Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 539.3

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Мисюра В. А.

Строятся оценки погрешности решений задач геометрически линейной теории упругости при малых градиентах перемещений. Показано, что решения геометрически нелинейной и соответствующей ей линейной задач в норме L_2 различаются членами порядка самих градиентов перемещений. Устанавливаются зависящие от геометрии упругого тела в недеформируемом состоянии некоторые достаточные условия, при которых процедура линеаризации законна при малых деформациях. Выясняются причины, по которым линеаризация нелинейной задачи при малых деформациях для тел типа оболочки или стержня может привести к ошибке.

Еще Кирхгоф [1] заметил, что принятое в классической (геометрически линейной) теории упругости отождествление конфигураций деформированного и недеформированного состояний тела служит дополнительной гипотезой математического характера. Действительно, задачу геометрически нелинейной теории в случае, когда градиенты перемещений малы, можно рассматривать как задачу с малым параметром. Приписывая градиентам перемещений порядок малости Δ и отбрасывая во всех соотношениях геометрически нелинейной теории члены порядка Δ и выше по сравнению с главными, получают уравнения геометрически линейной теории. Ясно, что такая процедура вносит погрешность в решение геометрически нелинейной задачи. Поэтому важно оценить ее и тем самым обосновать законность линеаризации геометрически нелинейных задач при малых градиентах перемещений.

1. Погрешность линейной теории при малых градиентах перемещений. Ниже под оценкой погрешности решений линейной теории будет пониматься оценка в какой-либо норме разности $p^\circ - p^*$, где p^* — решение геометрически нелинейной задачи, а p° — соответствующей ей геометрически линейной задачи (p°, p^* могут быть полями напряжений, деформаций или перемещений точек упругого тела). Погрешность решений не следует путать с погрешностью самих уравнений линейной теории. Последняя определяется как относительная величина отбрасываемых малых членов по сравнению с главными в соотношениях геометрически нелинейной теории и равна Δ.

Пусть x^i — декартовы координаты наблюдателя в R^3. Обозначим ξ^a индивидуальные лагранжевы координаты точек упругого тела. Далее индексы $s, j, k \ldots, a, b, c \ldots$ принимают значения 1, 2, 3; первые соответствуют проекциям на оси координат x^i, вторые — на оси ξ^a. Координаты точек упругого тела в недеформируемом состоянии будем обозначать $x^{\circ l}(\xi^a)$, в деформируемом — $x^i(\xi^a)$. Параметры ξ^a в недеформируемом состоянии задают в R^3 некоторую криволинейную систему координат, метрический тензор которой $g_{ab}{}^\circ \approx \delta_{ij} x_a{}^{\circ i} x_b{}^{\circ j}$; $x_a{}^{\circ i} \equiv x_{i,a}{}^\circ \equiv \partial dx^{\circ i}/\partial\xi^a$. Деформации сплошной среды описываются тензором $\varepsilon_{ab} = (x_a{}^i x_{i,a} - g_{ab}{}^\circ)/2$, $x_a{}^i \equiv x_{i,a} \equiv \partial x^2/\partial\xi^a$. Через вектор перемещений он выражается следующим образом:

$$\varepsilon_{ab} = (\overset{\circ}{x}{}_a^i w_{i,b} + \overset{\circ}{x}{}_b^i w_{i,a} + w^i_{,a} w_{i,b})/2 \tag{1.1}$$
$$w^i(\xi^a) = x^i(\xi^a) - x^{\circ i}(\xi^a)$$

Далее опускание индексов $a, b, c\ldots$ будет производиться при помощи метрики $g_{ab}{}^\circ$.

Примем, что упругое тело, которое в недеформируемом состоянии занимает область V, деформируется под действием некоторых «мертвых» массовых F_i и поверхностных сил P_i, заданных на части S_σ границы ∂V области V. Истинное' решение поставленной задачи находится из условия стационарности функционала Лагранжа [2, 3]|

$$I(x^i(\xi^a)) = \int\limits_V U(\varepsilon_{ab})\,d\tau - \int\limits_V F_i x^i\,d\tau - \int\limits_{S_\sigma} P_i x^i\,d\sigma \tag{1.2}$$

на множество функций $x^i(\xi^a)$, удовлетворяющих ограничениям

$$x^i(\xi^a)|_{S_u} = \bar{x}^i, \quad S_u = \partial V \setminus S_\sigma \tag{1.3}$$

($d\tau$ — элемент объема области V, $d\sigma$ — элемент площади поверхности S_σ). Условия (1.3) означают, что на части границы упругого тела S_u заданы перемещения точек.

