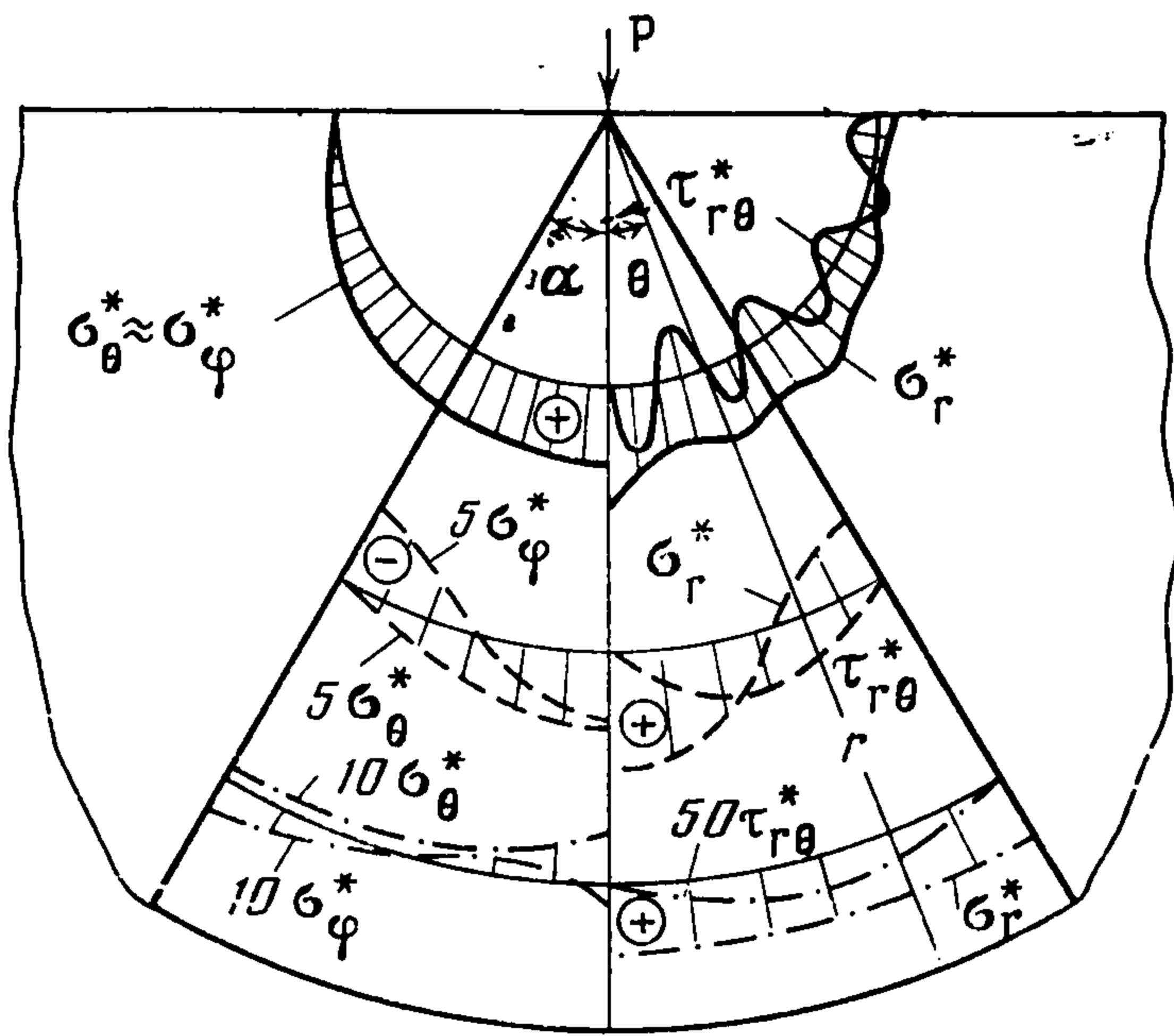
1°. Рассмотрим бесконечный конус с углом раствора  $2\alpha$ , сжатый осевой силой  $P(t)$ . Уравнение (2.7) сводится к системе из четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \psi' &= s - \psi \operatorname{ctg} \theta, \quad s' = 4\psi' + \tau \omega \\ \tau' &= \sigma - \nu s - \tau \operatorname{ctg} \theta - 2\omega^{-1} (s - 2\psi \operatorname{ctg} \theta) \\ \sigma' &= -2\tau - 2\nu\psi - 4\omega^{-1} (s - 2\psi \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta \\ \omega &= (\sqrt{2}/2) \{\tau^2 + [\tau^4 + 16(7s^2 - s\psi \operatorname{ctg} \theta + \psi^2 \operatorname{ctg}^2 \theta)]^{1/2}\}^{1/2} \end{aligned}$$

