

УДК 532.5

К РАСЧЕТУ СИЛЫ И МОМЕНТА СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КАПЛЮ В ПРОИЗВОЛЬНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Паршикова Н. В.

Методом точечных сил Озеена [1—3], отличным от применявшихся ранее в подобных задачах, получены формулы для силы и момента сил, действующих на сферическую каплю в неоднородном нестационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. В частных случаях результаты сводятся к известным.

Ранее рассматривалось неустановившееся движение твердой частицы в неоднородном нестационарном потоке [4, 5], ее вращение [6, 7], а также условия скольжения на поверхности [5, 7], учитывалось влияние заданных внешних сил [8, 9]. Изучены соответствующая стационарная задача [10, 11] и неустановившееся движение капли в однородном нестационарном потоке [12—14].

1. Постановка задачи. Жидкая сфера с вязкостью μ' и плотностью ρ' постоянного радиуса a движется со скоростью $u(t)$ в несжимаемой среде с вязкостью μ и плотностью ρ . Задача исследуется в приближении Стокса, т. е. рассматриваются следующие линейные нестационарные уравнения движения жидкости вне и внутри капли:

$$(1.1) \quad \rho \partial \mathbf{v} / \partial t = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_w, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(1.2) \quad \rho' \partial \mathbf{v}' / \partial t = -\nabla p' + \mu' \Delta \mathbf{v}' + \mathbf{f}_w', \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$$

В отсутствие частицы жидкость имеет скорость $\mathbf{v}_\infty(\mathbf{r}, t)$ и давление $p_\infty(\mathbf{r}, t)$, которые также удовлетворяют системе уравнений (1.1).

На поверхности капли выполняются условия непротекания жидкостей через поверхность контакта и равенства касательных компонент скоростей и касательных компонент тензоров вязких напряжений

$$(1.3) \quad v_n = v_n' = u_n, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}'_\tau, \quad p_{n\tau} = p'_{n\tau}$$

Вдали от частицы и в ее центре выполняются следующие условия:

$$r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty \rightarrow 0, \quad p - p_\infty \rightarrow 0; \quad r = 0, \quad |\mathbf{v}'| \neq \infty, \quad p' \neq \infty$$

Введем безразмерные переменные, путем деления радиуса-вектора, времени, скорости, давления и заданной внешней силы соответственно на величины a , a^2/ν , ν/a , $\mu\nu/a^2$, $\mu\nu/a^3$ ($\mu = \rho \cdot \nu$).

Во внешней задаче заданную силу $\mathbf{f}_w(\mathbf{r}, t)$ можно исключить вычитая из (1.1) уравнения для \mathbf{v}_∞ , p_∞ . Допустим, что для внутренней задачи $\mathbf{f}_w' = \nabla \varphi$ (например, сила тяжести), тогда этот член можно включить в давление. Так как отклонение формы капли от сферической (т. е. условия для p_{nn}) не рассматривается, то граничные условия при этом не меняются.

В результате относительно безразмерных переменных $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$, $q = p - p_\infty$, v' , p' получаем следующие уравнения и граничные условия:

$$(1.4) \quad \partial \mathbf{w} / \partial t = -\nabla q + \Delta \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$$

$$(1.5) \quad \sigma B^{-2} \partial \mathbf{v}' / \partial t = -\nabla p' + \sigma \Delta \mathbf{v}', \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$$

$$(1.6) \quad r = 1, \quad w_n + v_{\infty n} = v_n' = u_n, \quad \mathbf{w}_\tau + \mathbf{v}_{\infty \tau} = \mathbf{v}'_\tau,$$

$$q_{n\tau} + p_{\infty n\tau} = p'_{n\tau}$$

$$(1.7) \quad r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{w} \rightarrow 0, \quad q \rightarrow 0$$

$$(1.8) \quad r = 0, \quad |\mathbf{v}'| \neq \infty, \quad p' \neq \infty$$

Система уравнений (1.4), (1.5), куда входят два безразмерных параметра σ и B^2 , равные отношениям соответственно динамических и кинема-

тических коэффициентов внутри и вне капли, с условиями (1.6) — (1.8) позволяет определить поля скоростей и давлений вне и внутри капли.

2. Построение решений. Воспользуемся преобразованием Лапласа с параметром s по аргументу времени t . Уравнения движения при этом принимают вид

$$(2.1) \quad sW = -\nabla Q + \Delta W, \quad \operatorname{div} W = 0$$

$$(2.2) \quad \sigma B^{-2} sV' = -\nabla P' + \sigma \Delta V', \quad \operatorname{div} V' = 0$$

$$(2.3) \quad r=1, \quad W_n + V_{\infty n} = V'_n = U_n, \quad W_\tau + V_{\infty \tau} = V'_\tau,$$

$$(2.4) \quad Q_{n\tau} + P_{\infty n\tau} = P'_{n\tau}$$

$$r \rightarrow \infty, \quad W \rightarrow 0, \quad Q \rightarrow 0$$

$$(2.5) \quad r=0, \quad |V'| \neq \infty, \quad P' \neq \infty$$

Следуя методу точечных сил Озеена [1, 2], решения выписанной системы уравнений будем строить при помощи фундаментального тензора u_{ki} и вектора p_k

$$u_{ki} = \delta_{ki} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_i}, \quad p_k = \frac{\partial}{\partial x_k} (s\Phi - \Delta \Phi)$$

Функция Φ — решение уравнения

$$\Delta \Delta \Phi - s \Delta \Phi = \delta(r), \quad \Phi = (1 - e^{-\sqrt{s}r}) (4\pi sr)^{-1}$$

В этом случае при фиксированном k величины u_{ki} и p_k удовлетворяют уравнениям

$$s u_k = -\nabla p_k + \Delta u_k, \quad \operatorname{div} u_k = 0$$

Решения $F_k^1 u_k$ и $F_k^1 p_k$ (F^1 — постоянный вектор) соответствуют течению, создаваемому точечной силой, расположенной в начале координат. Очевидно, производные любого порядка по координатам [от u_k и p_k являются решениями системы (2.1). В частности, это можно сказать и о величинах v_{ki} , q_k

$$v_{ki} = \Delta u_{ki} = \delta_{ki} \Delta \Delta \Phi - \partial^2 \Delta \Phi / \partial x_k \partial x_i, \quad q_k = \Delta p_k = 0 \quad (r \geq 1)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям, внешнее решение задачи (2.1) — (2.5) будем строить с помощью производных по координатам от величин u_{ki} , v_{ki} и p_k . Группируя члены при $\Delta \Phi$ и выделяя в соответствующих тензорах симметричную и антисимметричную части, для поля скоростей и давления получаем выражения, которые в векторной записи выглядят следующим образом:

$$(2.6) \quad W = \Lambda \Delta \Delta \Phi - \nabla (\Lambda \cdot \nabla) \Delta \Phi + [\nabla \times L] \Delta \Phi - \nabla (F \cdot \nabla) \left(\frac{1}{4\pi r s} \right),$$

$$Q = (F \cdot \nabla) \left(\frac{1}{4\pi r} \right)$$

Компоненты векторов F и L представляют собой линейные дифференциальные операторы вида

$$F^i = \sum_{n=1}^{\infty} F_{ijk\dots l}^{(n)} \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x_j \partial x_k \dots \partial x_l}, \quad L^i = \sum_{n=1}^{\infty} L_{ijk\dots l}^{(n)} \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x_j \partial x_k \dots \partial x_l}$$