Далее рассматривается физически линейное упругое тело. Плотность упругой энергии для него имеет вид $U = {}^1/_2\, E^{abcd}\varepsilon_{ab}\varepsilon_{cd}$ (F^{abcd} — тензор упругих модулей).

Уравнения Эйлера вариационной задачи (1.2), (1.3) записываются следующим образом:

$$p^a_{i;a} + F_i = 0, \quad p_i{}^a = \frac{\partial U}{\partial x_a{}^i} = x_{i,b}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ab}} = \sigma^{ac}x_{ic} \tag{1.4}$$

$$p_i{}^a n_a|_{S_\sigma} = P_i \tag{1.5}$$

где $p_i{}^a$ — тензор напряжений Пиола — Кирхгофа, n_a — компоненты вектора нормали к S_σ; точка с запятой означает операцию ковариантного дифференцирования относительно связности системы координат ξ^a в недеформируемом состоянии. Уравнения (1.4), (1.5) представляют собой замкнутую систему уравнений геометрически нелинейной теории упругости для физически линейного материала.

Замкнутая система уравнений линейной теории содержит граничные условия (1.3), (1.5), уравнения равновесия (1.6), уравнения состояния, связывающие тензор напряжений σ^{ab} с деформациями (1.7) и линейную связь между деформациями и напряжениями (1.8):

$$\sigma^{ab}_{;b} + F^a = 0 \tag{1.6}$$

$$\sigma^{ab} = \partial U/\partial\varepsilon_{ab} \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{ab} = (x_a{}^{oi}w_{i,b} + x_b{}^{oi}w_{i,a})/2 \tag{1.8}$$

Техника получения оценок погрешности решений линейной теории при малых градиентах перемещений базируется на тождестве Прагера — Синга [4]. Сформулируем его.

Пусть $\sigma_{ab}{}^\circ$ — истинное решение линеаризованной задачи. Обозначим через $\bar{\sigma}_{ab}$ статически допустимое поле напряжений в линейной задаче, т. е. поле напряжений, удовлетворяющее уравнениям (1.6) и краевым условиям (1.5). Если w^i — поле перемещений точек упругого тела, удовлетворяющее кинематическим условиям (1.3), то поле напряжений σ_{ab}, соответствующее полю перемещений w^i по формулам (1.8), (1.7), называют кинематически допустимым.

Интеграл

$$E^*(\sigma_{ab}) = \frac{1}{2}\int\limits_V E^{*abcd}\sigma_{ab}\sigma_{cd}\,d\tau$$

где E^{*abcd} — тензор упругих податливостей — определяет дополнительную энергию геометрически и физически линейного упругого тела. Было доказано [4] тождество

$$(1.9)\qquad E^*[\overset{\circ}{\sigma}_{ab}-(\bar{\sigma}_{ab}+\sigma_{ab})/2]=E^*(\bar{\sigma}_{ab}-\sigma_{ab})/4$$

Так как дополнительная энергия — положительно-определенная квадратичная форма по σ_{ab}, то $E^{*1/2}$ можно отождествить с нормой $L_2(V)$ на пространстве всевозможных полей напряжений:

$$(1.10)\qquad \alpha\|\sigma_{ab}\|^2\leqslant E^*(\sigma_{ab})\leqslant\gamma\|\sigma_{ab}\|,\quad \|\sigma_{ab}\|=\Big[\int\limits_V\sigma^{ab}\sigma_{ab}\,d\tau\Big]^{1/2}$$

Постоянные α и γ зависят только от тензора упругих податливостей E^{*abcd}.