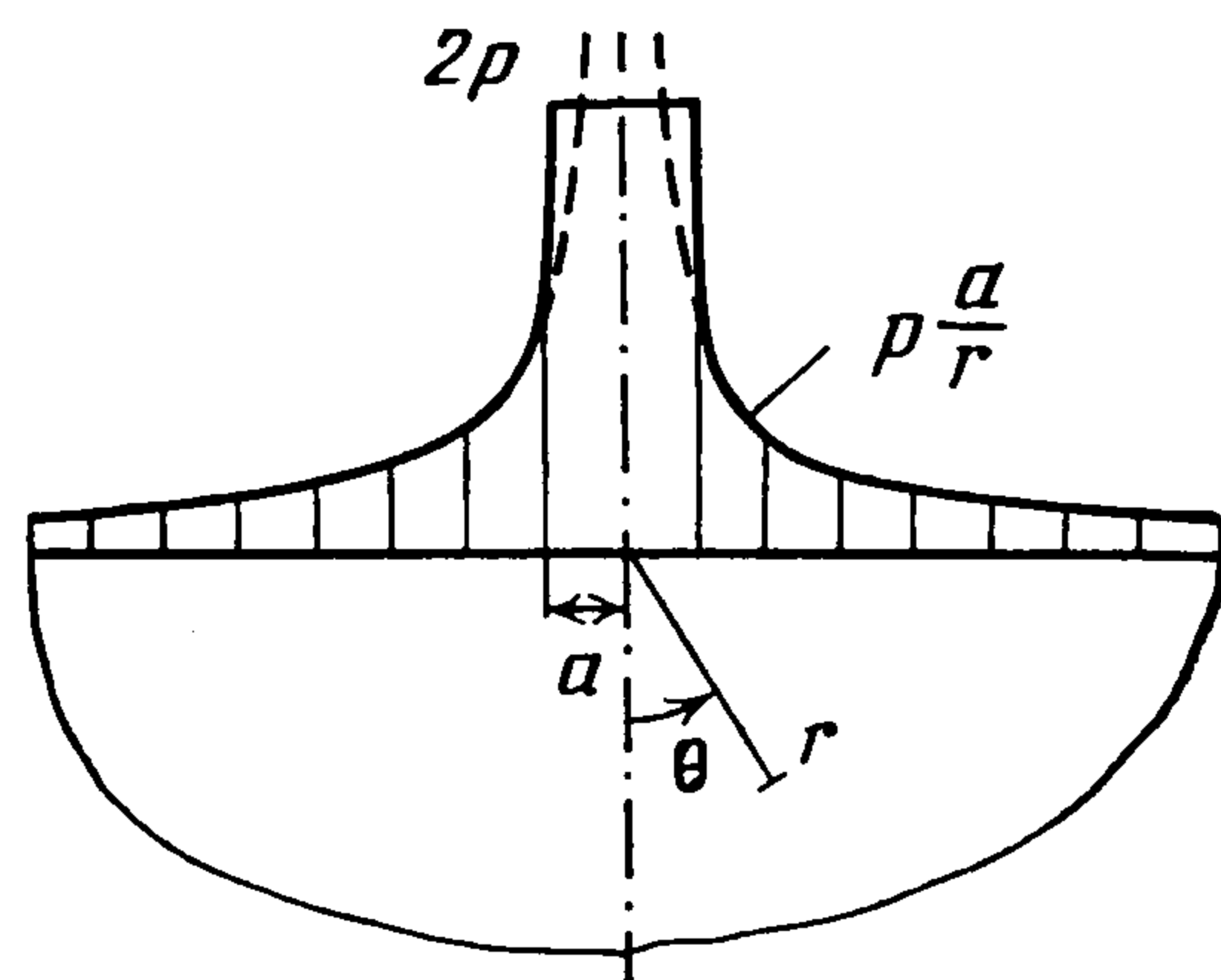
Граничные условия для системы (2.8)