Аналогично можно расписать вектор Λ . Как будет показано ниже, граничные условия на поверхности сферы удовлетворяются, если тензоры $F^{(n)}$, $L^{(n)}$ и $\Lambda^{(n)}$ симметричны по любой паре индексов и свертки по любым двум индексам равны нулю. Решение (2.6) — это другая форма записи общего решения Ламба [15]. Последнее можно показать учитывая, что величи-

ны вида $f_n = \Lambda_{ij\dots k}^{(n)} x_i x_j \dots x_k$ — объемные сферические гармоники степени n , так как они однородны по r^n и $\Delta f_n = 0$.

Действительно, решение (2.6) можно написать в виде

$$(2.7) \quad \mathbf{W} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [sn^{-1}\psi_{n-1}(r) - \psi_n(r)] \nabla (\Lambda_{ij\dots k}^{(n)} x_i x_j \dots x_k) - \right. \\ \left. - r\psi_{n+1}(r) \nabla r (\Lambda_{ij\dots k}^{(n)} x_i x_j \dots x_k) - n^{-1}\psi_n(r) \operatorname{rot} [\mathbf{r} (L_{sq\dots l}^{(n)} x_s x_q \dots x_l)] - \right. \\ \left. - \nabla \left[F_{kj\dots l}^{(n)} \frac{\partial^{(n)}}{\partial x_k \partial x_j \dots \partial x_l} \left(\frac{1}{4\pi sr} \right) \right] \right\}, \quad Q = \sum_{n=1}^{\infty} F_{kj\dots l}^{(n)} \frac{\partial^{(n)}}{\partial x_k \partial x_j \dots \partial x_l} \left(\frac{1}{4\pi r} \right)$$

Функции $\psi_n(r) = (r^{-1}d/dr)^n \Delta \Phi$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d^2\psi_n}{dr^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - s\psi_n = 0, \quad \frac{2n+1}{r^2} \psi_n = \frac{s}{r^2} \psi_{n-1} - \psi_{n+1}$$

Например

$$\psi_0(r) = \Delta \Phi = -\frac{1}{4\pi r} e^{-\sqrt{sr}}, \quad \psi_1(r) = \frac{1 + \sqrt{sr}}{4\pi r^3} e^{-\sqrt{sr}}, \\ \psi_2(r) = -\frac{3 + 3\sqrt{sr} + sr^2}{4\pi r^5} e^{-\sqrt{sr}}$$

Функции $\psi_n(r)$ пропорциональны функциям Бесселя дробного порядка [16]. Учитывая также, что тензоры $F^{(n)}$, $L^{(n)}$, $\Lambda^{(n)}$ симметричны по любой паре индексов и свертки по двум индексам равны нулю, т. е. величины вида $f_n = \Lambda_{i,j\dots k}^{(n)} x_i x_j \dots x_k$ — объемные сферические гармоники степени n , можно установить соответствие между решением (2.7) и общим решением Ламба [15].

Внутри капли аналогичным образом построенное решение системы (2.2) имеет вид

$$\mathbf{V}' = -\nabla (S \cdot \nabla) \Delta \Phi' + S \Delta \Delta \Phi' + [\nabla \times T] \Delta \Phi' + \\ + \lambda^{-2} \nabla \left(\sum_{n=1}^{\infty} R_{ij\dots l}^{(n)} x_i x_j \dots x_l \right), \quad P' = -\sigma \sum_{n=1}^{\infty} R_{ij\dots l}^{(n)} x_i x_j \dots x_l \\ S^i = \sum_{n=1}^{\infty} S_{ij\dots k}^{(n)} \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x_j \dots \partial x_k}, \quad T^i = \sum_{n=1}^{\infty} T_{ij\dots k}^{(n)} \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x_j \dots \partial x_k}$$

При этом тензоры $S^{(n)}$, $T^{(n)}$ и $R^{(n)}$ симметричны по любой паре индексов свертки и по двум индексам равны нулю. Функция Φ' — ограниченное в точке $r = 0$ решение уравнения

$$\Delta \Delta \Phi' - \lambda^2 \Delta \Phi' = 0, \quad \Phi' = \frac{\operatorname{sh} \lambda r}{r}, \quad \lambda^2 = \frac{s}{B^2}, \quad \sigma = \frac{\mu'}{\mu}, \quad B^2 = \frac{v'}{v}$$

Для внутреннего решения точно так же, как это было сделано для внешнего, можно установить соответствие с общим решением Ламба. В дальнейшем понадобится вектор напряжений, который можно вычислить воспользовавшись формулой

$$(2.8) \quad \mathbf{Q}_n = -Q\mathbf{n} + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \mathbf{W} + \frac{1}{r} \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{W}) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2(k+2)r^{-1} \nabla (b_k r^{-k-1} F_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l) - \right. \\ \left. - s (b_k r^{-k-1} F_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l) \mathbf{n} - (kr)^{-1} [(k-1)\psi_k(r) + \right. \\ \left. + r^2 \psi_{k+1}(r)] \operatorname{rot} [\mathbf{r} (L_{ij\dots l}^{(k)} x_i x_j \dots x_l)] + \right. \\ \left. + (rk)^{-1} [(2k^2 - 2 + sr^2)\psi_k(r) - 2r^2 \psi_{k+1}(r)] \nabla (\Lambda_{ij\dots l}^{(k)} x_i x_j \dots x_l) + \right. \\ \left. + [2(k+2)\psi_{k+1}(r) - s\psi_k(r)] (\Lambda_{ij\dots l}^{(k)} x_i x_j \dots x_l) \mathbf{n} \right\}, \\ b_k = (-1)^k (2k-1)!! / 4\pi s$$