Тождество (1.9) показывает, что поле напряжений $(\bar{\sigma}_{ab}+\sigma_{ab})/2$ хорошо приближает истинное решение задачи в норме L_2, если только дополнительная энергия мала на разности статически и кинематически допустимых полей напряжений. Ниже по решению нелинейной задачи σ_{ab}^* строятся поля $\bar{\sigma}_{ab}$, σ_{ab}, поточечная разность между которыми — величина порядка Δ^2, где Δ — масштаб изменения градиентов перемещений, определяемая соотношением

$$\Delta=\sup_V(\delta^{ij}w^*_{k,i}w^{*k}_{,j})^{1/2}$$

(w^{*i} — поле перемещений точек упругого тела, являющееся решением геометрически нелинейной задачи). В норме L_2 указанная разность будет величиной порядка $\Delta^2\,|V|^{1/2}$ ($|V|$ — объем области V), что в силу (1.9), (1.10) дает требуемую оценку погрешности решений геометрически линейной теории в норме L_2 при малых градиентах перемещений.

Теорема. Погрешность решений геометрически линейной теории упругости по сравнению с геометрически нелинейной определяется неравенствами

$$(1.11)\qquad \begin{aligned}&\|\sigma_{ij}{}^\circ-\sigma_{ij}{}^*\|\leqslant C_1\Delta^2|V|^{1/2},\quad \|\varepsilon_{ij}{}^\circ-\varepsilon_{ij}{}^*\|\leqslant C_2\Delta^2|V|^{1/2}\\ &\|w_i{}^\circ-w_i{}^*\|\leqslant C_3\Delta^2|V|^{1/2}\end{aligned}$$

где $\sigma_{ij}{}^*$, $\varepsilon_{ij}{}^*$, $w_i{}^*$ — решение геометрически нелинейной задачи, $\sigma_{ij}{}^\circ$, $\varepsilon_{ij}{}^\circ$, $w_i{}^\circ$ — решение соответствующей ей геометрически линейной, Δ — масштаб изменения градиентов перемещений в нелинейной задаче. Последнее неравенство (1.11) предполагает отсутствие перемещений упругого тела как твердого. Постоянные C_1, C_2, C_3 зависят только от тензора упругих модулей E^{ijkl}. Постоянная C_3, кроме того, зависит и от геометрии области, которую упругое тело занимает в недеформируемом состоянии.

Доказательство. Пусть $p_i{}^{*a}$ — тензор Пиола — Кирхгофа, соответствующий решению нелинейной задачи. Для простоты дальнейших рассуждений положим $x^{\circ i}(\xi^a)=\xi^i$ (в недеформируемом состоянии лагранжевы координаты совпадают с декартовыми). Это позволяет отождествить индексы $i, j, k\ldots$ с $a, b, c\ldots$. Тогда уравнения равновесия нелинейной теории (1.4) принимают вид $p,_j{}^{ij}+F^i=0$ и совпадают с уравнениями равновесия $\sigma,_j{}^{ij}+F^i=0$ геометрически линейной теории. Отсюда следует, что поле напряжений Пиола — Кирхгофа $p_{ij}{}^*$ является статически допустимым в геометрически линейной задаче (статические краевые условия (1.5) для линейной и нелинейной задач общие).

Кинематически допустимое поле напряжений σ_{ij}, соответствующее полю перемещений w_i^*, имеет вид $\sigma^{ij} = E^{ijkl}(w_{k,l}^* + w_{l,k}^*)/2$. Тогда

$$(1.12)\qquad \left| x_l^{*i}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{lj}} - \sigma^{ij}\right| = | w_{,l}^{*i}E^{jlmn}(w_{m,n}^* + w_{n,m}^* + w_{,m}^{*s}w_{s,m}^*)/2 + E^{ijmn}w_{,m}^{*s}w_{s,n}^*/2 | \leqslant \varkappa\Delta^2$$

где $\varkappa$ не зависит от Δ и является лишь функцией упругих постоянных материала.

Выберем в качестве статически допустимого в линейной задаче поле напряжений $p^{ij} : \overline{\sigma}^{ij} = p^{ij}$. Так как $E^*(\sigma_{ij}^\circ - \sigma_{ij}) \leqslant E^*(\sigma_{ij} - {}^-{}_{ij})$, то, используя (1.10), (1.12), а также условие, что $p_{ij}^* = \sigma_i^{*k}(\delta_{kj} + w_{k,j}^*)$, а σ_{kl}^* — величина порядка Δ, получим первую оценку (1.11). Из нее, в силу линейности закона Гука, сразу следует оценка погрешности геометрически линейной теории по деформациям (вторая оценка (1.11)).