$$(2.9) \quad \theta = 0, \tau = \psi = 0; \theta = \alpha, \sigma = \tau = 0$$

Для установления зависимости между  $P(t)$  и  $f(t)$  рассматривается равновесие и мысленно выделенного конусообразного тела, ограниченного про-



Фиг. 5



Фиг. 6

извольной сферической поверхностью радиуса  $r$ , с центром в вершине (фиг. 5). Будем иметь

$$(2.10) \quad P + 2\pi \int_0^\alpha (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta = 0$$

Подставляя в (2.10) выражения  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$ , представленные через  $\psi$ ,  $s$ ,  $\tau$  и  $\sigma$ , получаем

$$(2.11) \quad P = \pi J f^{1/2}$$

$$J = J(\alpha) = \int_0^\alpha \left[ \sigma - \frac{4}{\omega} (5s - \psi \operatorname{ctg} \theta) \right] \cos \theta \sin \theta d\theta - 2 \int_0^\alpha \tau \sin^2 \theta d\theta$$

Для напряжений и перемещений окончательно получим

$$(2.12) \quad \sigma_r = -\frac{P}{2\pi J r^2} \left[ \sigma - \frac{4}{\omega} (5s - \psi \operatorname{ctg} \theta) \right], \quad \sigma_\theta = -\frac{P \sigma(\theta)}{2\pi J r^2}$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{P}{2\pi J r^2} \left[ \sigma - \frac{4}{\omega} (s - 2\psi \operatorname{ctg} \theta) \right], \quad \tau_{r\theta} = -\frac{P}{\pi J r^2} \tau(\theta)$$

$$u = -k \frac{P^2}{\pi^2 J^2} \frac{s(\theta)}{r^3}, \quad v = -k \frac{P^2}{\pi^2 J^2} \frac{\psi(\theta)}{r^3}$$

На основании численного решения краевой задачи (2.8), (2.9) на фиг. 5 при  $\nu = 30$  представлены [графики  $\sigma_{ij}^* = -2\pi J r^2 / P \sigma_{ij}$ . Сплошные линии соответствуют  $\alpha = \pi/2$  (1 мм соответствует 10 ед.), а штриховые —  $\alpha = \pi/6$  (1 мм соответствует 0,5 ед.).

2°. Пусть в точке бесконечного тела, принятой за начало координат, по оси  $\theta = 0$  приложена сосредоточенная сила  $P(t)$ . Систему уравнений (2.8) в этом случае следует интегрировать при краевых условиях  $\theta = 0, \pi, \tau = \psi = 0$ . Условие равновесия мысленно выделенного шара с произвольным радиусом  $r$  и центром в начале координат записывается в виде (2.10) при  $\alpha = \pi$ . Формулы для напряжений и перемещений, а также зависимость  $P$  от  $f(t)$  определяются согласно (2.11), (2.12) при  $J = J(\pi)$ .

Случай  $n = 3$ . Формулы для напряжений и перемещений (2.3) при  $n = 3$  без деформаций кручения можно записать в виде

$$(2.13) \quad \sigma_r, \sigma_\theta = -f^{1/3} r^{-1} \left[ \left( \frac{s'}{\omega} \right)' + \frac{s'}{\omega} \operatorname{ctg} \theta - (9 \pm 3) \frac{s}{\omega} - \nu s \right], \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -f^{1/3} r^{-1} \frac{s'}{\omega}, \quad \omega = (s'^2 + 12s^2)^{1/3}, \quad u = -kf \frac{s}{r^2}, \quad v = 0$$

где  $s$  удовлетворяет уравнению

$$(2.14) \quad \left( \frac{s'}{\omega} \right)'' + \left( \frac{s'}{\omega} \operatorname{ctg} \theta \right)' + 2 \frac{s'}{\omega} - 6 \left( \frac{s}{\omega} \right)' - \nu s' = 0$$

а  $f(t)$  определяется согласно (1.6) при  $m = 4/3$ .