Граничные условия (2.3) можно записать в виде [10]

$$(2.9) \quad \begin{aligned} W_n + V_{\infty n} &= V_n' = U_n, \quad \partial W_n / \partial r + \partial V_{\infty n} / \partial r = \partial V_n' / \partial r \\ (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{W}) + (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{V}_{\infty}) &= (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{V}'), (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{Q}_n) + (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{P}_{\infty n}) = (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{P}_n') \\ (\mathbf{r} \cdot \text{rot } [\mathbf{r} \times \mathbf{Q}_n]) + (\mathbf{r} \cdot \text{rot } [\mathbf{r} \times \mathbf{P}_{\infty n}]) &= (\mathbf{r} \cdot \text{rot } [\mathbf{r} \times \mathbf{P}_n']) \end{aligned}$$

Заданное поле скоростей $\mathbf{V}_{\infty}(\mathbf{r}, s)$ представим в виде ряда Тейлора

$$\begin{aligned} V_{\infty}^i - U^i &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{(n-1)} (V_{\infty}^i - U^i)}{\partial x_j \dots \partial x_p \partial x_q} \right]_0 x_j \dots x_p x_q = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_{ij\dots pq}^{(n)} x_j \dots x_p x_q \end{aligned}$$

Нулевой индекс означает, что соответствующая величина берется в центре капли в отсутствие последней.

На поверхности капли при $r = 1$ поле \mathbf{V}_{∞} можно разложить по независимым сферическим гармоникам следующим образом:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} V_{\infty n} - U_n &= \sum_{k=1}^{\infty} d_{ij\dots lq}^{(k)} n_i n_j \dots n_p n_q = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \\ \frac{\partial V_{\infty n}}{\partial r} &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) d_{ij\dots pq}^{(k)} n_i n_j \dots n_p n_q = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \\ -(\mathbf{r} \cdot \text{rot } [\mathbf{r} \times \mathbf{P}_{\infty n}]) &= \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) [2(k+1) d_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l - \\ &- (k-2) d_{ij\dots pq}^{(k)} n_i n_j \dots n_l] = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \\ (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{V}_{\infty}) &= \sum_{k=2}^{\infty} (k-2) \varepsilon_{ilj} d_{ijp\dots q}^{(k)} n_i n_p \dots n_q = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \\ (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{P}_{\infty n}) &= \sum_{k=2}^{\infty} (k-2)(k-1) \varepsilon_{ilj} d_{ijp\dots q}^{(k)} n_i n_p \dots n_q = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \end{aligned}$$

Величины A_k, B_k, E_k, C_k, D_k представляют собой поверхностные сферические гармоники степени k . При $k = 1$ значения этих величин легко вычисляются и используются в дальнейшем для определения силы и момента сил, действующих на каплю. Например, для A_1, B_1 имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= (V_{\infty}^i - U^i) n_i + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\Delta^k V_{\infty}^i]_0 n_i}{(2k+3)(2k+1)!}, \\ B_1 &= 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\Delta^k V_{\infty}^i]_0 n_i}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)!} \end{aligned}$$

Граничные условия (2.9) сводятся при этом к следующим:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} (k+1) b_k F_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + (k+1) \psi_k \Lambda_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + A_k &= 0 \\ k R_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + \lambda^2 (k+1) \psi_k' S_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l &= 0 \\ (k+1) \{ -(k+2) b_k F_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + \\ + [(k-1) \psi_k + \psi_{k+1}] \Lambda_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l \} + B_k &= \\ = k(k-1) \lambda^{-2} R_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + \\ + (k+1) [\psi_{k+1}' + (k-1) \psi_k'] S_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2b_k k (k+2) F_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + (k+1)^{-1} E_k + \\
& + \{[2(k^2-1) + s] \psi_k - 2\psi_{k+1}\} \Lambda_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l = \\
& = \sigma \{2k(k-1) \lambda^{-2} R_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + \\
& + [(2k^2 - 2 + \lambda^2) \psi_k' - 2\psi_{k+1}'\} S_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l \} \\
& (k+1) \psi_k L_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + C_k = (k+1) \psi_k' T_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l \\
& (k+1) [(k-1) \psi_k + \psi_{k-1}] L_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + D_k = \\
& = \sigma (k+1) [(k-1) \psi_k' + \psi_{k-1}'] T_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\psi_k &= \{\psi_k(r)\}_{r=1}, \quad \psi_k' = \{(r^{-1}d/dr)^k \Delta\Phi'\}_{r=1}, \\
R_{ij\dots l}^{(k)} &= R_{ij\dots l}^{(k)} (k \neq 1), \quad R_i^{(1)} = R_i^{(1)} - U^i
\end{aligned}$$

Функции $\psi_k'(r)$ удовлетворяют соотношениям, аналогичным уравнениям для $\psi_k(r)$.

Решения системы уравнений (2.11) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad \Lambda_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l &= \{(k+2) [2k\psi_{k+1}' - \sigma(2\psi_{k+1}' - \lambda^2\psi_k')] A_k - \\
& - \psi_{k+1}' E_k - \sigma(2\psi_{k+1}' - \lambda^2\psi_k') B_k\} (s\chi_k)^{-1} \\
S_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l &= \{(k+2) [2(k-1)\psi_{k-1} + \psi_k] A_k - \\
& - \psi_{k-1} E_k + (\psi_k - 2\psi_{k-1}) B_k\} \chi_k^{-1} \\
F_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l &= -[\psi_k \Lambda_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l + (k+1)^{-1} A_k] b_k^{-1} \\
R_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l &= -(k+1) k^{-1} \lambda^2 \psi_k' S_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l \\
L_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l &= \{\psi_k' D_k - \sigma[(k-1)\psi_k' + \psi_{k+1}'] C_k\} \varphi_k^{-1} \\
T_{ij\dots l}^{(k)} n_i n_j \dots n_l &= \{\psi_k D_k - \sigma[(k-1)\psi_k + \psi_{k+1}] C_k\} \varphi_k^{-1} \\
\chi_k(s) &= (k+1) [\sigma(2\psi_{k+1}' - \lambda^2\psi_k') \psi_{k-1} + \psi_{k+1}' (\psi_k - 2\psi_{k-1})] \\
\varphi_k(s) &= (k+1) \{\sigma[(k-1)\psi_k' + \psi_{k+1}'] \psi_k - [(k-1)\psi_k + \psi_{k+1}] \psi_k'\}
\end{aligned}$$

Как было уже отмечено, величины A_k, B_k, C_k, D_k, E_k = известные независимые поверхностные сферические гармоники степени k , выражаемые через заданное поле V_∞ по формулам (2.10). При $k=1$ они легко вычисляются и входят в выражения для силы и момента сил, которые определяются через поверхностные интегралы, содержащие тензор напряжений (2.8), и зависят в силу ортогональности сферических гармоник только от векторов F^1 и L^1 , представленных в решениях (2.12).