Покажем, что аналогичная оценка справедлива и для полей перемещений. Предположим, что перемещения упругого тела как твердого исключены какими-либо ограничениями. Обозначим $\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}$ линеаризованный тензор деформаций, соответствующий полю перемещений $w_i^* : \varepsilon_{ij} = (w_{i,j}^* + w_{j,i}^*)/2$. Как следствие неравенства Корна

$$(1.13)\qquad \| (\delta^{ij}w_{,i}^{*k}w_{k,j}^*)^{1/2} \| \leqslant K_0 \| \varepsilon_{ij} \|$$

при сделанных ограничениях на поля перемещений справедлива оценка

$$(1.14)\qquad \| w_i^* \| = \left[\int\limits_V w^{*i}w_i^*\, d\tau \right]^{1/2} \leqslant K \| \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} \|$$

Отсюда

$$1.15)\qquad \| w_i^\circ - w_i^* \| \leqslant K \| \varepsilon_{ij}^\circ - \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} \|$$

Постоянные K_0, K в (1.13), (1.14) зависят только от геометрии области V. Так как $\varepsilon_{ij}^* = \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} + (w_{,i}^{*k}w_{k,j}^*)/2$, то из (1.13) следует неравенство

$$(1.16)\qquad \| \varepsilon_{ij}^* - \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} \| \leqslant {}^1\!/_2 K_0 \| \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} \|^2$$

Правую часть (1.15) распишем следующим образом: $\| \varepsilon_{ij}^\circ - \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} \| \leqslant \| \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} - \varepsilon_{ij}^* \| + \| \varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}^\circ \|$, что вместе с соотношениями (1.19) и (1.11) дает требуемую оценку (последнее неравенство (1.11)).

Замечания 1°. Оценки (1.11) можно видоизменить, если в качестве масштаба изменения градиентов перемещений ввести величину

$$\Delta^* = \| (\delta^{ij}w_{,k}^{*k}w_{k,j}^*)^{1/2} \| \, | V |^{-1/2}$$

Тогда неравенство (1.12) принимает вид

$$\| p_{ij}^* - \sigma_{ij} \| \leqslant \varkappa\Delta^{*2} | V |^{1/2}$$

Это не меняет хода рассуждений, и видоизменение неравенств (1.11) связано с заменой Δ на Δ^*.