Рассмотрим полупространство, на поверхности которого приложены нагрузки (фиг. 6)

$$(2.15) \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad \sigma_{\theta} = -p \frac{a}{r} \cos \beta, \quad \tau_{r\theta} = p \frac{a}{r} \sin \beta, \quad p = \frac{1}{a} f^{1/3}(t)$$

где  $a$  и  $\beta$  — заданные параметры. Вводя обозначение  $s' = \tau\omega$ , из выражения  $\omega$  в (2.13) приходим к кубическому уравнению относительно  $1/s'$ . Определив действительный корень, уравнение (2.14) можно свести к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$s' = 6\tau s/\Omega, \quad \tau' = \sigma + \nu s - \tau \operatorname{ctg} \theta + \Omega, \quad \sigma' = -2\tau \\ \Omega = \Omega_+ - \Omega_-, \quad \Omega_{\pm} = [(\tau^6 + 81s^2)^{1/2} \pm 9s]^{1/3}$$

Краевые условия

$$\theta = 0, \quad \tau = 0; \quad \theta = \pi/2, \quad \sigma = \cos \beta, \quad \tau = -\sin \beta$$

Формулы для напряжений и перемещений окончательно запишутся в виде

$$\sigma_r = -p (a/r) (\sigma - \Omega), \quad \sigma_{\theta} = -p (a/r) \sigma (\theta), \quad \sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} \\ \tau_{r\theta} = -p (a/r) \tau (\theta), \quad u/a = kp^3 (a/r)^2 s (\theta), \quad v = 0$$

При отсутствии касательных нагрузок на поверхности  $\theta = \pi/2$  следует принять  $\beta = 0$ .

**3. Статический случай ( $\nu = 0$ ).** Рассмотрим статическое деформирование тел со степенным упрочнением  $\varepsilon_0 = k\sigma_0^n$ .

1°. Пусть на одной из бесконечных граней четвертьплоскости приложено равномерно распределенное давление  $p$ . Полагая в (1.7)  $g(t) = \operatorname{const}$   $M(t) = \operatorname{const}$  и используя граничные условия  $\sigma_{\theta} = -p$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_{\theta} = 0$  при  $\theta = \pi/2$ , окончательно получаем

$$\sigma_r, \sigma_{\theta} = -1/2 p (1 \mp \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -1/2 p \sin 2\theta \\ u = 1/2 k (1/2 p)^n r \cos 2\theta - M \sin (\theta + \delta) \\ v = -1/2 k (1/2 p)^n r \sin 2\theta - M \cos (\theta + \delta)$$

Существует численный метод решения этой задачи для произвольного раствора клина [9].

2°. Рассмотрим бесконечный конус с углом раstra  $2\alpha$ , сжатый осевой силой  $P$ , приложенной к вершине (обобщение решения Бусинеска при несжимаемости материала). Принимая  $\nu = 0$ ,  $\lambda = 2n$ , а также  $\varphi(\theta) = 0$ , уравнение (2.4) сведем к системе из четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$(3.1) \quad \psi' = s - \psi \operatorname{ctg} \theta, \quad s' = 2n(2n - 3)\psi + \tau\omega \\ \tau' = \sigma - \tau \operatorname{ctg} \theta - 1/2 S, \quad \sigma' = -2\tau - S \operatorname{ctg} \theta \\ S = 4(2n - 3)\omega^{-1}(s - 2\psi \operatorname{ctg} \theta)$$

причем  $\omega$  определяется из степенного уравнения

$$\omega^{2n/(n-1)} - \tau^2 \omega^2 - 4(4n^2 - 6n + 3)s^2 + \\ + 4(2n - 3)^2 (s - \psi \operatorname{ctg} \theta) \psi \operatorname{ctg} \theta = 0$$