3. Формулы для силы и момента сил. Указанные величины связаны с векторами F^1 и L^1 , которые соответствуют точечной силе и точечному моменту и определяются из уравнений (2.11) соотношениями

$$\begin{aligned}
G(s) &= F^1(s) + \frac{4}{3}\pi s U(s) - \int F_w(r, s) dr \\
M(s) &= \frac{2}{3}(3 + 3\sqrt{s} + s) e^{-\sqrt{s}} L^1 + s \int [r \times V_\infty] dr - \int [r \times F_w] dr
\end{aligned}$$

Здесь интегрирование производится по объему сферы единичного радиуса. Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, для силы $g(t)$ и момента сил $m(t)$, действующих на каплю в неоднородном нестационарном потоке, окончательно получаем выражения

$$\begin{aligned}
g(t) &= 2\pi \frac{3\sigma + 2}{\sigma + 1} ([v_\infty]_0 - u) + 6 \int_0^t d\tau I_1(t - \tau) \frac{d}{d\tau} ([v_\infty]_0 - u) + \\
& + \frac{2}{3} \pi \frac{d}{dt} ([v_\infty]_0 - u) + \frac{4}{3} \pi \frac{d}{dt} [v_\infty]_0 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left\{ 2\pi \frac{3\sigma+2(1-k)}{\sigma+1} [\Delta^k \mathbf{v}_{\infty}]_0 + \frac{6\pi}{2k+3} \frac{d}{dt} [\Delta^k \mathbf{v}_{\infty}]_0 + \right. \\
& + 6 \int_0^t d\tau [(1-k) I_1(t-\tau) + k I_2(t-\tau)] \frac{d}{d\tau} [\Delta^k \mathbf{v}_{\infty}]_0 \left. - \int \mathbf{f}_w(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right. \\
\mathbf{m}(t) = & \frac{4}{3} \int_0^t d\tau I_3(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [\text{rot } \mathbf{v}_{\infty}]_0 + \frac{4}{15} \pi \frac{d}{dt} [\text{rot } \mathbf{v}_{\infty}]_0 + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+3)(2k+1)!} \left\{ -2\pi k [\text{rot } \Delta^k \mathbf{v}_{\infty}]_0 + \frac{\pi}{2k+5} \frac{d}{dt} [\text{rot } \Delta^k \mathbf{v}_{\infty}]_0 + \right. \\
& + \left. \int_0^t d\tau [I_3(t-\tau) + 2k I_4(t-\tau)] \frac{d}{d\tau} [\text{rot } \Delta^k \mathbf{v}_{\infty}]_0 \right\} - \int [\mathbf{r} \times \mathbf{f}_w] d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

Изображение по Лапласу функций $I_i(t)$ равно соответственно $\pi s^{-1} K_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), причем

$$\begin{aligned}
K_1(s) &= \xi(s) [\sigma\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)] - (3\sigma+2)(3\sigma+3)^{-1}, \\
K_2(s) &= \sigma\alpha(\lambda)\xi(s) - \sigma(\sigma+1)^{-1} \\
K_3(s) &= (3+3\sqrt{s}+s)\theta(s), \quad K_4(s) = (1+\sqrt{s})\theta(s) \\
\xi(s) &= (1+\sqrt{s})[\sigma\alpha(\lambda) + (3+\sqrt{s})\beta(\lambda)]^{-1}, \\
\theta(s) &= \sigma\lambda^2\beta(\lambda) [\sigma\lambda^2(1+\sqrt{s})\beta(\lambda) + (3+3\sqrt{s}+s)\gamma(\lambda)]^{-1} \\
\gamma(\lambda) &= \lambda \text{ch } \lambda - \text{sh } \lambda, \quad \beta(\lambda) = \text{sh } \lambda - 3\gamma(\lambda)/\lambda^2, \\
\alpha(\lambda) &= \gamma(\lambda) - 2\beta(\lambda)
\end{aligned}$$

В частном случае твердой частицы получаем

$$\begin{aligned}
I_1(t) = I_2(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}, \quad I_3(t) = \pi \left(3 - e^t \text{erfc } \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \right), \\
I_4(t) &= \pi
\end{aligned}$$

Для пузыря при $\sigma \rightarrow 0$ имеем

$$I_1(t) = \frac{4}{3} \pi e^{9t} \text{erfc}(3\sqrt{t}), \quad I_2(t) = I_3(t) = I_4(t) = 0$$

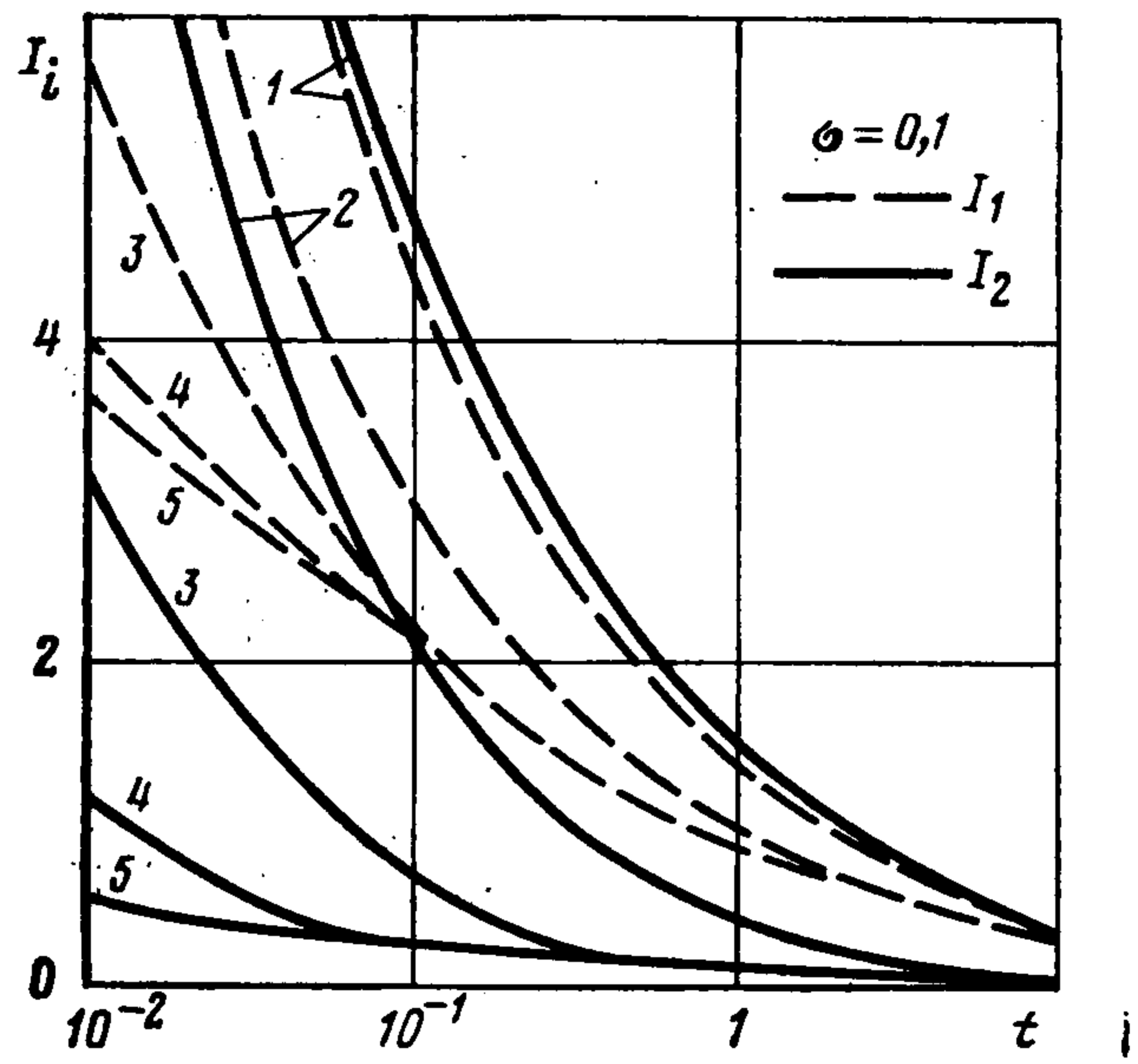
Эти два частных случая согласуются с результатами работ [4—9]. Когда $\sigma = B = 1$, то можно выписать аналитические выражения для $I_3(t)$, $I_4(t)$