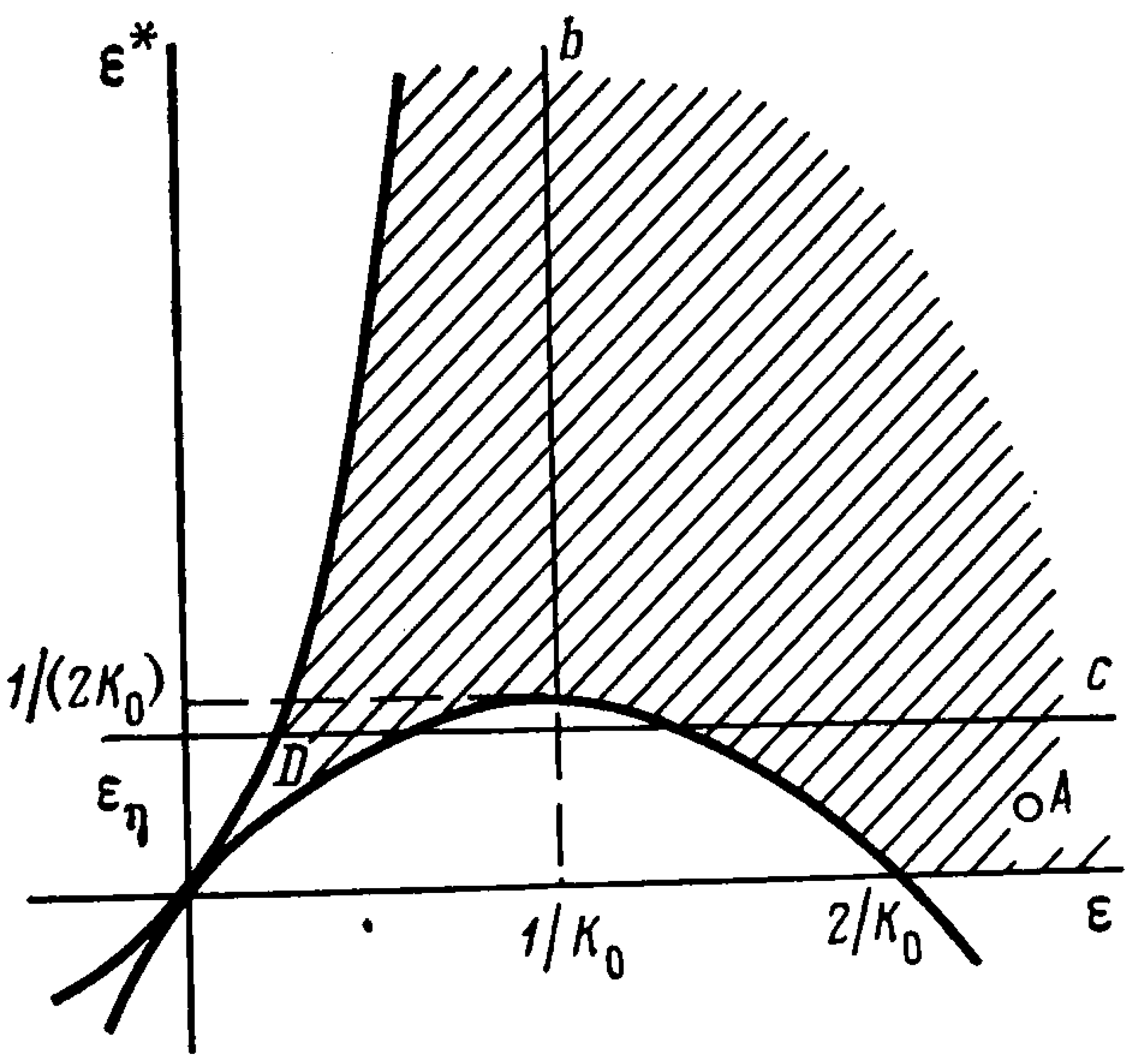
2°. Оценки (1.11) интегральные. Соответствующие поточечные оценки следуют непосредственно из теорем вложения Соболева. Подробно вопрос о переходе от интегральных оценок вида (1.11) к поточечным рассмотрен, например, в [6].

2. Линеаризация геометрически нелинейных задач при малых деформациях. В п. 1 доказана законность линеаризации геометрически нелинейных задач при малых градиентах перемещений. Естественно поставить вопрос: справедливо ли аналогичное утверждение, если малы лишь деформации. Ответ на него отрицательный. Пример тому — тонкие оболочки; несмотря на малость деформаций, перемещения их могут достигать конечных значений. Укажем некоторый критерий, позволяющий выделить класс задач, в которых линеаризация при малых деформациях законна.

Обозначим ε^*, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ среднеквадратичные амплитуды деформаций истинных и линейных: $\varepsilon^* = |V|^{-1/2} \cdot \| \varepsilon_{ij}^* \|$, $\bar{\bar{\varepsilon}} = |V|^{-1/2} \| \bar{\bar{\varepsilon}}_{ij} \|$. Неравенство треугольника позволяет из (1.16) получить соотношение

$$(2.1) \qquad |\varepsilon^* - \bar{\bar{\varepsilon}}| \leqslant {}^1/_2 K_0 \bar{\bar{\varepsilon}}^2$$

Предполагаем, что постоянная K_0 в неравенстве (1.13) наилучшая. Ясно, что не все положительные числа ε^*, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ удовлетворяют (2.1). Множество решений неравенства (2.1) в плоскости $\{\varepsilon^*, \bar{\bar{\varepsilon}}\}$ занимают некоторую область (на фигуре она ограничена параболами $\varepsilon^* = {}^1/_2 K_0 \bar{\bar{\varepsilon}}^2 + \bar{\bar{\varepsilon}}$, $\varepsilon^* = {}^1/_2 K_0\, \varepsilon^2 + \bar{\bar{\varepsilon}}^2$ и заштрихована).