Используя соответствующие выражения для напряжений и перемещений (2.3), приходим к краевым условиям для системы (3.1)

$$\theta = 0, \quad \tau = \psi = 0; \quad \theta = \alpha, \quad \sigma = \tau = 0$$

Из уравнения (2.10) при  $\nu = 0$  находим

$$P = \pi J f^{1/n}, \quad J = J(\alpha, n) = \int_0^\alpha \left[ \sigma - \frac{4n-3}{2n-3} S - \frac{12}{\omega} (2n-1) \psi \operatorname{ctg} \theta \right] \cos \theta \sin \theta d\theta - 2 \int_0^\alpha \tau \sin^2 \theta d\theta$$

Формулы для напряжений и перемещений

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi J r^2} \left[ \sigma - \frac{4n-3}{2n-3} S - \frac{12}{\omega} (2n-1) \psi \operatorname{ctg} \theta \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi J r^2} \sigma(\theta), \quad \sigma_\varphi = -\frac{P}{2\pi J r^2} (\sigma - S), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{P}{\pi J r^2} \tau(\theta) \\ u &= -k \frac{P^n}{\pi^n J^n} \frac{s(\theta)}{r^{2n-1}}, \quad v = -(2n-3) k \frac{P^n}{\pi^n J^n} \frac{\psi(\theta)}{r^{2n-1}} \end{aligned}$$

На фиг. 5 штрихпунктирными линиями (1 мм соответствует 2 ед.) показаны результаты численного расчета при  $n = 2$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\nu = 0$ .

При  $n = 1$ , полагая  $\psi = -\sin \theta$  и  $\sigma = \tau = 0$ , из (3.2) получаем соответствующие формулы для линейно-упругого материала.

В [13] рассматривалось, в частности, напряженное состояние полупространства со степенным упрочнением материала от действия сосредоточенной нормальной силы, где удается определить перемещение точки поверхности полупространства с точностью постоянного множителя.

3°. Пусть в точке бесконечного тела в начале координат по оси  $\theta = 0$  приложена сосредоточенная сила  $P$ . Систему уравнений (3.1) в этом случае следует интегрировать при краевых условиях  $\theta = 0, \pi, \tau = \psi = 0$ . Формулы для напряжений и перемещений определяются по (3.2), где надо принять  $J = J(\pi, n)$ .

4°. Рассмотрим конус, на боковой поверхности которого действуют равномерно распределенные нормальные и касательные силы. Исходя из (2.5) и удовлетворяя граничным условиям  $\sigma_\theta = -p, \tau_{r\theta} = q$  при  $\theta = \alpha$ , находим

$$\begin{aligned} \sigma_r, \sigma_\theta &= -p - q (\cos 2\alpha \pm \cos 2\theta) / \sin 2\alpha \\ \sigma_\varphi &= -p + q \operatorname{tg} \alpha, \quad \tau_{r\theta} = q \sin 2\theta / \sin 2\alpha \\ u &= \frac{\sqrt{3}}{24} k \left( \frac{2q}{\sqrt{3}} \right)^n \frac{r (3 \cos^2 \theta - 1)}{\sin^n 2\alpha}, \quad v = -\frac{\sqrt{3}}{16} k \left( \frac{2q}{\sqrt{3}} \right)^n \frac{r \sin 2\theta}{\sin^n 2\alpha} \end{aligned}$$

5°. Пусть на поверхности  $\theta = \pi/2$  полупространства (фиг. 6) приложены распределенные нагрузки по закону,

$$\sigma_\theta = -p (a/r)^m \cos \beta, \quad \tau_{r\theta} = p (a/r)^m \sin \beta, \quad 0 < m < 2$$

Случай  $m = 1$  показан на фиг. 6.