$$\begin{aligned}
I_3(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \left[12t^2 - 6t + 1 - (12t^2 + 6t + 1) \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \right] \\
I_4(t) &= \pi \left[\frac{2t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} - \frac{2t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right]
\end{aligned}$$

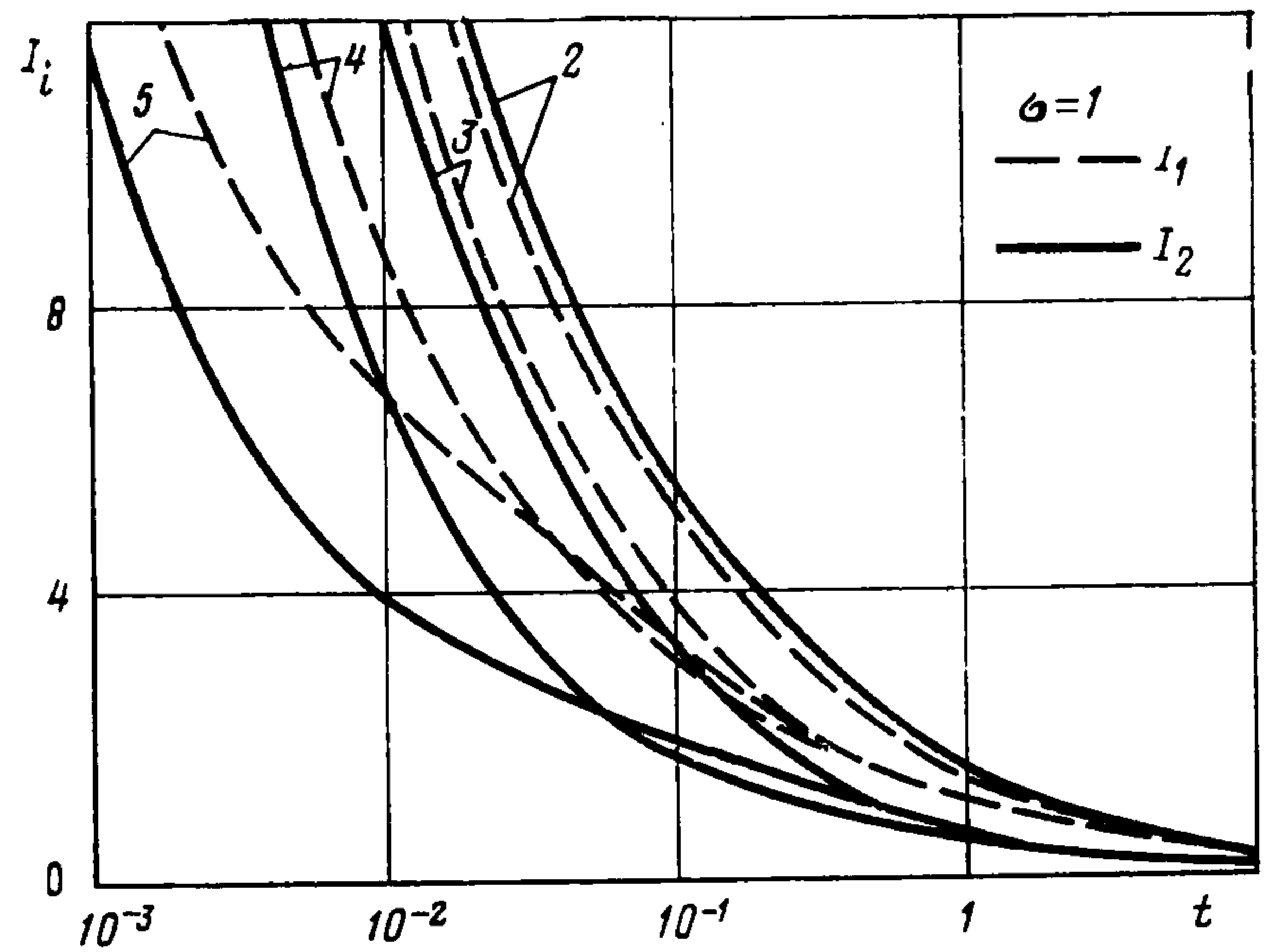
Для других значений параметров σ и B величины $I_i(t)$ определяются численным интегрированием. Результаты счета представлены на фиг. 1—6. Кривые 1—6 соответствуют значениям параметра B^2 , равным 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100.