Примем, что истинные деформации упругого тела малы: $\varepsilon^* \ll 1$. Если бы из этого следовало, что малы и линейные деформации ($\bar{\bar{\varepsilon}} \ll 1$), то в силу (1.13) малыми оказались бы и градиенты перемещений ($\Delta^* \ll 1$ при $K_0 = O(1)$). Тогда из теоремы, доказанной в п. 1, следовало бы, что линеаризация геометрически нелинейных задач законна и при малых деформациях. Однако неравенство (3.1) (см. фигуру) допускает такие состояния упругого тела, при которых $\varepsilon^* \ll 1$, а $\bar{\bar{\varepsilon}} \sim 1$ (например, точка A). По-видимому, такая ситуация наблюдается для оболочек. Рассмотрим ее подробней.

Любому деформируемому состоянию упругого тела соответствует точка заштрихованной области на фигуре, а процессу деформирования из ненапряженного состояния — кривая, выходящая из начала координат. Чтобы попасть в точку A в процессе деформирования, необходимо пересечь вертикальную прямую b, которая соответствует напряженным состояниям с $\varepsilon^* \geqslant 1/(2K_0)$. Обозначим ε_n предельные упругие деформации в упругом теле. Если $K_0 > 1/(2\varepsilon_n)$, то из сказанного следует, что в рамках модели физически линейного материала состояние A недостижимо. В этом случае пространство состояний упругого тела на плоскости ε^*, $\bar{\bar{\varepsilon}}$ ограничено прямой c и представляется областью D. Можно показать, что для напряженных состояний, принадлежащих области D, $\bar{\bar{\varepsilon}} < 2\varepsilon^*$. Последнее сразу приводит к тому, что линеаризация геометрически нелинейных задач в такой ситуации законна и при малых деформациях.

В условие $\varepsilon_n < 1/(2K_0)$ входит постоянная Корна K_0 — функция геометрии области V, которую упругое тело занимает в недеформируемом состоянии. Таким образом, определение класса задач, в которых линеаризация законна при малых деформациях, свелось к исследованию зависимости постоянной Корна от геометрии недеформируемого состояния упругого тела. Суммируем доказанное.

Лемма. Линеаризация геометрически нелинейных задач при малых деформациях законна для упругих тел, постоянной Корна для которых K_0 меньше $1/(2\varepsilon_n)$, где ε_n — предельные упругие деформации. При этом погрешность решения геометрически линейной задачи в норме L_2 есть величина самих деформаций.

Нахождение постоянной Корна для тех или иных областей представляет собой отдельную и не простую математическую задачу. Отметим лишь, что для тел, геометрия которых имеет малые параметры (оболочки, пластины, стержни), линеаризация геометрически нелинейных задач при малых деформациях может привести к ошибкам. Это связано со следующим. Пусть h — толщина оболочки или стержня. Показано [1], что постоянная Корна для таких тел растет при $h \to 0$, как C/h или быстрее (C от h не зависит). При малых h K_0 становится больше $1 / (2\varepsilon_n)$. В этом случае состояние A становится достижимым в рамках модели упругого материала. Таким образом, малость деформаций здесь не гарантирует малости градиентов перемещений, что и поясняет возможность возникновения ошибок при линеаризации нелинейных задач только при малых деформациях.

Автор благодарит В. Л. Бердичевского за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kirchhoff G.* Ürber die Gleichungen des Glechgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht-unendlichen kleinen verschiebungen seiner Tal.— Sitzungsber. math-naturwiss. Kl. Bayerishen Acad. Wiss. München, 1852, B. 9, S. 762—773.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
4. *Prager W., Synge J. L.* Approximations in Elasticity based on the consept of function space.— Quart. Appl. Math., 1947, v. 5, No. 3, p. 241—269.
5. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
6. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука. 1981. 208 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.IV.1985

[1] См. также: *Мисюра В. А.* Эффект потери точности классической теории оболочек: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук., М.: МГУ, 1984. 115 с.