Принимая  $\nu = 0, \lambda = mn$ , а также  $\varphi(\theta) = 0$ , уравнение (2.4) сведем к системе из четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \psi' &= s - \psi \operatorname{ctg} \theta, \quad s' = mn(mn-3)\psi + \tau\omega \\ \tau' &= \sigma - \tau \operatorname{ctg} \theta - 2\omega^{-1} \{ m(2mn-3) + 3(1-mn) \} s - \\ &\quad - m(mn-3)\psi \operatorname{ctg} \theta \\ \sigma' &= m(m-3)\tau - 2m\omega^{-1}(mn-3)(s - 2\psi \operatorname{ctg} \theta) \operatorname{ctg} \theta \end{aligned}$$

где  $\omega$  определяется из степенного уравнения

$$\omega^{2n/(n-1)} - \tau^2 \omega^2 - 4(m^2 n^2 - 3mn + 3)s^2 + 4(mn-3)^2 (s - \psi \operatorname{ctg} \theta) \psi \operatorname{ctg} \theta = 0$$

Краевые условия

$$\theta = 0, \quad \tau = \psi = 0; \quad \theta = \pi/2, \quad \sigma = m \cos \beta, \quad \tau = -\sin \beta$$

Формулы для напряжений и перемещений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{p}{m} \left(\frac{a}{r}\right)^m \left[ \sigma - \frac{m(2mn-3)}{2(2n-3)} S - \frac{6m(mn-1)}{\omega} \psi \operatorname{ctg} \theta \right] \\ \sigma_\varphi &= -\frac{p}{m} \left(\frac{a}{r}\right)^m \left[ \sigma - \frac{m(mn-3)}{2(2n-3)} S \right], \quad \sigma_\theta = -\frac{p}{m} \left(\frac{a}{r}\right)^m \sigma(\theta) \\ \tau_{r\theta} &= -p \left(\frac{a}{r}\right)^m \tau(\theta), \quad \frac{u}{a} = -kp^n \left(\frac{a}{r}\right)^{mn-1} s(\theta) \\ \frac{v}{a} &= -(mn-3) kp^n \left(\frac{a}{r}\right)^{mn-1} \psi(\theta)\end{aligned}$$

Когда на поверхности  $\theta = \pi/2$  приложены только нормальные силы, следует полагать  $\beta = 0$ .

Аналогично [14] рассматриваются задачи динамического деформирования составных тел, контактирующих с координатными поверхностями, имеющими различные модули деформации  $k$  и одинаковые степени упрочнения  $n$ .

Автор благодарит С. С. Григоряна за обсуждение работы и замечания, а также Н. Б. Сафаряна за помощь при выполнении численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Разматулин Х. А., Шапиро Г. С.* Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде.— Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 2, с. 68—89.
2. *Разматулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
4. *Новацкий В. К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
5. *Kaliski S.* On certain equations of dynamics of an elastic/viscoplastic body. The strain hardening properties and the influence of strain rate.— Bull. Acad. Pol. sci. Ser. Sci. techn., 1963, v. 11, No. 7, p. 239—243.
6. *Григорян С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1057—1072.
7. *Никитин Л. В.* Распространение упруговязкопластических волн в толстостенной трубе.— Изв. вузов. Машиностроение, 1958, № 3—4, с. 14—23.
8. *Кукуджанов В. Н.* О численном решении задач распространения упруговязкопластических волн.— В кн.: Распространение упругих и упругопластических волн. Материалы 5-го Всесоюз. симпозиума. Алма-Ата: Наука, 1973, с. 223—230.
9. *Соколовский В. В.* Плоское равновесие пластического клина.— ПММ, 1950, т. 14, вып. 4, с. 391—404.
10. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1959, т. 12, № 2, с. 77—105.
11. *Агабабян Е. Х.* Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки.— Укр. мат. журн., 1953, т. 5, № 3, с. 325—332.
12. *Задоян М. А.* Об одном классе решений плоской динамической задачи теории пластичности.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1981, т. 260, № 1, с. 47—50.
13. *Кузнецов А. И.* Вдавнение жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, с. 481—491.
14. *Задоян М. А.* Некоторые задачи концентрации напряжений в угловой точке контактной поверхности составного тела со степенным упрочнением.— Докл. АН АрмССР, 1982, т. 74, № 1, с. 18—25.