Для малых времен справедливы асимптотические формулы

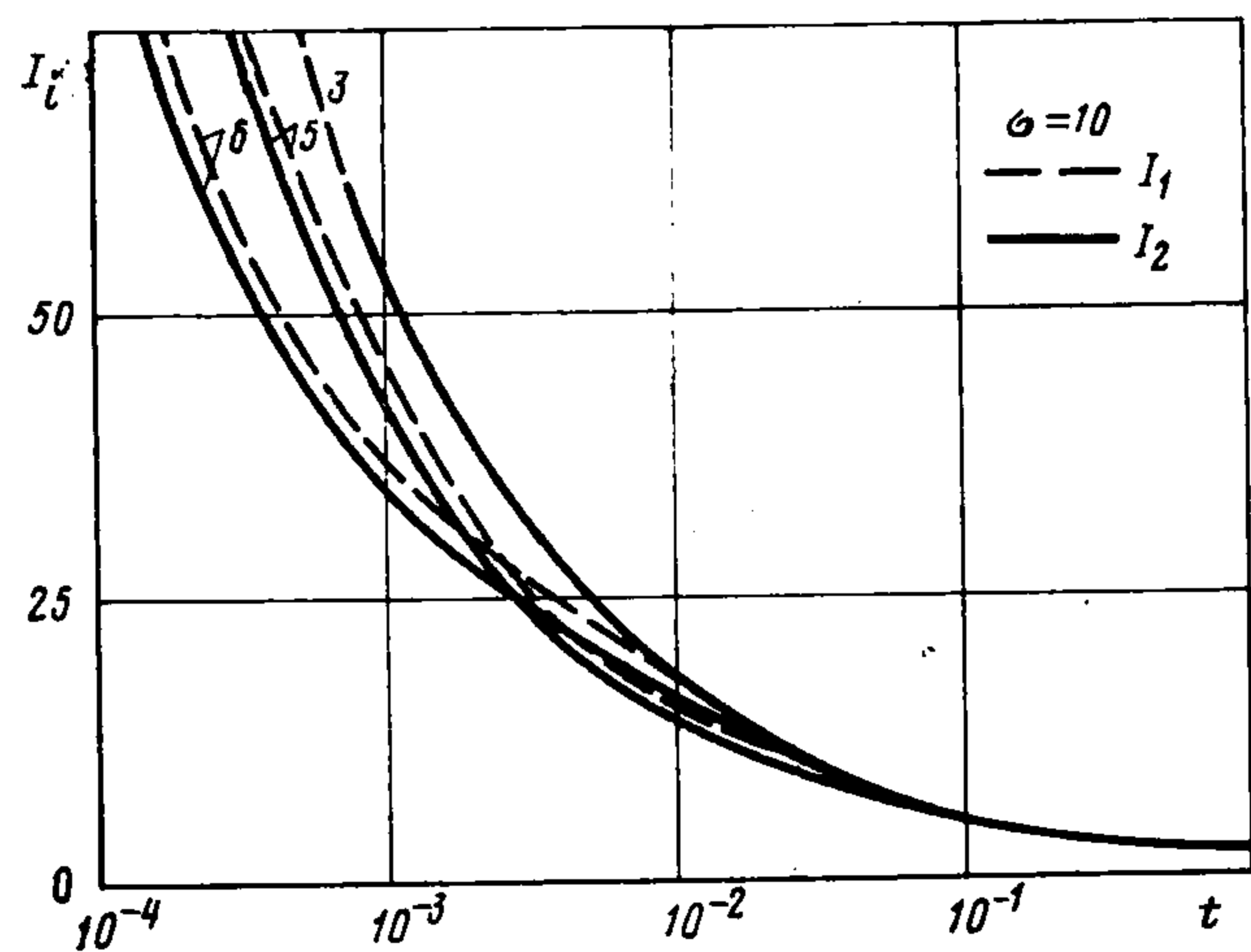
$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{(\sigma+B)\sqrt{t}} + \frac{\sigma^2+2B^2}{(\sigma+B)^2} \pi - \frac{3\sigma+2}{3(\sigma+1)} \pi + \frac{2B[3\sigma B^2(\sigma+B) - (\sigma-2B)^2]\sqrt{\pi t}}{(\sigma+B)^3} + \dots \\
I_2(t) &= \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{(\sigma+B)\sqrt{t}} + \frac{\sigma(\sigma-2B)}{(\sigma+B)^2} \pi + \frac{\sigma}{\sigma+1} \pi + \frac{6B^2\sigma(B^2+B\sigma+2-\sigma)\sqrt{\pi t}}{(\sigma+B)^3} + \dots \\
I_3(t) &= \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{(\sigma+B)\sqrt{t}} + \frac{2\pi\sigma}{(\sigma+B)^2} (\sigma-B^2) + \dots, \quad I_4(t) = \frac{\sigma}{\sigma+B} \pi - \frac{4\sigma B(B+1)}{(\sigma+B)^2} \sqrt{\pi t} + \dots
\end{aligned}$$



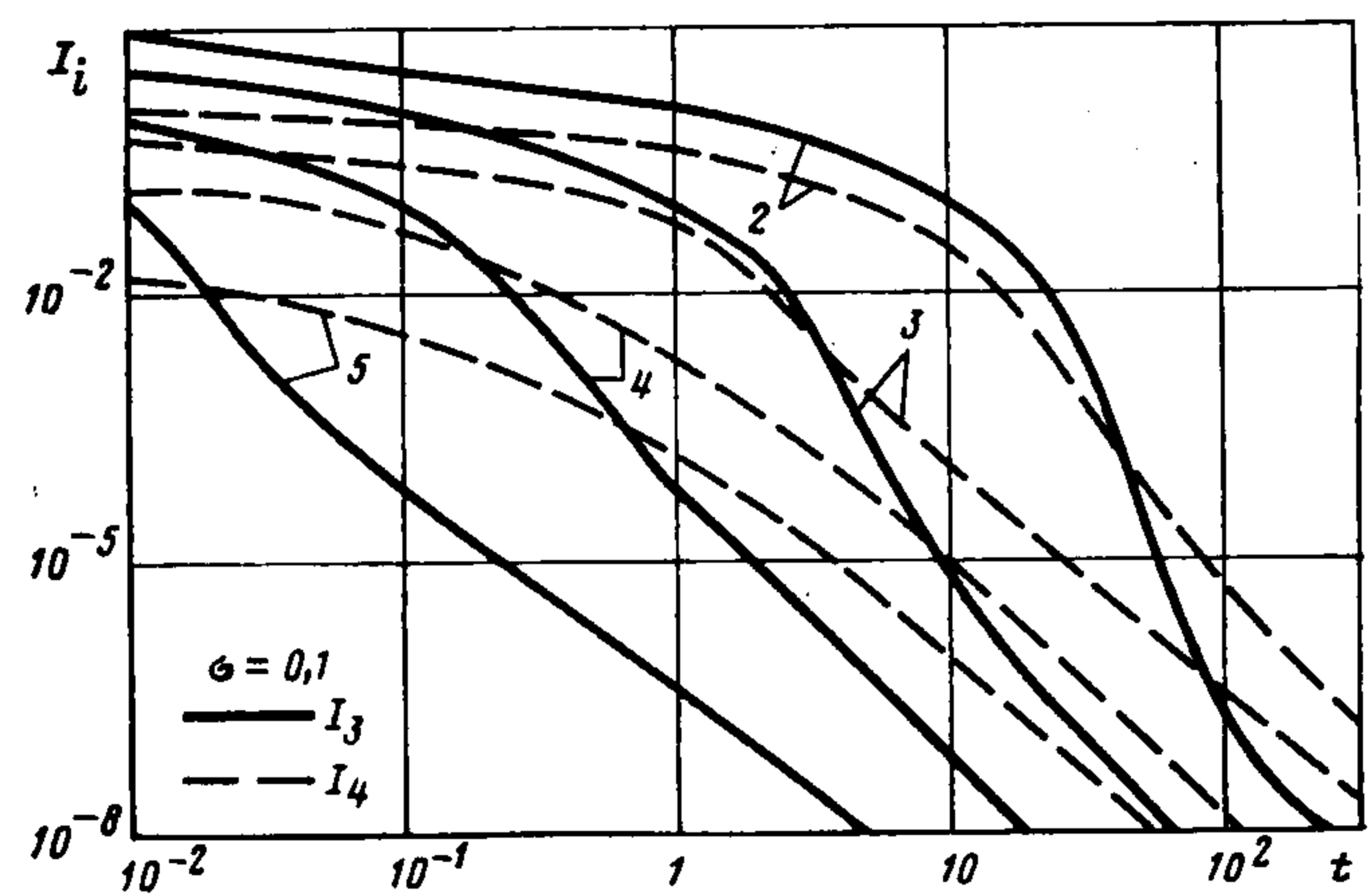
Фиг. 1



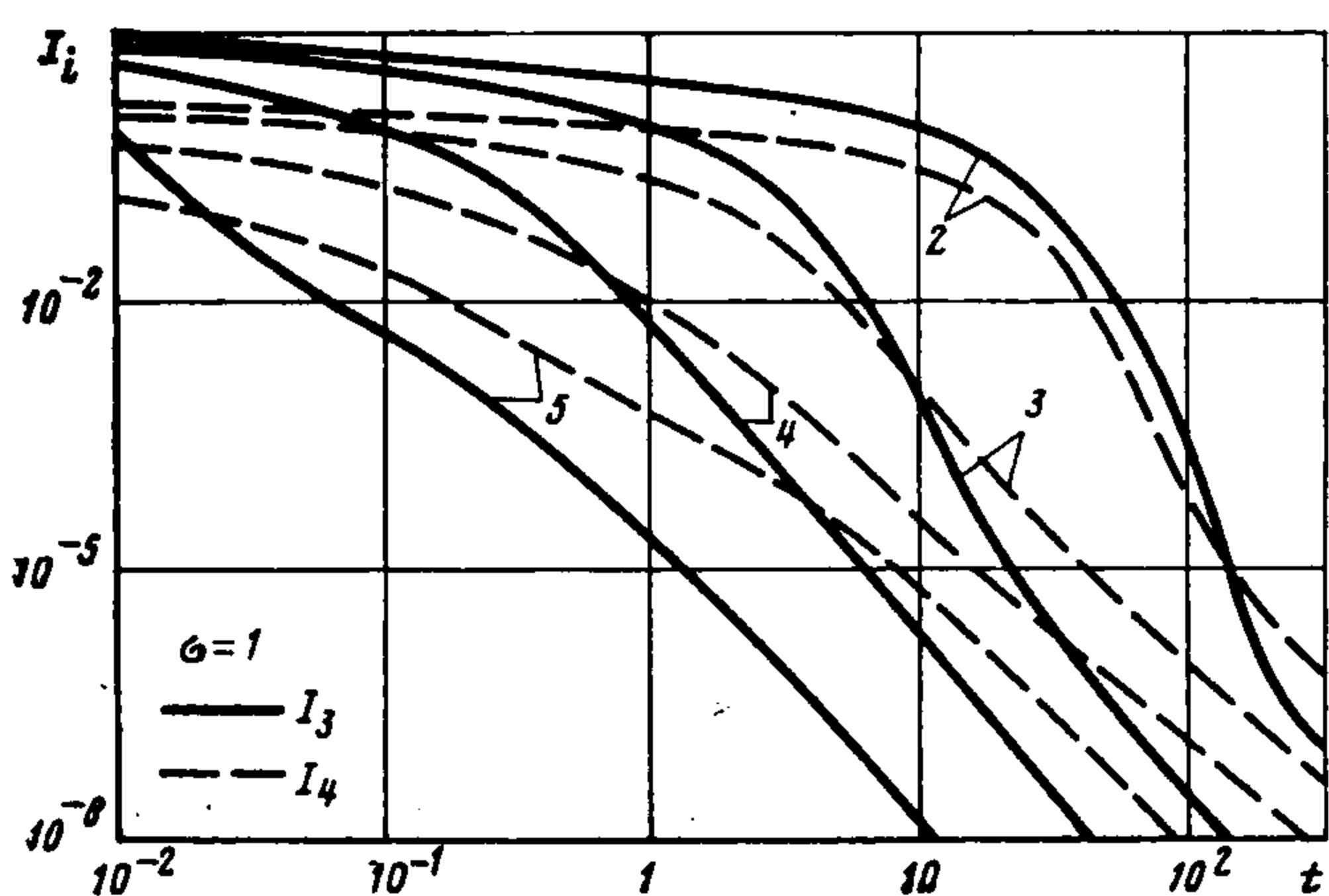
Фиг. 2



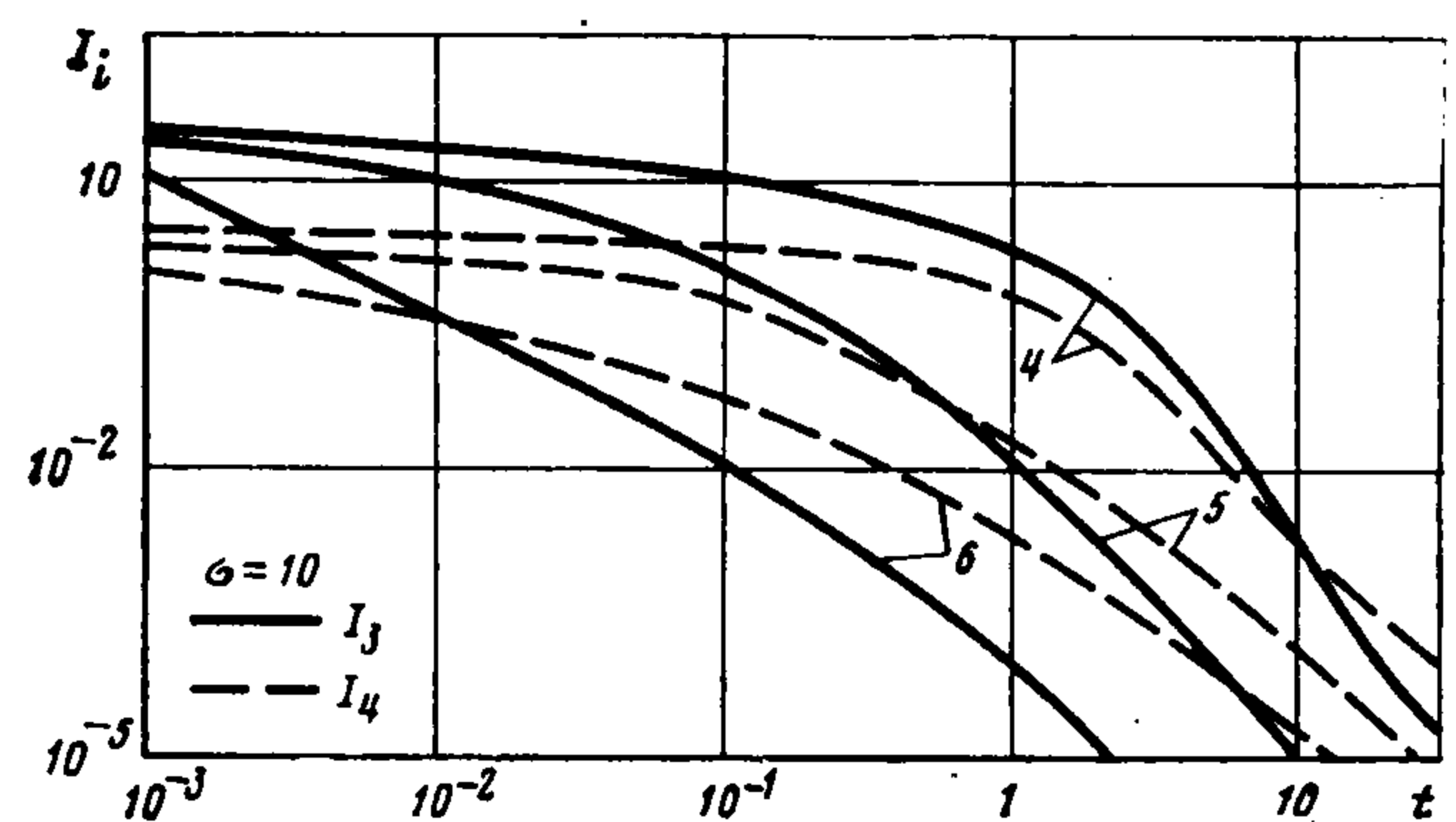
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

При $t \rightarrow \infty$ функции $I_i(t)$ стремятся к величинам]

$$I_1(t) = \frac{(2+3\sigma)^2 \sqrt{\pi}}{9(1+\sigma)^2 \sqrt{t}} - \frac{(2+3\sigma)}{54(1+\sigma)^3} \left[\frac{2\sigma}{7B^2} + \frac{2+3\sigma}{3(1+\sigma)} \right] \frac{\sqrt{\pi}}{t^{3/2}} + \dots,$$

$$I_2(t) = \frac{\sigma(2+3\sigma) \sqrt{\pi}}{3(1+\sigma)^2 \sqrt{t}} - \frac{\sigma}{18(1+\sigma)^3} \left[\frac{4\sigma+2}{7B^2} + \frac{2+3\sigma}{3(1+\sigma)} \right] \frac{\sqrt{\pi}}{t^{3/2}} + \dots,$$

$$I_3(t) = \frac{\sigma^2}{120B^4} \frac{\sqrt{\pi}}{t^{7/2}} + \dots$$

$$I_4(t) = \frac{\sigma}{60B^2} \frac{\sqrt{\pi}}{t^{5/2}} + \dots$$

Концы кривых на фиг. 1—6 описываются асимптотическими формулами с погрешностью, не превышающей 10—15%.

Автор благодарит А. М. Головина за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин А. М., Натяганов В. Л. Магнитогидродинамическое обтекание капли при малых числах Рейнольдса и Гартмана.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 19—25.
2. Паршикова Н. В. Сопротивление капли в вязком неоднородном нестационарном потоке.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ., 1982, № 4, с. 63—66.
3. Паршикова Н. В. Момент сил, действующий на каплю в вязком сдвиговом нестационарном потоке.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ., 1984, № 1, с. 73—75.
4. Mazur P., Bedeaux D. A generalization of Faxen's theorem to non-steady motion of a sphere through an incompressible fluid in arbitrary flow.— Physica, 1974, v. 76, No. 2, p. 235—246.
5. Albano A. M., Bedeaux D., Mazur P. On the motion of a sphere with arbitrary slip in a viscous incompressible fluid.— Physica, 1975, v. 80A, No. 1, p. 89—97.
6. Hills B. P. A generalized Langevin equation for the angular velocity of a spherical brownian particle from fluctuating hydrodynamics.— Physica, 1975, v. 80A, No. 4, p. 360—368.
7. Pieńkowska I. A generalization of Faxen's theorems to include initial conditions.— Arch. Mech., 1981, v. 33, No. 3, p. 469—480.
8. Gatignol R. The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow.— J. Méc. théor. et appl., 1983, v. 2, No. 2, p. 143—160.
9. Gatignol R. The non-uniform motion of a sphere in an unsteady non-uniform stream of viscous incompressible fluid.— Z. angew. Math. und Mech., 1983, B. 63, H. 4, S. T252 — T254.
10. Hetsroni G., Haber S. The flow in and around a droplet or bubble submerged in an unbound arbitrary velocity field.— Rheol. Acta, 1970, v. 9, No. 4, p. 488—496.
11. Rallison J. M. Note on the Faxén relations for a particle in Stokes flow.— J. Fluid Mech., 1978, v. 88, pt. 3, p. 529—533.
12. Sy F., Lightfoot E. N. Transient creeping flow around fluid spheres.— AIChE Journal, 1971, v. 17, No. 1, p. 177—181.
13. Stewart M. B., Morrison F. A. Droplet dynamics in creeping flows.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1981, v. 48, No. 2, p. 224—228.
14. Городцов В. А. Медленные движения жидкой капли в вязкой жидкости.— ПМТФ, 1975, № 6, с. 32—37.
15. Ламб Г. Гидромеханика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928с.
16. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1964. 344 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1985